

# YG 算法设计分数傅里叶变换衍射光学光束整形器件\*

谭峭峰<sup>1</sup> 魏晓峰<sup>2</sup> 向勇<sup>2</sup> 严瑛白<sup>1</sup> 金国藩<sup>1</sup>

(1 清华大学精密测试技术与仪器国家重点实验室, 北京 100084)

(2 中国工程物理研究院 激光聚变中心, 绵阳 621900)

**摘要** 针对分数傅里叶变换衍射光学光束整形器件, 比较了按离散点与按菲涅耳积分计算得到的变换矩阵间的差距, 从中分析得出按离散点计算的变换矩阵引入的离散化误差与分数傅里叶变换系统参数的关系. 模拟计算结果表明, 该离散化误差不能忽略. 为了在输出面上得到真实的光强分布, 应采用菲涅耳积分计算其变换矩阵. 鉴于该变换矩阵非么正, 本文利用 YG 算法进行了光束整形器件的设计.

**关键词** 分数傅里叶变换; YG 算法; 衍射光学器件; 光束整形

**中图分类号** O436.1 **文献标识码** A

## 0 引言

光束整形有着广泛的应用前景, 例如在半导体处理过程中, 采用波前平整的光束可以显著提高激光的能量利用率; 在原子光学中, 需要特定的激光光斑, 实现激光冷却、激光捕获、原子囚禁等功能; 在惯性约束聚变中, 要求在靶场获得束匀滑光斑; 等等. 分数傅里叶变换<sup>[1~3]</sup> 由于其特殊的变换性质与简单灵活的光学实现方法, 已用于实现光束整形<sup>[4~7]</sup>.

在计算过程中, 通常对分数傅里叶变换中的球面波位相因子直接离散化, 然后利用快速傅里叶变换进行计算<sup>[8]</sup>, 但这必然导致在计算输出面上的光强分布时, 引入离散化误差. 为此, 本文对球面波因子直接离散化计算得到的变换矩阵与按菲涅耳积分计算得到的变换矩阵进行了比较, 定性分析了离散化误差大小与光学系统参数的关系. 模拟计算结果表明, 该误差是不可忽略的. 因此, 为了在输出面上获得真实的光强分布, 应采用菲涅耳积分计算其变换矩阵, 而这个变换矩阵是非么正的. 鉴于 YG 算法<sup>[9,10]</sup> 适用于非么正变换系统衍射光学光束整形器件的设计, 因此, 本文利用 YG 算法进行了光束整形器件的设计.

## 1 计算公式

为简单起见, 本文仅考虑一维情形. 分数傅里叶变换定义为

$$U_2(x_2) = A \int U_1(x_1) \exp \left[ i\pi \frac{x_1^2 + x_2^2}{\lambda \tilde{f} \tan \alpha} - \right]$$

$$i2\pi \frac{x_1 x_2}{\lambda \tilde{f} \sin \alpha} \Big] dx_1 \quad (1)$$

式中  $U_1, U_2$  为输入面、输出面上的光场分布,  $\lambda$  为工作波长,  $\alpha = p \times \pi/2$ ,  $p$  为分数傅里叶变换的阶数,  $A$  为一与  $\alpha$  有关的常数,  $\tilde{f} = F \sin \alpha$ ,  $F$  为透镜焦距.

口径为  $D$  的衍射光学器件放置在输入面, 并等分为  $N$  单元多台阶位相结构, 设第  $j$  个单元的位相值为  $\varphi_j$ , 在平面波入射时, 不考虑位相因子与常数项, 输出面光场分布为

$$U_2(x_2) = \sum_{j=1}^N \exp(i\varphi_j) \int_{x_{1,j}}^{x_{1,j+1}} \exp \left[ i\pi \frac{x_1^2}{\lambda \tilde{f} \tan \alpha} - \right. \\ \left. 2i\pi \frac{x_1 x_2}{\lambda \tilde{f} \sin \alpha} \right] dx_1 = \sum_{j=1}^N \exp(i\varphi_j) G(x_2, x_1) \quad (2)$$

式中,  $x_{1,j} = (j - N/2 - 1)D/N$ ,  $x_{1,j+1} = (j - N/2) \cdot D/N$

$$G(x_2, x_1) = \int_{x_{1,j}}^{x_{1,j+1}} \exp \left[ i\pi \frac{x_1^2}{\lambda \tilde{f} \tan \alpha} - \right. \\ \left. i2\pi \frac{x_1 x_2}{\lambda \tilde{f} \sin \alpha} \right] dx_1 \quad (3)$$

