

计算机制彩虹全息图的新算法*

王 辉¹ 李 勇¹ 金洪震¹ 蔡晓鸥² 毛和法¹

(1 浙江师范大学信息光学研究所, 金华 321004)

(2 温州师范学院物理系, 温州 325003)

摘 要 提出利用查表方法进行数字彩虹全息的计算方法. 根据彩虹全息的基元全息图为线全息图的特点, 找出物点与其线全息图的一一对应关系, 建立空间点阵物点的线全息物光分布数据表. 在对实际物体进行计算时, 根据物点的位置, 在数据表中找到与之对应的物光分布, 并将这些分布进行叠加, 从而形成实际物体被狭缝限制的物光分布, 最后引入参考光计算其彩虹全息图. 本方法充分利用了线全息图的性质, 使得计算量大大减小, 同时提高了计算速度.

关键词 计算机制全息图; 彩虹全息图; 查表法

中图分类号 O438.1 **文献标识码** A

0 引言

随着计算机技术及其外围设施的进步, 利用计算机制全息进行三维显示的研究近年来取得了较大的进展^[1~3]. 彩虹全息的发明为白光全息显示提供了一个非常好的实用技术^[4], 目前, 除像面全息以外, 平面全息的三维显示几乎都是利用彩虹全息技术. 因而若要真正实现实用计算机制全息三维显示必须进行彩虹全息的研究. 最近, 计算机制彩虹全息的研究越来越引起人们的重视, 并且也取得了一定的成果^[5,6]. 对于实际物体的全息显示, 要求物体在人眼的分辨率极限情况下看起来应该是连续的, 同时要有足够的视角来保证视差效果以产生立体感. 这样, 不论是物体的抽样点数还是全息图的像素都非常的巨大, 因而计算量也十分巨大. 目前一般计算机的计算速度仍然难以满足计算全息图作为实际物体三维显示的需要. 考虑目前计算机制彩虹全息发展的现状, 认为提高全息图的计算速度仍是当前研究解决的首要问题. 根据彩虹全息的基元全息图为线全息图的特点, 找出物点与其线全息图的一一对应关系, 提出利用查表方法进行彩虹全息的计算, 这样可以大幅度地提高计算速度, 为计算机制彩虹全息的发展提供了一个非常实用的技术.

1 彩虹全息图中物点与线全息图的对 应关系

1.1 物点与其线全息图的坐标关系

彩虹全息图与非涅耳全息图不同之处在于, 非涅耳全息图中, 物点的传播信息遍布整个全息图图

面, 而在彩虹全息图中, 任一物点的基元全息图只占整个全息图的很小区域, 即所谓的“线全息图”^[7]. 线全息图概念对计算机制全息图有着重要的意义. 首先, 一个物点的线全息图仅仅占据整个彩虹全息图的很小一部分, 第二, 线全息图的空间频率沿着线全息图方向是很小的, 这两个特点使得计算量大大减少. 为了有效地利用线全息图的特点, 在进行彩虹全息图的计算时必须首先确定对于任意一个物点, 其线全息图的形状、大小和位置. 线全息图的位置与物点的位置以及狭缝的位置有着固定的关系. 以光学一步法彩虹全息的记录说明这一问题. 图 1 是光学一步法彩虹全息光路. 物点和狭缝经过透镜 L 分别成像于 O' 和 S' . O 点发出的锥状光束经狭缝后将发生衍射, 象点 O' 实际上应该为狭缝的夫琅和费衍射分布. 但是, 如果狭缝的缝宽足够大, 像点 O' 的扩展是很小的. 彩虹全息图的狭缝宽度 w_c 一般在 3 mm 左右, 狭缝和像点之间的距离约为 $z_c = 300$ mm 左右, 根据衍射原理, 像点弥散斑的大小为 (设照明光波长为 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$): $\lambda z_c / w_c \approx 63.3 \mu\text{m}$, 人眼对这样小的光斑可视为光点, 即可以看成是理想成像. 所以, 在一定的近似范围内, 全息记录平面 H 上的物光分布可以看成是狭缝的几何投影.

