

# 少数投影局部基函数展开层析重建

戴 云<sup>1,2</sup> 张雨东<sup>1</sup> 李恩德<sup>1</sup> 杨泽平<sup>1</sup>

(1 中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

(2 中国科学院研究生院, 北京 100039)

**摘 要** 对 6 种常见的基函数展开通过计算机仿真分析、比较其重建效能。结果表明, 对于少数投影计算机层析重建, 采用连续可导的局部基函数展开比采用非连续可导的脉冲基函数展开具有更高的重建精度。而对于各种连续可导的基函数, 其重建精度大致相当, 基函数的选取应重点考虑其投影矩阵计算的难易程度。

**关键词** 信息光学; 层析重建; 基函数; 投影

**中图分类号** TP391 **文献标识码** A

## 0 引言

光学计算机层析技术(OCT)是计算机层析技术(CT)的分支,它在流场研究<sup>[1]</sup>、温度场测量<sup>[2,3]</sup>、等离子体诊断<sup>[4]</sup>等方面显示出极大的优越性。计算机层析重建迭代算法将图像由一组基函数的展开,正如函数的泰勒级数展开一样,将投影变换理解成一方程组描述,即投影=图像矩阵×投影矩阵,将迭代重建转化为方程组的求解问题<sup>[5]</sup>。将图像展开的基函数的选取多种多样,总的可以分成全局基函数展开和局部基函数展开两种形式。全局基函数展开中基函数的定义域为整个图像区域,投影矩阵非零元素多,重建中投影和反投影的计算费时,重建效率不高。局部基函数展开中基函数的定义域为图像局部区域,投影矩阵是零元素多的稀疏矩阵,重建中投影和反投影的计算量小,重建效率高。经典的代数重建算法<sup>[6]</sup>(ART)将图像由定义在各网格内的脉冲函数(局部基函数)展开,投影矩阵计算即简化为各网格截得的投影射线长度。由于基函数选择过于简化,使得重建噪声大、精度不高。

针对基于迭代的局部基函数展开计算机层析重建方法,选取 6 种不同的基函数对重建模型展开,选用乘法代数重建算法<sup>[7]</sup>(MART)仿真分析了各种基函数展开下的重建性能。分析结果表明,不同的基函数展开具有不同的重建精度,采用连续基函数展开的重建效果要明显好于局部脉冲基函数展开。首先简要介绍局部基函数展开计算机层析重建方法,再给出仿真结果,最后得出相关结论。

## 1 局部基函数展开计算机层析重建方法

按照数学理论,图像函数  $f(x, y)$  可以用基函数的加权和来表示

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} b_{ij}(x, y) \quad (1)$$

$b_{ij}(x, y)$  为以图像第  $ij$  个象素为中心的基函数,图像大小为  $N \times N$ ,  $b_{ij}(x, y)$  在有限区域上定义,如图 1.  $c_{ij}$  为基函数系数。基函数的定义域为图

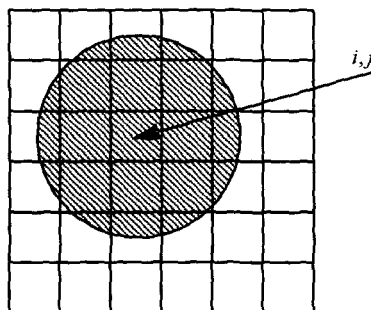


图 1 基函数定义域(阴影区)

Fig. 1 The support of basis function(shadow zone)

像局部区域,所以称之为局部基函数展开。对式(1)两边进行投影变换有

$$P(\theta, \rho) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} a_{ij}(\theta, \rho) \quad (2)$$

$P(\theta, \rho)$ ,  $a_{ij}(\theta, \rho)$  分别为图像函数和基函数在  $\theta$  方向上的投影。从图像展开的数学表达上来看,基函数应与原函数具有相同的特性,原函数连续且具有高阶导数则基函数也应连续且高阶可导。实际中,由于图像是连续光滑的,存在一阶甚至高阶导数,基函数也应连续且可导。因此,根据重建图像的性质应合理选取基函数,不同的基函数展开具有不同的重建效果。考虑到计算量的问题,经典的代数层析重建中均是采用脉冲基函数将待重建图像展开,投影

