第34卷第11期
2005年11月

光 子 学 报
ACTA PHOTONICA SINICA

Vol.34 No.11
November 2005

非傍轴贝塞尔-高斯光束在自由空间的传输

高曾辉[1,2] 吕百达[2]

(1 宜宾学院光电信息研究所,宜宾 644007)

(2 四川大学激光物理与化学研究所,成都 610064)

摘 要 从瑞利-索末菲衍射积分出发,推导出任意阶非傍轴贝塞尔-高斯光束在自由空间传输的解析表达式.非傍轴贝塞尔光束和非傍轴高斯光束等的传输方程都可以作为本文一般结果的特例而得出.物理分析和数值计算表明,当高斯和贝塞尔部分的横向尺度与波长相比拟或小于波长时,应当用非傍轴方法处理.

关键词 激光光学;非傍轴贝塞尔-高斯光束;自由空间传输; f-参数和 f_β-参数

中图分类号 O435 **文献标识码** A

0 引言

由Gori等人[1]在1987年引入的贝塞尔-高斯光束因克服了贝塞尔光束解的非平方可积困难,在一定传输距离内又具有近似无衍射传输特性而引起广泛的理论和实验研究兴趣,并推广到了贝塞尔-高斯脉冲光束[2,3].对非傍轴光束的研究问题文献中已作了许多研究[4~6].Borghi等人[7]使用微扰级数展开法研究了贝塞尔-高斯光束的非傍轴传输问题,所得出的级数解是对零阶傍轴解的高阶修正.但级数表示式形式复杂,不便使用.更主要的问题是,高阶级数解是发散的[8,9],因此使级数解的应用受到很大限制.本文使用第一类瑞利-索末菲衍射积分方程,推导出了在 $z>0$ 半空间非傍轴贝塞尔-高斯光束解析的传输公式.所得公式不仅形式简单,而且是收敛的.还作了数值计算和分析说明公式的应用.

1 非傍轴贝塞尔-高斯光束在自由空间的传输方程

假设源 $z=0$ 面上有场为 $E(\rho,\varphi,0)$ 的贝塞尔-高斯光束[7]

$$E(\rho_0,\varphi_0,0)=\mathrm{J}_m(\beta\rho_0)\exp\left(-\frac{\rho_0^2}{w_0^2}\right)\exp(\mathrm{i}m\varphi_0) \tag{1}$$

式中,(ρ_0,φ_0) 为光束在 $z=0$ 平面上点的极坐标,$\mathrm{J}_m(\cdot)$ 为 m 阶贝塞尔函数,β 是正的实常数,w_0 表示高斯部分的束腰宽度.

光传输问题可用Dirichlet边界条件下的第一类瑞利-索末菲衍射积分公式描写,它给出在 $z>0$ 半空间波动方程的严格解为[10]

$$E(\rho,\varphi,z)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}E(\rho_0,\varphi_0,0)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)\rho_0\,\mathrm{d}\rho_0\,\mathrm{d}\varphi_0 \tag{2}$$

式中 $R=|\rho-\rho_0|$,$\rho_0=(\rho_0,\varphi_0)$,$\rho=(\rho,\varphi)$.

将式(1)代入式(2)并利用近似[11]

$$R=r+\frac{\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}{2r} \tag{3}$$

式中 $r=\sqrt{\rho^2+z^2}$.

和积分公式[12]

$$\int_0^{2\pi}\exp[\mathrm{i}x\cos(\varphi-\phi)-\mathrm{i}m\phi]\mathrm{d}\phi=2\pi\mathrm{i}^m\exp(-\mathrm{i}m\varphi)\mathrm{J}_m(x) \tag{4a}$$

$$\int_0^{\infty}\exp(-ex^2)\mathrm{J}_m(\vartheta x)\mathrm{J}_m(gx)x\mathrm{d}x=\frac{1}{2e}\exp\left(-\frac{g^2+\vartheta^2}{4e}\right)I_m\left(\frac{g\vartheta}{2e}\right) \tag{4b}$$

式中 $I_m(\cdot)$ 为 m 阶修正贝塞尔函数,经繁冗复杂的积分计算,最后结果可整理为

$$E(\rho,\varphi,z)=-\frac{\mathrm{i}^{-m+1}kz}{2r^2p}\exp(\mathrm{i}kr)\exp(\mathrm{i}m\varphi)\cdot\exp\left(-\frac{k^2\rho^2}{4r^2p}\right)\exp\left(-\frac{f_\beta^2}{4p}k^2\right)I_m\left(\frac{f_\beta}{2rp}k^2\rho\right) \tag{5}$$