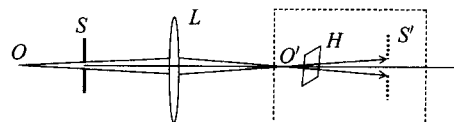


图 1 一步彩虹全息光路

Fig. 1 Optical setup one-step rain-bown hologram

图 2 是图 1 中的虚框部分, 反映了线全息图与其对应的空间某物点 (x_o, y_o, z_o) 及其狭缝的关系. 由于狭缝的限制, 物点发出的光束只有一片状光束入射到记录平面上, 片状光束在记录面上近似投影形成细条形物光分布, 加入参考光进行记录从而得到线全息图.

*浙江省自然科学基金(102056)和浙江省科技计划项目(2003C31011)资助
Tel: 0579-2283118 Email: wh@zjnu.cn
收稿日期: 2004-08-03

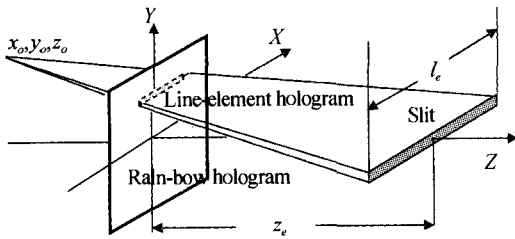


图2 彩虹全息中物点、狭缝、线全息图及其对应的片状光束之间的关系

Fig. 2 The relation between object point, slit and line-element hologram

对于物点 (x_o, y_o, z_o) 的线全息图在彩虹全息图上的位置可由其片状光束在记录面上投影矩形四个顶点的坐标来表示. 设记录平面位于 $z=0$ 平面, 狭缝长度为 l_e , 宽度为 w_e , 狭缝与全息图之间的距离为 z_e . 经过简单的几何推导, 可以得到线全息图四个顶点的 X 和 Y 方向在记录面上截点坐标为

$$x_{h1} = x_o + \frac{x_o + w_e/2}{z_e - z_o}, x_{h2} = x_o + \frac{x_o - w_e/2}{z_e - z_o} z_o \quad (1)$$

$$y_{h1} = y_o + \frac{l_e/2 + y_o}{z_e - z_o} z_o, y_{h2} = y_o - \frac{l_e/2 - y_o}{z_e - z_o} z_o \quad (2)$$

线全息图的宽度和长度分别为

$$\Delta y_h = \frac{z_o}{z_o - z_e} w_e, \Delta x_h = \frac{z_o}{z_e - z_o} l_e \quad (3)$$

所以, 某一物点 (x_o, y_o, z_o) 在长度为 l_e , 宽度为 w_e 的狭缝限制下, 所产生的线全息图被限制在坐标 $[(x_{h1}, y_{h2}), (x_{h1}, y_{h1}), (x_{h2}, y_{h2}), (x_{h2}, y_{h1})]$ 框架内.

1.2 记录平面物光波的分布

利用查表法制作彩虹全息图的原理是: 设在全息图附近有一物体是一个立体方阵, 物点数为 $I \times J \times L$, 其中某一物点 $(x_{\alpha j l}, y_{\alpha j l}, z_{\alpha j l})$ 对应一线全息图, 其大小被限制在 $[(x_{h1}, y_{h2}), (x_{h1}, y_{h1}), (x_{h2}, y_{h2}), (x_{h2}, y_{h1})]$ 范围内. 将所有物点在线全息图范围内的物光分布全部计算出来并存储备用. 对于任何一个线度小于立方体的物体, 其物点分布都可以在立方体内找到. 因而彩虹全息图的计算就可以简化为, 先判断物点的位置 $(x_{\alpha j l}, y_{\alpha j l}, z_{\alpha j l})$, 然后查表找到与这一物点对应的物光分布, 逐一将所有物点的物光分布进行线性叠加, 形成物体在全息图面整体物光分布, 引入参考光与物光进行相干迭加, 最后得到物体的彩虹全息图.