通常情况下, 选取一组特定的采样点对  $G(x_2, x_1)$  中的球面波因子直接离散化, 例如可选取  $x_{1,j}$ , 即

$$G(x_2, x_1) \approx G(x_2, x_{1,j}) = \int_{x_{1,j}}^{x_{1,j+1}} \exp \left[ i\pi \frac{x_1^2}{\lambda \tilde{f} \tan \alpha} - \right. \\ \left. i2\pi \frac{x_{1,j} x_2}{\lambda \tilde{f} \sin \alpha} \right] dx_1 = \exp \left[ i\pi \frac{x_{1,j}^2}{\lambda \tilde{f} \tan \alpha} - \right. \\ \left. i2\pi \frac{x_{1,j} x_2}{\lambda \tilde{f} \sin \alpha} \right] D/N \quad (4)$$

此时, 输出面光场分布的离散化误差可由  $G(x_2, x_1)$  与  $G(x_2, x_{1,j})$  的差距来描述

$$\Delta = \int_{x_{1,j}}^{x_{1,j+1}} \left\{ \exp \left[ i\pi \frac{x_1^2}{\lambda \tilde{f} \tan \alpha} - i2\pi \frac{x_1 x_2}{\lambda \tilde{f} \sin \alpha} \right] - \right.$$

\*国家自然科学基金委员会-中国工程物理研究院联合基金 (10276021) 资助

Tel: 010-62781187 Email: tanqf@mail.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2004-09-23

$$\exp \left[ i\pi \frac{x_{1,j}^2}{\lambda \tilde{f} \tan \alpha} - i2\pi \frac{x_{1,j}x_2}{\lambda \tilde{f} \sin \alpha} \right] dx_1 \quad (5)$$

不失一般性,在此仅考虑  $p \in (0,1)$ . 定性分析可知,  $p$  越大( $\tan \alpha$  越大),入射口径  $D$  越小,工作波长  $\lambda$  越大, $\tilde{f}$  越大, $N$  越大,引入的离散化误差越小;反之,离散化误差越大. 根据采样定理,对不同的分数阶  $p$ ,可选取的最小  $N$  是不同的. 但后续计算结果表明,即使  $N$  的选取满足采样定理,该离散化误差仍是不能忽略的.

为得到真实的输出面光场分布,变换核函数应按式(3)进行计算,进一步推导可得

$$G(x_2, x_1) = \int_{x_{1,j}}^{x_{1,j+1}} \exp \left[ i\pi \frac{x_1^2}{\lambda \tilde{f} \tan \alpha} - i2\pi \frac{x_1 x_2}{\lambda \tilde{f} \sin \alpha} \right] dx_1 = B \exp \left( -i \frac{\pi x_2^2}{\lambda \tilde{f} \tan \alpha} \right) (C(x'_{j+1}) - C(x'_j) + i(S(x'_{j+1}) - S(x'_j))) \quad (6)$$

$$\text{式中 } x'_j = (x_{1,j} - \frac{x_2}{\cos \alpha}) \sqrt{\frac{2}{\lambda \tilde{f} \tan \alpha}}, x'_{j+1} = (x_{1,j+1} - \frac{x_2}{\cos \alpha}) \sqrt{\frac{2}{\lambda \tilde{f} \tan \alpha}}, B = \sqrt{\lambda \tilde{f} \tan \alpha / 2}, \text{ 且 } C(x) =$$

$$\int_0^x \cos \frac{\pi z^2}{2} dz, S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi z^2}{2} dz \text{ 为菲涅耳积分.}$$

## 2 模拟计算结果

选取不同的分数阶  $p$  进行分数傅里叶变换衍射光学光束整形器件的设计. 光学系统参数  $\lambda$ 、 $F$ 、 $D$  选为  $1.053 \mu\text{m}$ 、 $600 \text{ mm}$ 、 $10 \text{ mm}$ ,分数阶  $p$  分别为  $0.1$ 、 $0.9$ ,所需均匀光斑大小分别为  $70 \mu\text{m}$ 、 $1.5 \text{ mm}$ .

按照传统采样定理,输出面上的采样间隔一般选取为

$$\Delta x_2 = \sin \alpha \frac{\lambda \tilde{f}}{D} \quad (7)$$

当分数阶为  $0.1$  时, $N$  取  $1024$  以满足采样定理. 利用 GS 算法的 ST 改进算法<sup>[11]</sup>,设计如图 1(a)、(b),光能利用率  $\eta$  与顶部光强均方根误差 rms 分别为  $98.9\%$ 、 $7.4\%$ . 保持位相分布不变,变换核函数选为式(3),计算出的输出面光强分布如图 1(c),  $\eta$  与 rms 分别为  $97.0\%$ 、 $292.7\%$ ,离预期的光束整形相距甚远.