矩阵元素的值即简化为各网格截得的投影射线长度。投影矩阵的计算变得相当容易,但是由于脉冲基函数(不连续、不可导)与图像特性不一致,使得重建噪声大,精度低。

为了分析各种不同基函数对层析重建精度的影响,仿真分析了6种基函数展开下的重建效果。基函数选取包括有无穷阶导数的一阶 Cosine 基函数、高斯基函数及汉宁窗基函数;具有有限阶导数的立方 B 样条基函数、球形基函数;不可导的脉冲矩函数。为了便于计算,各连续基函数均在圆形区域中定义,定义域半径为 2 个网格宽度。各基函数的数学表达式为:

1.1 1 阶 Cosine 基函数

$$f_1(x,y) = \begin{cases} [(1 + \cos(\pi x/T)) * (1 + \cos(\pi y/T))] / [(4T^2)] & (x^2 + y^2 \geq T^2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $T=2w$  ( $w$  为网格宽度)。

1.2 高斯基函数

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-x^2 - y^2}{0.7^2}\right) & (x^2 + y^2 \leq r^2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $r=2w$ 。

1.3 立方 B 样条基函数

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{(2\Delta - |x'|)^3 - 4(\Delta - |x'|)^3}{4\Delta^3} & (x^2 + y^2 \leq \Delta^2) \\ \frac{(2\Delta - |y'|)^3 - 4(\Delta - |y'|)^3}{4\Delta^3} & \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $\Delta=2w$ 。

1.4 球形基函数

$$f_4(x,y) = \begin{cases} (1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2})^2 & (x^2 + y^2 \leq R^2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $R=2w$ 。

1.5 汉宁窗基函数

$$f_5(x,y) = \begin{cases} 0.25 * (1 + \cos(4x)) * (1 + \cos(4y)) & (x^2 + y^2 \leq r^2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $r=2w$ 。

1.6 脉冲矩函数

$$f_6(x,y) = \begin{cases} 1 & (-d < x, y < d) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $2d=w$ 。

各基函数的截面形状如图 2。

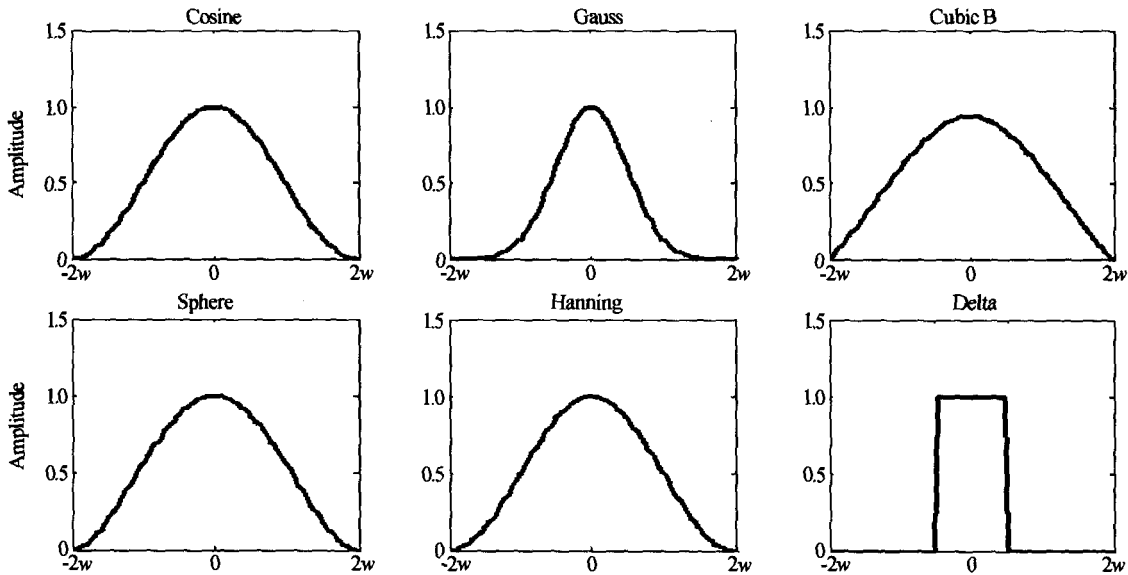


图 2 各基函数的截面形状( $w$  为网格宽度)  
 Fig. 2 The intersection graph of each basis functions ( $w$  is the width of a grid)

2 数值仿真

对于以上介绍的 6 种基函数,仿真分析它们的重建性能。模型选用双高斯函数,其数学表达式为

$$f(x,y) = \exp\left(\frac{-(x+1.8)^2 - (y+1.8)^2}{3}\right) +$$

$$\exp\left(\frac{-(x-1.8)^2 - (y-1.8)^2}{3}\right) \quad (9)$$

图 3 给出了仿真模型。采用高斯积分计算模型和各基函数展开下的投影矩阵。仿真参数为:重建区域大小  $12 \times 12$ , 图像大小  $10 \times 10$ , 将重建区域划分为  $30 \times 30$  网格, 8 个投影方向:  $10^\circ, 40^\circ, 80^\circ, 110^\circ,$

140°, 170°, 每个方向上的投影射线数为 37, 网格宽度  $w=12/30=0.4$ .