物点 $(x_{\alpha j l}, y_{\alpha j l}, z_{\alpha j l})$ 发出的光波在记录平面上的分布菲涅耳近似为

$$U_{\alpha j l}(x, y) = a_{\alpha j l} \exp(ik \frac{x_{\alpha j l}^2 + y_{\alpha j l}^2}{2z_{\alpha j l}}) \cdot \exp(ik \frac{x^2 + y^2}{2z_{\alpha j l}}) \exp(-ik \frac{x_{\alpha j l} x + y_{\alpha j l} y}{z_{\alpha j l}}) \quad (4)$$

所有物点在记录平面上的分布为

$$U_o(x, y) = \sum_{i,j,l}^{I,J,L} a_{\alpha j l} \exp(ik \frac{x_{\alpha j l}^2 + y_{\alpha j l}^2}{2z_{\alpha j l}}) \cdot$$

$$\exp(ik \frac{x^2 + y^2}{2z_{\alpha j l}}) \exp(-ik \frac{x_{\alpha j l} x + y_{\alpha j l} y}{z_{\alpha j l}}) \quad (5)$$

设参考光为平行光: $R(x, y) = a \exp(ikx \sin \theta)$, 全息图透射率分布为

$$t(x, y) \propto [U_o(x, y) + R(x, y)][U_o(x, y) + R(x, y)]^* \quad (6)$$

1.3 靠近全息图物点的近似处理

当物点与全息图很近时, 线全息图将变的很细小, 由于计算机制全息图的计算速度与全息图取样点数的多少有关, 为了减少计算量, 一般取样频率只略大于抽样定理所规定的频率. 设计算全息图的取样间隔在 X 方向和 Y 方向分别为 $\Delta x, \Delta y$, 显然, 当 $\Delta x_h \leq \Delta x$, 或 $\Delta y_h \leq \Delta y$ 时, 所对应的线全息图已经失去条纹结构, 也就不成其为全息图, 因而式(1)和(2)所规定的计算区间也就失去了意义.

计算全息图的取样间隔与全息图的空间频率有密切的关系, 首先讨论线全息图的空间频率问题.

设参考光为平行光, $\tilde{R}(x, y) = A_r \exp(i2\pi \frac{x \sin \theta}{\lambda})$,

全息图上某点 (x, y) 的空间频率与物点坐标 (x_o, y_o) 的关系为^[8]

$$f_x = \frac{\sin \theta}{\lambda} + \frac{x - x_o}{z_o \lambda}, f_y = \frac{y - y_o}{z_o \lambda} \quad (7)$$

按抽样定理, 计算全息图的抽样频率应不小于全息图最大频率的两倍. 对于这里的线全息图, 其最大频率为

$$f_{xM} = \frac{\sin \theta}{\lambda} + \frac{x_{h2} - x_o}{z_o \lambda} = \frac{\sin \theta}{\lambda} + \frac{w_e + 2x_o}{2(z_e - z_o)\lambda} \quad (8)$$

当 $z_o = 0$ 时, 线全息图已经变为一个点, 完全变为像面全息图. 此时, 全息图的空间频率达到最大

$$f_{xM} = \frac{\sin \theta}{\lambda} + \frac{x_{h2} - x_o}{z_o \lambda} = \frac{\sin \theta}{\lambda} + \frac{w_e + x_o}{z_o \lambda} \quad (9)$$

为了说明问题, 举一个实际例子. 在计算全息中, 为了减少计算量, θ 角一般取得比较小, 仅保证物光和再现光恰好可以分开. 设 $\theta = 10^\circ, \lambda = 0.6 \times 10^{-3} \text{ mm}$, $w_e = 3 \text{ mm}, z_e = 300 \text{ mm}, x_o = 50 \text{ mm}$. 可以算出: $f_{xM} = 576 \text{ lp/mm}$, 这样计算全息图的取样频率 $f > 2f_{xM} = 1152 \text{ lp/mm}$. 或取样间隔 $\Delta x < 0.8 \mu\text{m}$. 当物点位于记录平面上时, 全息图已演变为像面全息图. 由于人眼分辨极限的限制, 用于计算像面全息图的图像像素间隔对于人眼的张角一般不小于 $1'$, 或在明视距离处观察像素间隔 Δx_o 不小于 0.1 mm . 显然 $\Delta x_o \gg \Delta x$, 这样在进行全息图计算时, 物点的不能被光栅调制, 如图3. 图3(a)为全息图取样点,