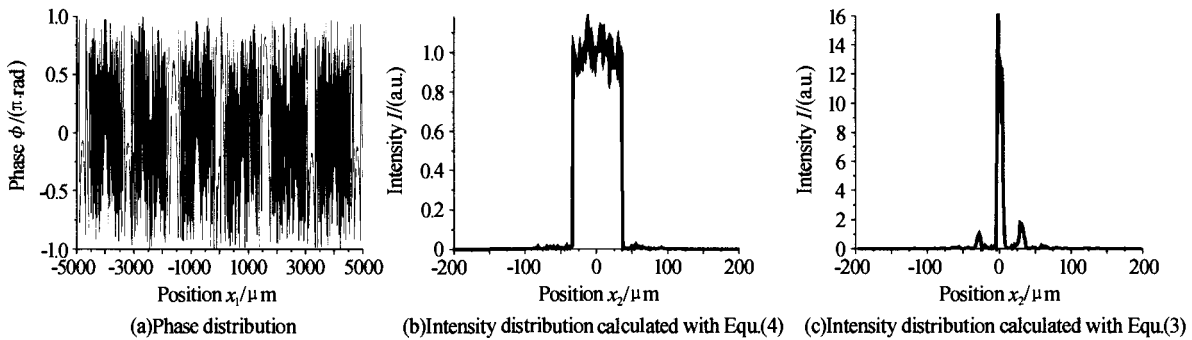


图 1 GS 算法的 ST 改进算法设计结果

Fig. 1 The designed results with ST improvement of GS algorithm

当分数阶为  $0.9$  时, $N$  取  $256$ ,同样满足采样定理. 利用 YG 算法的 ST 改进算法<sup>[12]</sup>,设计如图 2(a)、(b),  $\eta$  与 rms 分别为  $95.9\%$ 、 $0.5\%$ . 同样保持

位相分布不变,变换核函数选为式(3),计算出的输出面光强分布如图 2(c),其  $\eta$  与 rms 分别为  $95.5\%$ 、 $5.5\%$ .

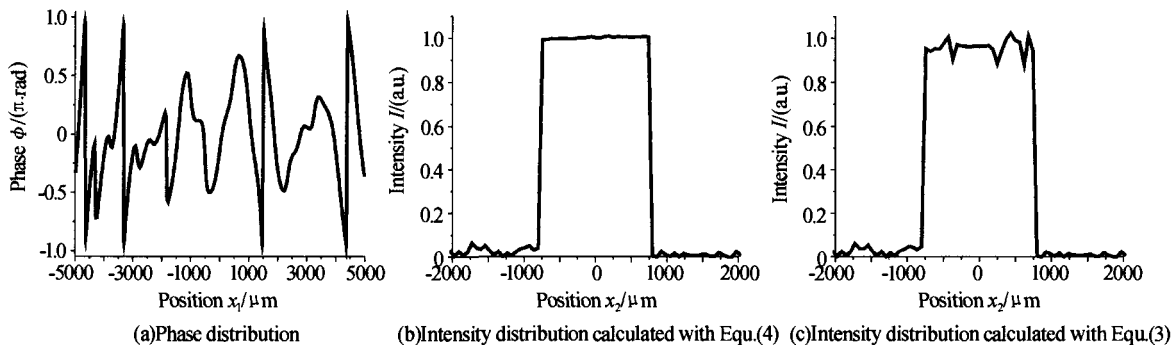


图 2 YG 算法的 ST 改进算法设计结果

Fig. 2 The designed results with ST improvement of YG algorithm

从图1、2可知,离散化误差不能忽略,特别是在分数阶比较小的时候.因此,为获得真实的输出面光强分布,在设计中应采用式(3)而非式(4)来进行输出光场计算.

另外,为在输出面上获得真实的光束整形,应对其进行精细化设计,输出面上的采样间隔应选取为<sup>[13]</sup>

$$\Delta x_2 = \sin \alpha \frac{\lambda \tilde{f}}{2D} \quad (8)$$

当采样间隔由式(8)给出,变换核函数由式(3)给出时, $G(x_2, x_1)$ 是非幺正的.鉴于YG算法适用于非幺正变换系统,在此采用YG算法的ST改进算法来进行分数傅里叶变换衍射光学光束整形器件的设计.需强调的是,此时采样点数 $N$ 的选取不再受到采样定理的限制,当然, $N$ 必须足够大以保证足够多的设计自由度来获得较好的设计性能.