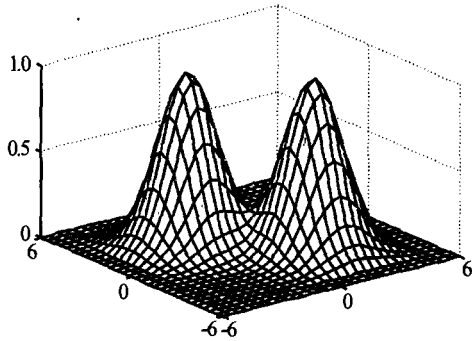


图 3 仿真模型  
Fig. 3 The simulation model

仿真对无噪声和信噪比为 30 dB 两种情况下各基函数展开的重建性能进行比较. 信噪比定义为

$$S/N = 10 \log \left[ \frac{\sum_{i=1}^K p_i^2}{\sum_{i=1}^K n_i^2} \right] \quad (10)$$

式(10)代表的是信号功率与噪声功率的比值. 式中  $p_i, n_i$  分别代表第  $i$  条射线的投影值及其噪声大小,  $K$  为投影总数. 噪声  $n_i$  为均值和方差均等于  $p_i$  的泊松分布.

对 6 种基函数展开层析重建, 采用相同的重建算法—乘法代数重建算法 (MART), 相同的迭代次数 30 次, 定义层析重建的 RMS 误差和平均误差为

$$RMS = \left[ \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f_{ij} - \hat{f}_{ij})^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f_{ij} - \bar{f})^2} \right]^{0.5} \quad (11)$$

$$E_{av} = \left( \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |f_{ij} - \hat{f}_{ij}| \right) / |f_{max}| \quad (12)$$

### 2.1 无噪声下基函数展开层析重建结果

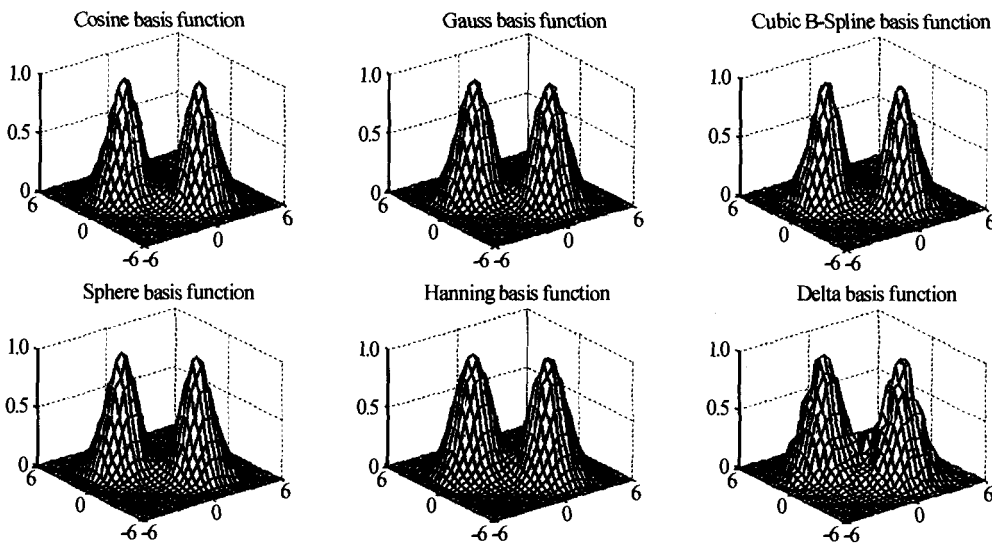


图 4 无噪声下 6 种基函数展开的重建结果  
Fig. 4 The reconstructions basing 6 basis functions decomposition without noise