图 3(b)为物点,图 3(c)为加入参考光以后的“全息图”,图 3(c)中的虚线是全息图条纹结构. 显然,物点(仅仅是一个几何点)中没有全息条纹结构,所以图 3(c)不可能成为物点分布的全息图. 为了物点中能够有全息图的结构,必须将物点变换成物斑,见图 4(b). 这样图 4(c)的物点(斑)就有了全息图的条

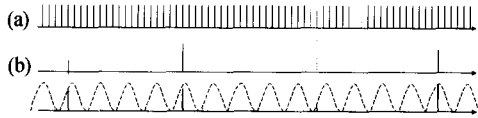


图 3 物点与全息图取样
Fig. 3 Object point and hologram sample

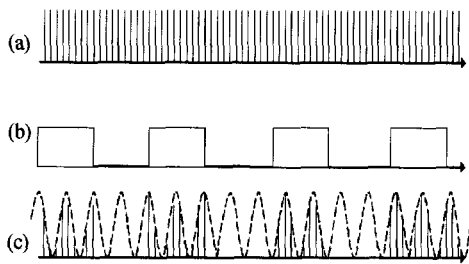


图 4 物斑与全息图取样
Fig. 4 Object spot and hologram sample

纹结构. 在实际的激光像面全息图中,所谓的物点也是人眼不能分辨的光斑. 显然此时要求物斑(光斑)的线度 δx_0 满足的条件为

$$\Delta x_0 > \delta x_0 > 2\Delta x \quad (10)$$

参照对像面全息图处理的方法,也可以这样来处理靠近记录平面物点的全息图问题. 当线全息图的大小小于或等于取样间隔的两倍时,即 $\Delta x_h \leq 2\Delta x$ 时(这里主要考虑 X 方向,因为彩虹全息图的竖直方向空间频率比水平方向空间频率要高得多),认为物点处于记录平面上,能够作为这样近似的物点与记录平面的距离范围是

$$|z_0| \leq \frac{2\Delta x z_e}{w_e + 2\Delta x} = z_{0pmax} \quad (11)$$

式中 z_{0pmax} 是可以作为像面全息处理的物点与记录面的最大距离. 按照前述例子, $|z_0| < 0.16 \text{ mm}$, 这样小的距离完全可以认为物点是位于记录平面上的. 因而对于这些物点都可以作为像面全息图来处理. 即在这样范围的物点都可以当做线度为 δx_0 的均匀光斑来计算其像面全息图.

2 计算彩虹全息图的程序设计

根据前面得到物点与线全息图的关系,首先计算 $I \times J \times L$ 方阵内所有物点的物光在其线全息图内的分布.

设物点在三个方向的取样间隔分别为 Δx_0 、

Δy_0 、 Δz_0 , 全息图的取样间隔在 X 和 Y 方向的取样间隔分别为 Δx 、 Δy , 并且,所有物点的振幅都设为 1. 如图 5,选择方阵中心通过 Z 轴,对于第 (i, j, l) 物点,其坐标为 $[(i - I/2)\Delta x_0, (j - J/2)\Delta y_0, (l - L/2)\Delta z_0]$. 设全息图离散后的点数为 $M \times N$, 选取全息图的中心为坐标原点,全息图上第 (m, n) 点坐标 (x, y) 可以表示为离散形式: $[(m - M/2)\Delta x,$