当分数阶为0.1时, $N$ 取512,设计如图3(a)、(b), $\eta$ 与rms分别为98.0%、15.1%;当分数阶为0.9时, $N$ 取256,设计如图4(a)、(b), $\eta$ 与rms分别为93.7%、22.9%;虽比不上用搜索算法得到的设计结果<sup>[13]</sup>,但由于采用的是迭代算法,优化时间相对较短,可作为搜索算法的初始点,进行后续优化处理.另外,随着分数阶的变大,变换矩阵越来越偏离幺正矩阵,设计结果逐渐变坏.

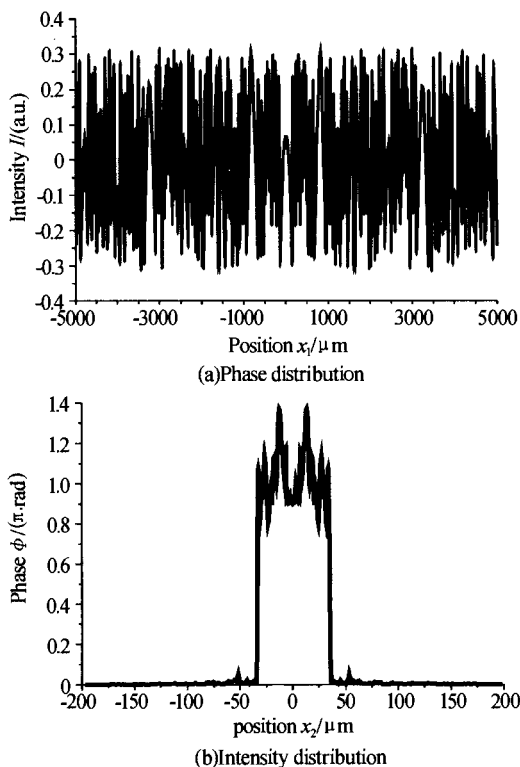


图3  $p=0.1$  时的设计结果

Fig. 3 The designed results when  $p=0.1$

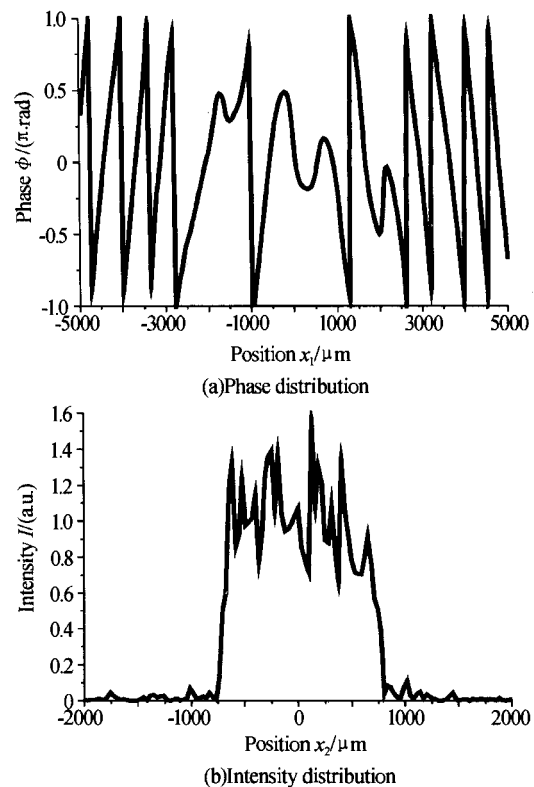


图4  $p=0.9$  时的设计结果

Fig. 4 The designed results when  $p=0.9$

### 3 结论

针对分数傅里叶变换衍射光学光束整形器件,分析了按离散点计算得到的变换矩阵与按菲涅耳积分计算得到的变换矩阵间的差距,并由此得出输出面上的光强分布的离散化误差与系统参数间的关系.模拟计算结果表明,即使采样点数 $N$ 的选取符合采样定理,该离散化误差仍然不能忽略.因此,为了在输出面上获得真实的光强分布,应采用菲涅耳积分计算其变换矩阵,而这个变换矩阵是非幺正的.鉴于YG算法适用于非幺正变换系统衍射光学光束整形器件的设计,本文最后采用YG算法的ST改进算法进行了分数傅里叶变换衍射光学光束整形器件的精细化设计,设计结果虽比不上用搜索算法得到的结果,但由于YG算法是一种迭代算法,优化时间相对较短,设计结果可作为搜索算法的初始解,作后续优化.如何改进YG算法,获得更好的设计性能,有待进一步的研究.