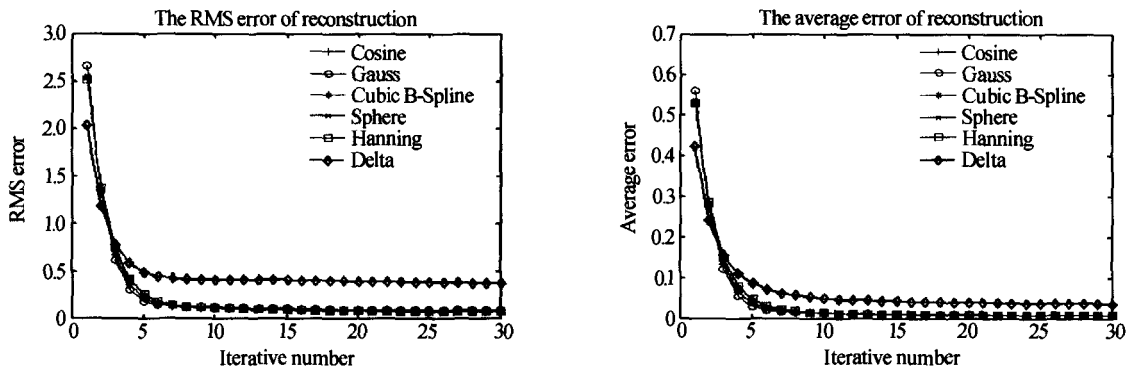


图 5 无噪声下 6 种基函数展开重建的 RMS 误差和平均误差  
Fig. 5 The RMS and average error basing 6 basis functions decomposition without noise

### 2.2 30 dB 噪声下基函数展开层析重建结果

表 1 是无噪声和 30 dB 噪声下各种基函数展开层析重建的 RMS 误差和平均误差. 从表中可以看

出, 连续基函数展开重建精度明显好于脉冲基函数展开, 各种连续基函数展开具有不同的重建效果, 但差别不是很大.

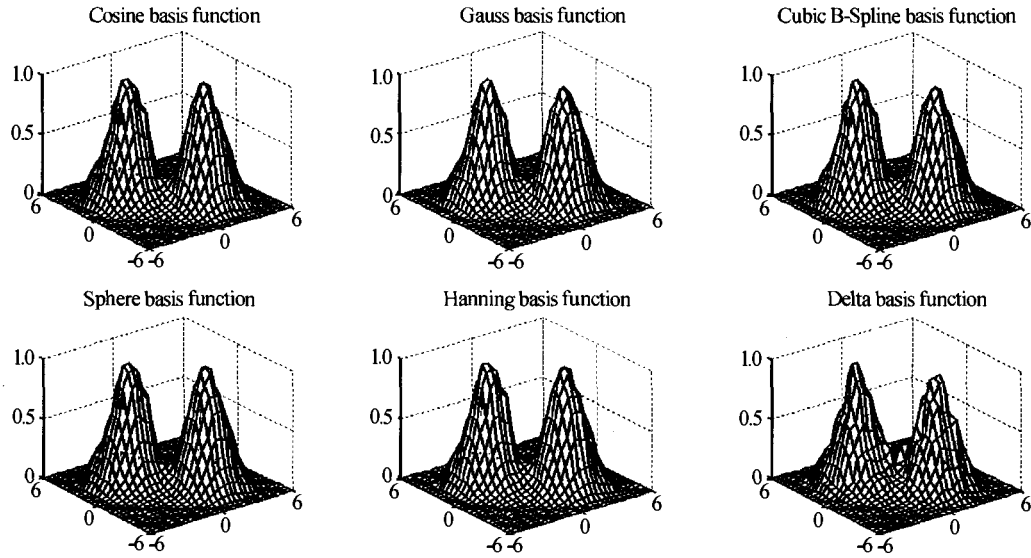


图 6 30 dB 噪声下 6 种基函数展开的重建结果  
Fig. 6 The reconstructions basing 6 basis functions decomposition with 30 dB noise

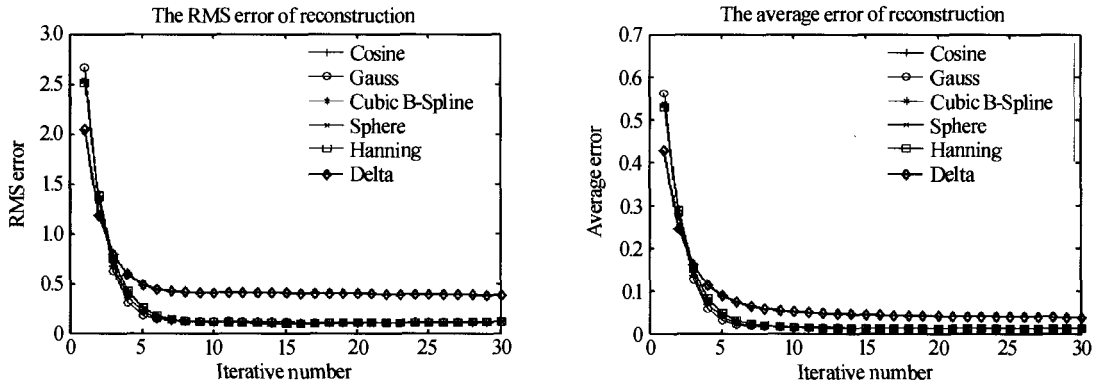


图 7 30 dB 噪声下 6 种基函数展开重建的 RMS 误差和平均误差  
Fig. 7 The RMS and average error basing 6 basis functions decomposition with 30 dB noise