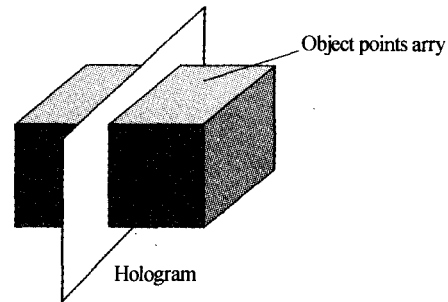


图 5 全息图附近的立方体点阵
Fig. 5 Objects points in a cube nearby hologram

$(n - N/2)\Delta y]$, 离散后的线全息图的物光分布可以表示为

$$U_{\alpha j l}(x, y) = \sum_m \sum_n \exp(ik \frac{x_{\alpha j l}^2 + y_{\alpha j l}^2}{2z_{\alpha j l}}) \cdot \exp(ik \frac{x^2 + y^2}{2z_{\alpha j l}}) \exp(-ik \frac{x_{\alpha j l} x + y_{\alpha j l} y}{z_{\alpha j l}}) \delta[x - (m - \frac{M}{2})\Delta x, y - (n - \frac{N}{2})\Delta y] \quad (12)$$

式中 m 和 n 的取值由式(1)和(2)确定

$$\frac{x_{h1}}{\Delta x} + \frac{M}{2} \leq m \leq \frac{x_{h2}}{\Delta x} + \frac{M}{2} \quad \frac{y_{h1}}{\Delta y} + \frac{N}{2} \leq n \leq \frac{y_{h2}}{\Delta y} + \frac{N}{2} \quad (13)$$

将每一物点的物光分布数组编制成如图 6 的表格. 一个具体物体经离散后,每一点都可以在表格中找到与其对应的物光分布,利用查表法,将所有物点光分布一一查出,并一一迭加,就可以得到整个记录平面上的物光分布.

设物体上各点光复振幅分布函数为 $f(x, y, z)$, 离散后得到其样本阵列为

$$f(i, j, l) = f(x, y, z) \delta[x - (i - I/2)\Delta x_0, y - (j - J/2)\Delta y_0, z - (l - L/2)\Delta z_0]$$

物光在记录平面的数字分布就是 (i, j, l) 取不同值时数组被 $f(i, j, l)$ 加权后的迭加,即

$$U_0(x, y) = \sum_i \sum_j \sum_l f(i, j, l) U_{\alpha j l}(x, y) \quad (14)$$

对于实际物体,在大部分坐标上 $f(x, y, z) = 0$. 引入参考光 $R(x, y)$ 与式(14)相干迭加,计算如下的干涉条纹分布

$$I(x, y) = |U_0(x, y) + R(x, y)|^2 \quad (15)$$

这就是最后得到的数字彩虹全息图.

$U_{\alpha 00L}$	$U_{\alpha 01L}$...	$U_{\alpha 0N-1L}$	$U_{\alpha 0NL}$
$U_{\alpha 00I}$	$U_{\alpha 01I}$...	$U_{\alpha 0N-1I}$	$U_{\alpha 0NI}$
\vdots	\vdots			
$U_{\alpha 100}$	$U_{\alpha 101}$...	$U_{\alpha 1N-10}$	$U_{\alpha 1N0}$
$U_{\alpha 10I}$	$U_{\alpha 10I}$...	$U_{\alpha 1N-1I}$	$U_{\alpha 1NI}$
\vdots	\vdots			
$U_{\alpha 100}$	$U_{\alpha 100}$...	$U_{\alpha 1N-100}$	$U_{\alpha 1N00}$
\vdots	\vdots			
$U_{\alpha 100}$	$U_{\alpha 100}$...	$U_{\alpha 1N-100}$	$U_{\alpha 1N00}$
$U_{\alpha 100}$	$U_{\alpha 100}$...	$U_{\alpha 1N-100}$	$U_{\alpha 1N00}$

图6 物光波数据表

Fig. 6 Data table of object light

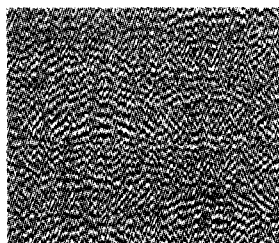
3 实验及其结果

建立了一个立方体在记录平面上的线全息物光分布数表,立方体的取样点数为 $200 \times 200 \times 200$ 物点. 利用 3D 软件制作了如图 7(a) 的三维模型,并转换成计算全息用的三维分布数据 $f(x, y, z)$, 其离