式中

$$p=\frac{1}{w_0^2}-\mathrm{i}\frac{k}{2r} \tag{6a}$$

$$f_\beta=\frac{\beta}{k} \tag{6b}$$

式(5)是本文的主要解析结果,它描述了非傍轴贝塞尔-高斯光束在自由空间的传输规律.由式(5)知,$E(\rho,\varphi,z)$ 主要由 f_β 参数,高斯部分束腰宽度 w_0,波长 λ,贝塞尔光束阶数 m 和位置坐标 (ρ,φ,z) 决定.当高斯部分束宽 w_0 或贝塞尔部分横向尺度($\propto 1/\beta$)[7,13]与波长 λ 相比拟或小于 λ 时,或等效地,f_β 参数和 $f=1/kw_0$ 参数[14]很小时,光束的非傍轴性不可以忽略,此时应当用式(5)描写非傍轴贝塞尔-高斯光束在自由空间的传输行为.与研究非傍轴光束的其他方法,例如微扰级数展开法[5]相比较,使用瑞利-索末菲衍射积分的一个显著优点是所得解析解

Tel:028-85412819 Email:dzxx3545065@163.com

收稿日期:2005-06-13

是收敛的($\rho\to\infty, z\to\infty$时 $E(\rho,\varphi,z)\to 0$)，而级数法所得结果只在一定范围内成立，超出这个范围就是发散的．对此，文献中已作了详细讨论和比较，例如可参考[15].

现讨论式(5)的一些特殊情况：

1)非傍轴高斯光束

令 $f_\beta=0, m=0$，得到非傍轴情况高斯光束在自由空间的传输方程

$$E(\rho,\varphi,z)=-\frac{ikz}{2r^2p}\exp(ikr)\exp\left(-\frac{k^2\rho^2}{4r^2p}\right) \tag{7}$$

式(7)与文献[16]的式(10a)令 $w_{0x}=w_{0y}=w_0$ 时是一致的．

2)非傍轴贝塞尔光束

当 $w_0\to\infty$时，得到非傍轴贝塞尔光束的传输方程

$$E(\rho,\varphi,z)=\frac{i^m z}{r}\exp\left(-\frac{i\pi m}{2}\right)\exp(im\varphi)\cdot \exp\left(-\frac{ik}{2r}\rho^2\right)\exp\left[ikr\left(1-\frac{f_\beta^2}{2}\right)\right]J_m(f_\beta k\rho) \tag{8}$$

3)轴上光场

非傍轴贝塞尔-高斯光束轴上光场可由式(5)中令 $\rho=0$ 求得，为

$$E(0,\varphi,z)=-\frac{i^{-m+1}k}{2zt}\exp(ikz)\exp(im\varphi)\cdot \exp\left(-\frac{f_\beta^2}{4t}k^2\right)I_m(0) \tag{9}$$

式中

$$t=\frac{1}{w_0^2}-i\frac{k}{2z} \tag{10}$$

若 $m\neq 0$，因为 $I_m(0)=0$，所以 $E(0,\varphi,z)=0$ ($m\neq 0$)，即轴上光场始终为 0．当 $m=0$ 时

$$E(0,\varphi,z)=-\frac{ik}{2zt}\exp(ikz)\exp(im\varphi)\cdot \exp\left(-\frac{f_\beta^2}{4t}k^2\right) \tag{11}$$

4)远场光场

在远场近似

$$R=r-\frac{\rho_0\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}{r} \tag{12}$$

下，非傍轴贝塞尔-高斯高斯光束的远场光场为

$$E_f(\rho,\varphi,z)=-\frac{i^{-m+1}z}{2f^2kr^2}\exp(ikr)\exp(im\varphi)\cdot \exp\left(-\frac{\rho^2}{4f^2r^2}\right)\exp\left(-\frac{f_\beta^2}{4f^2}\right)I_m\left(\frac{f_\beta}{2f^2r}\rho\right) \tag{13}$$

5)傍轴近似

若对式(5)e^{ikr}中 r 作傍轴近似

$$r\cong z+\frac{x^2+y^2}{2z} \tag{14}$$

其余部分的 r 用 z 代替，则式(5)简化为

$$E_p(\rho,\varphi,z)=-\frac{i^{-m+1}k}{2tz}\exp(ikz)\exp\left(ik\frac{\rho^2}{2z}\right)\cdot \exp(im\varphi)\exp\left(-\frac{k^2\rho^2}{4tz^2}\right)\exp\left(-\frac{f_\beta^2}{4t}k^2\right)I_m\left(\frac{f_\beta}{2tz}k^2\rho\right) \tag{15}$$