#### 参考文献

- 1 Mendlovic D, Ozaktas H M. Fractional fourier transforms and their optical implementation; I. *J Opt Soc Am A*, 1993, **10**(9):1875~1881
- 2 Ozaktas H M, Mendlovic D. Fractional fourier transforms and their optical implementation; II. *J Opt Soc Am A*, 1993, **10**(12):2522~2531

- 3 Pellat-Finet P. Fresnel diffraction and the fractional-order Fourier transform. *Opt Lett*, 1994, **19**(18):1388~1390
- 4 Zalevsky Z, Mendlovic D, Dorsch R G, Gerchberg-Saxton algorithm applied in the fractional Fourier or the Fresnel domain. *Opt Lett*, 1996, **21**(12):842~844
- 5 Feng D, Yan Y B, Lu S, *et al.* Designing diffractive phase plates for beam smoothing in the fractional Fourier domain. *Journal of Modern Optics*, 2002, **49**(7):1125~1133
- 6 Cong W X, Chen N X, Gu B Y. Beam shaping and its solution with the use of an optimization method. *Appl Opt*, 1998, **37**(20):4500~4503
- 7 Zhang Y, Dong B Z, Gu B Y, *et al.* Beam shaping in the fractional Fourier transform domain. *J Opt Soc Am A*, 1998, **15**(5):1114~1120
- 8 冯迪, 严瑛白, 金国藩, 等. 求解分数傅里叶变换衍射积分的一种快速算法. *光子学报*, 2003, **32**(7):885~888  
Feng D, Yan Y B, Jin G F, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(7):885~888
- 9 霍裕平, 杨国桢, 顾本源. 用光学方法实现么正变换及一般线性变换(II)——用迭代法求解. *物理学报*, 1976, **25**(1):31~46  
Huo Y P, Yang G Z, Gu B Y. *Acta Physica Sinica*, 1976, **25**(1):31~46
- 10 Yang G Z, Wang L, Dong B Z, *et al.* On the amplitude-phase retrieval problem in an optical system involving non-unitary transformation. *Optik*, 1987, **75**(2):68~74
- 11 Sang T, Liao J H, Lu Z W, *et al.* A new Fourier iterative algorithm for the design of phase-only diffractive optical element used in laser beam shaping. *Chinese J lasers*, 1996, **B5**(5):451~460
- 12 田克汉, 严瑛白, 谭峭峰. YG 算法设计衍射光学光束整形器件的两种改进. *中国激光*, 2002, **A29**(4):307~312  
Tian K H, Yan Y B, Tan Q F. *Chinese J Lasers*, 2002, **A29**(4):307~312
- 13 谭峭峰, 严瑛白, 金国藩, 等. 分数傅里叶变换衍射光学束匀滑器件的精细化设计. *中国激光*, 2003, **A30**(7):609~613  
Tan Q F, Yan Y B, Jin G F, *et al.* *Chinese J Lasers*, 2003, **A30**(7):609~613

## Diffractive Optical Element Designed by YG Algorithm for Beam Shaping in Fractional Fourier Transform Domain

Tan Qiaofeng<sup>1</sup>, Wei Xiaofeng<sup>2</sup>, Xiang Yong<sup>2</sup>, Yan Yingbai<sup>1</sup>, Jin Guofan<sup>1</sup>

<sup>1</sup> State Key Laboratory of Precision Measurement Technology and Instruments, Tsinghua University, Beijing 100084

<sup>2</sup> Research Center of Laser Fusion, CAEP, Mianyang 621900

Received date: 2004-09-23

**Abstract** For the diffractive optical element (DOE) realizing beam shaping in the fractional Fourier transform domain, the transform matrix calculated by the discrete sampling points was compared with that calculated by the Fresnel integral, and the discretization error of the intensity distribution on the output plane was qualitatively obtained. Simulated results show this discretization error cannot be neglected. Therefore the Fresnel integral should be used to obtain the true intensity distribution on the output plane. Because the transform matrix calculated with the Fresnel integral was non-unitary, YG algorithm was used to design the DOE realizing beam shaping in the fractional Fourier transform domain in this paper.

**Keywords** Fractional Fourier transform; YG algorithm; Diffractive optical element; Beam shaping



**Tan Qiaofeng** received his B. S. degree and Ph. D. degree in Optical Engineering from Tsinghua University in 1996 and 2000, respectively. Now he is an associate professor in the Department of Precision Instruments, Tsinghua University. His main research interests include diffractive optics and optical information processing.