散点数在直角坐标的三个方向都小于 200. 这样,对于三位模型内的任意离散点,都可以在数表中找到与之对应的线全息物光分布. 计算时,程序对物点坐标位置进行循环判断,找出与之对应的线全息的物光分布,并逐一对其进行叠加,最后即可得到整个三维模型的彩虹全息的物光分布. 实验中,物点的取样间距为 0.1 mm,实际物点数为 $180 \times 180 \times 120$,这样物体设定尺寸为 $18 \text{ mm} \times 18 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$,狭缝宽度设置为 3 mm,长度为 80 mm;三维模型中心与记录平面相距 10mm;记录平面于狭缝的距离为 300 mm. 在实验中, $\theta \approx 3^\circ$. 图 7(b) 是计算机制彩虹全息图的局部,图 7(c) 是再现像,实际观察有明显的立体感.



(a)3D model



(b)Rain-bow CGH



(c)Reconstruction image

图7 实验结果

Fig. 7 Experimental result

4 结论

彩虹全息图具有广泛的用途,研究计算机制彩虹全息图的算法和输出系统对彩虹全息的印刷业有着重要的应用价值. 在这方面的研究已经取得了重要进展,为计算机制全息图在产业上的应用进行了有意义的基础工作.

参考文献

- Lucilla Croce Ferri. Visualization of 3D information with digital holography using laser printers. *Computer & Graphics*, 2001, **25**(2): 309~321
- 刘诚,刘志刚,薄峰,等. 数字全息中再现像分离问题的研究. *光子学报*, 2003, **32**(5): 588~591
Liu C, Liu Z G, Bo F, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(5): 588~591
- Wang Hui, Li Yong, Jin Hongzhen, et al. Three-dimensional visualization of shape measurement data based on a computer generated hologram. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 2003, **5**(9): 195~

199

- Benton S A. Hologram reconstructions with extended incoherent sources. *J Opt Soc Am*, 1969, **59**(10): 1545A~1546A
- 李勇,王辉. 大视角计算机制彩虹全息研究. *光子学报*, 2003, **32**(5): 595~597
Li Y, Wang H, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(5): 595~597
- Hiroshi Yoshikawa, Akihito Kagotani. Full color computer-generated rainbow hologram with enlarged viewing angle. *Optical Review*, 2002, **9**(6): 251~254
- 范诚,江朝川,郭履容. 从线全息图分析彩虹全息. *光学学报*, 1990, **10**(9): 845~849
Fang C, Jiang C C, Guo L R. *Acta Optica Sinica*, 1990, **10**(9): 845~849
- 陶纯堪,陶纯匡. *光学信息论*. 北京: 科学出版社, 1999. 104~112
Tao C K, Tao C K. *Optical Information Theory*. Beijing: Science Press, 1999. 104~112

A New Method for Computer-generated Rain-bow Hologram

Wang Hui¹, Li Yong¹, Jin Hongzhen¹, Cai Xiaou², Mao Hefa¹

¹ *Information Optical Institute, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004*

² *Department of physics, Wenzhou Teacher's College, Wenzhou 325003*

Received date: 2004-08-03

Abstract A new method to make computer generated rainbow hologram using look-table is proposed. According to the relation of object point position with its line-element hologram, an object light distribution data table is established. This data table contains the line-element hologram's object light digital distribution of all possible object points. For any actual objects, its all sample points' light distribution can be obtained by looking the data table. Adding all the sample points' light distribution, the actual object's light distribution can be got. Computer-generated rain-bow hologram can be made by calculating interference fringe of the object light distribution and of reference light. This method well utilizes the characters of line-element hologram to increase computing speed.

Keywords Computer generated holograms; Rain-bow holograms; Look-table



Wang Hui was born in Jiangsu Province on Nov. 1958. He received his M. S. degree from Hangzhou University in 1986 and his Ph. D. degree from Sichuan University in 1993. He is now a professor and vice-president of Zhejiang Normal University. His research interests are in optical information process, holography, three-dimension display and computer generated hologram. In recent years, He published more than 40 papers.