式(15)与文献[7]的式(12)是一致的．

进一步对(15)式作远场近似

$$R_j=z-\frac{\rho_{0j}\rho_j\cos(\varphi_j-\varphi_{0j})}{z} \tag{16}$$

得到

$$E_{pf}(\rho,\varphi,z)=-\frac{i^{-m+1}}{2f^2kz}\exp(ikz)\exp\left(ik\frac{\rho^2}{2z}\right)\cdot \exp(im\varphi)\exp\left(-\frac{\rho^2}{4f^2z^2}\right)\exp\left(-\frac{f_\beta^2}{4f^2}\right)I_m\left(\frac{f_\beta}{2f^2z}\rho\right) \tag{17}$$

2 数值计算和分析

利用式(5)作了大量数值计算以以说明非傍轴贝塞尔-高斯光束在自由空间的传输特性，典型例示于图 1，图 2．图 1 为 $m=0$，在 $z=20z_0$ 面上非傍轴零阶贝塞尔-高斯光束的归一化光强 $I=|E(\eta,\varphi,20z_0)|^2$ ($\eta=\rho/w_0$，$z_0=\pi w_0^2/\lambda$ 为高斯光束的瑞利长度)．为作比较，用式(15)所作的傍轴计算结果 $I_p=|E_p|^2$ 也示于图中．由图 1 知，当 f 和 f_β 很小，例如 $f=0.01, f_\beta=0.05$(图 1(a))时，傍轴近似成立，I 和 I_p 几乎无差别，随着 f 的增加，$f=0.3$(图 1(b))或 f_β 增加，$f_\beta=0.2$(图 1(c))，I 和 I_p 差别较大，傍

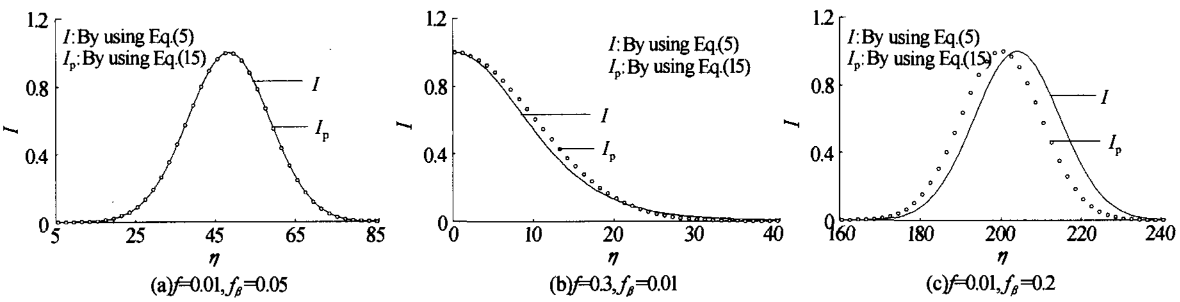

图 1　零阶贝塞尔-高斯光束在 $z=20z_0$ 面上的归一化光强分布

Fig. 1　Normalized transversal intensity distributions of Bessel-Gaussian beams of order zero at the plane $z=20z_0$

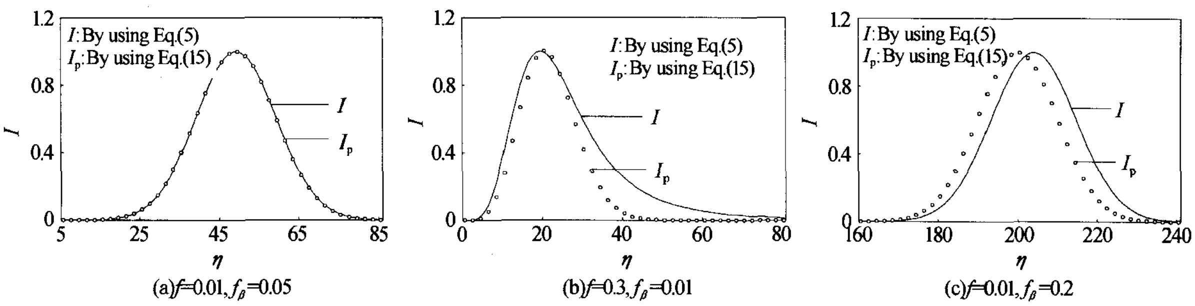

图 2 $m=2$ 的贝塞尔-高斯光束在 $z=20z_0$ 面上的归一化光强分布

Fig. 2 Normalized transversal intensity distributions of Bessel-Gaussian beams of order 2 at the plane $z=20z_0$

轴近似不再成立．图 2 为 $m=2$，在 $z=20z_0$ 面上非傍轴贝塞尔-高斯光束的归一化光强 $I=|E(\rho,\varphi,20z_0)|^2$．由图 2 知，类似于零阶贝塞尔-高斯光束，当 f、f_β 参数很小时傍轴近似成立，但当 f 或 f_β 较大时必须用式(5)描述非傍轴贝塞尔-高斯光束在自由空间的传输行为．