表 1 6 种基函数展开层析重建的 RMS 误差和平均误差

基函数	无噪声重建		噪声重建	
	RMS	e_av	RMS	e_av
Cosine	0.0721	0.0089	0.1041	0.01276
Gauss	0.0880	0.0098	0.1123	0.01359
Cubic B-Spline	0.0735	0.0089	0.1032	0.01263
Sphere	0.0726	0.0089	0.1030	0.01263
Hanning	0.0722	0.0089	0.1044	0.01280
Delta	0.3742	0.0367	0.3848	0.03860

### 3 结论

对于少数投影计算机层析重建,采用连续可导的局部基函数对图像进行展开比采用非连续可导的脉冲基函数展开具有更高的重建精度.对于连续可导的基函数选取可以通过仿真进行比较,就本文中所采用的 5 种连续基函数来看,其重建精度大致相当,基函数的选取应重点考虑投影矩阵计算的难易程度.

另外,本文各基函数的定义域均为半径为 2 个网格宽度的圆域,局部基函数定义域的大小一方面

关系到投影矩阵中非零元素的多少,进一步说关系到迭代重建的时间消耗;另一方面,局部基函数定义域的大小对重建精度有一定的影响.发现,对于文中所述的 5 种局部基函数,当定义域逐步增大到整个图像区域时,其重建精度反而下降,说明文中的 5 种基函数形式局部拟和比全域拟和具有更高的精度.

### 参考文献

- 李田泽,申晋,李秀梅.使用莫尔层析技术诊断 3-D 气体密度场.光子学报,2003,32(8):1022~1024  
Li T Z, Shen J, Li X M. *Acta Photonica Sinica*, 2003, 32 (8):1022~1024
- 高益庆,何兴道,龚勇清.用投影空间重投影重建迭代法重建电弧温度场.光子学报,2001,30(2):196~200  
Gao Y Q, He X D, Gong Y Q. *Acta Photonica Sinica*, 2001, 30(2):196~200
- 万雄,陶建文,于盛林,等.扇束辐射层析技术重建三维流场.光子学报,2004,33(2):252~256  
Wan X, Tao J W, Yu S L, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2004, 33(2):252~256
- 高益庆.用莫尔计算机层析技术诊断三维电弧温度场.

- 光学学报, 1998, **18**(3): 376~380
- Gao Y Q. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(3): 376~380
- 5 赵振理, 马臻, 李英才. 共轭梯度算法在画幅式层析成像光谱仪中的应用. *光子学报*, 2004, **33**(6): 685~688
- Zhao Z L, Ma Z, Li Y C. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(6): 685~688
- 6 Andersen A H. Algebraic reconstruction in CT from limited views. *IEEE Trans Med Imaging*, 1989, **8**(1): 50~55
- 7 Dean Verhoeven. Limited-data computed tomography algorithms for the physical sciences. *Appl Opt*, 1993, **32**(20): 3736~3754

## Tomographic Reconstruction from Fewer Views by Local Basis Function Approach

Dai Yun<sup>1,2</sup>, Zhang Yudong<sup>1</sup>, Li Ende<sup>1</sup>, Yang Zeping<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute of Optics & Electronics, the Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209

<sup>2</sup> Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039

Received date: 2004-09-02

**Abstract** The reconstructions based on 6 kinds of basis functions were compared by computer simulation. The result indicates that the reconstruction based on differentiable basis function is better than that based on non-differentiable basis function and the reconstructions based on different differentiable basis function is approximately the same. The computation of projection matrix is mostly considered for the choice of basis functions.

**Keywords** Information optics; Tomographic reconstruction; Reconstruction; Basis function; Projection



**Dai Yun** was born in Sichuan province of China in 1976. He received his B. S. degree in 1999 and his Master's Degree in 2002 in mechanics and electronics engineering from Xi'an University of Technology. Now he is a doctoral student at Institute of Optics and Electronics, the Chinese Academy of Science. His research focuses on optical computerized tomography, image processing and wave-front sensing.