3 结论

本文推导出了非傍轴贝塞尔-高斯光束在自由空间解析的传输方程．非傍轴贝塞尔光束，高斯光束，非傍轴贝塞尔-高斯光束轴上和远场光场以及傍轴贝塞尔-高斯光束的解析传输公式都作为一般公式的特例得出．数值计算和分析说明，当 f 参数和 $f\beta$ 参数很小时，所得结果与傍轴情况一致．当 f 参数较大时，所得结果与傍轴情况有显著差异．与微扰级数解比较，本文所得解析公式形式简单，便于应用，并且是收敛的．当 $R>>\lambda$ 时，所得解严格描述了非傍轴贝塞尔-高斯光束在自由空间的传输行为.

参考文献

1 Gori F, Guattari G. Bessel-Gauss beams. *Opt Commun*, 1987, **64**(6): 491～495

2 Overfelt P L. Bessel-Gauss pulses. *Phys Rev A*, 1991, **44**(6): 3941～3947

3 Porras M A, Borghi R, Santarsiero M. Suppression of dispersive broading of light pulses with Bessel-Gauss beams. *Opt Commun*, 2002, **206**(4): 235～241

4 叶青，沈常宇，钮月萍，等. 空间非傍轴光束在非线性介子中的相互作用. 光子学报. 2003, **32**(4): 433～436
Ye Q, Shen C Y, Niu Y P, *et al*. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(4): 433～436

5 郑一周，胡巍，陆大全，等. 小尺度自聚焦理论的非傍轴修正. 光子学报. 2003, **32**(11): 1329～1331
Zheng Y Z, Hu W, Lu D Q, *et al*. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(11): 1329～1331

6 康小平，吕百达. 非傍轴平顶高斯光束因子两种定义的比较研究. 光子学报. (已付印)
Kang X P, Lü B D. *Acta Photonica Sinica* (in the press)

7 Borghi R, Santarsiero M, Porras M A. Nonparaxial Bessel-Gauss beams. *J Opt Soc Am A*, 2001, **18**(7): 1618～1626

8 Chen C G, Konkola P T, Ferrera J, *et al*. Analyses of vector Gaussian beam propagation and the validity of paraxial and spherical approximations. *J Opt Soc Am A*, 2002, **19**(2): 404～412

9 段开椋，吕百达. 非傍轴光束级数修正解的有效性. 中国激光. 2004, **31**(4): 432～436
Duan K L, Lü B D. *Chinese Journal of Lasers*, 2004, **31**(4): 432～436

10 Luneberg R K. Mathematical Theory of Optics. Berkeley. California: University of California Press, 1966

11 Duan K L, Lü B D. Partially coherent nonparaxial beams. *Opt Lett*, 2004, **29**(8): 800～802

12 Gradsbteyn I S, Ryzbik L M. Table of integrals. Series and products. New York: Academic Press, 1980

13 Durnin J. Exact solutions for nondiffracting beams. Ⅰ. The scalar theory. *J Opt Soc Am A*, 1987, **4**(4): 651～654

14 Nemoto S. Nonparaxial Gaussian beams. *Appl Opt*, 1990, **29**(13): 1940～1946

15 Duan K L, Lü B D. Propagation of hermite and laguerre Gaussian beams beyond the paraxial approximation. *J Opt Soc Am A*, 2005, **22**(9) (in the press)

16 Duan K L, Lü B D. Propagation properties of vectorial elliptical Gaussian beams beyond the paraxial approximation. *Opt & Laser Tech*, 2004, **36**(6): 489～496

Propagation of nonparaxial Bessel-Gaussian beams in free space

Gao Zenghui[1,2], Lü Baida[2]

1 *Institute of Optoelectronic Information, Yibin University, Yibin* 644007

2 *Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu* 610064

Received date: 2005-06-13

Abstract Stating from the Rayleigh-Sommerfeld diffraction integral, the closed-form propagation expression for nonparaxial Bessel-Gaussian beams of any order in free space was derived. The propagation equations of nonparaxial Bessel and Gaussian beams were deduced as special case of our general result. Physical analysis and numerical calculations show that, if the transversal scale of Gaussian and Bessel parts are comparable with or less than the wavelength, the nonparaxial approach should be used.

Keywords Laser optics; Nonparaxial Bessel-Gaussian beam; Free-space propagation; f and f_β parameters

Gao Zenghui was born in Sichuan, in 1966. He received the B. S. degree in physics from Sichuan Normal University, in 1989 and M. Eng. Degree in electronic technology from the Chongqing University, in 1996. Currently, he is an associate professor of Yibin University, and working toward the Ph. D. degree in optics at Sichuan University. His research interests include the laser propagation and transformation.