

# 相息图的变频采样研究

蔡晓鸥<sup>1</sup> 王辉<sup>2</sup> 李勇<sup>2</sup>

(1 温州师范学院物理与电子信息学院, 浙江 温州 325003)

(2 浙江师范大学信息光学研究所, 金华 321004)

**摘要** 根据相息图的成像原理及其局部空间频率不同的特点,对相息图进行变频率采样,保证相息图上位相在 $(0, 2\pi)$ 或是 $(-\pi, \pi)$ 取值时量化为相同的等级数,从而消除了相息图采样点的计算、存贮及传输的冗余. 并且采用邻近数值等值插值恢复即可获得良好的再现像质. 实验和理论均证明了该方法的有效性和可行性,为相息图的快速计算、信息存贮与传输提出了一条新的思路.

**关键词** 相息图;变频采样;空间频率

**中图分类号** TB877 **文献标识码** A

## 0 引言

相息图(Kinoform)只有成像光波,无其它衍射光损失,衍射效率高. 当相息图面上的位相在一个周期内取为4、8、16个等级时,其理论衍射效率可分别高达81%、95%、98.7%,因而它是一种光波重构的理想元件<sup>[1]</sup>. 由于除了它更接近立体视觉的真实过程外,还有它的信息量较全息图小,便于传输,光能利用率高等等一系列优点,利用相息图进行物体的记录和再现已经有了进一步的研究<sup>[2,3]</sup>. 但是,在计算机全息图技术中,为使其能得到广泛应用,首先必须考虑的是全息图的计算速度、信息的压缩、存储、再现及再现像质的评价<sup>[4-6]</sup>. 当然,相息图也不例外. 计算速度、信息量压缩、存储及再现像质是相息图付诸于实践的关键所在.

由相息图的制作原理<sup>[7]</sup>可以得知,相息图上各局部的空间频率是不同的,为了保证相息图的全部信息,一般制作相息图时的采样频率以相息图所具有的最大空间频率为准,这样带来的结果是大部分的低频区域的采样也是高频采样,使得相息图的冗余信息庞大. 我们提出对相息图进行变频率采样,使得无论是高频区域或是低频区域,保证相息图上位相在 $(0, 2\pi)$ 或是 $(-\pi, \pi)$ 取值时量化为相同的等级数,从而消除了相息图采样点的计算及存贮的冗余. 同时,为保证变频采样后的相息图与等间距采样的相息图的实际空间位置与大小的匹配,满足出图要求,本文采用邻近数值等值插值恢复,即可得到良好的再现像质. 对相息图进行变频采样的提出,使得相息图的计算量、存贮量都大大地减少,无疑,这将给相息图的实际应用提出一条新的思路.

## 1 变频采样相息图的制作原理

为简单起见,本文以在 $xz$ 平面上坐标为 $(x_0, z_0)$ 的点光源 $O$ 点制作一维相息图为例进行讨论,如图1.

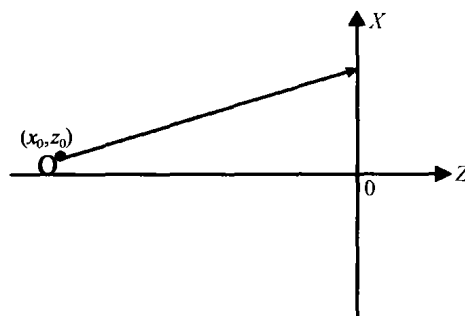


图1 一维相息图的制作光路图

Fig. 1 The computer light path of a line kinoform

$O$ 点在该一维相息图面上的光波复振幅分布为

$$O(x) = \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \left[ (x - x_0)^2 + z_0^2 \right]^{1/2} \right\}$$

由于物点的离轴高度与其到相息图的距离相比很小,即: $z_0 \gg x, x_0$ ,则

$$O(x) = \exp \left( j \frac{2\pi}{\lambda} z_0 \right) \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z_0} (x - x_0)^2 \right\}$$

所以相息图面上的位相分布为

$$\phi(x) = \frac{\pi}{\lambda z_0} (x - x_0)^2 + \frac{2\pi}{\lambda} z_0 \quad (1)$$

将 $\phi(x)$ 除以 $2\pi$ 后取余数,即在 $(0, 2\pi)$ 或是 $(-\pi, \pi)$ 取值,则可得基元相息图的一维形式. 由式(1)的位相分布可知,物点在相息图上 $x$ 附近的局部空间频率为

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\phi}{dx} \right| = \frac{1}{\lambda z_0} |x - x_0| \quad (2)$$

可知:在相息图上各局部的空间频率是不同的,若以相同的间隔进行采样,则在保证高频区域 $(0, 2\pi)$ 或是 $(-\pi, \pi)$ 的 $M$ 个等级的采样时,势必使得低频区域 $(0, 2\pi)$ 或是 $(-\pi, \pi)$ 的 $M$ 的几倍或是几十倍的等级数的采样. 再由相息图的理论衍射效率与其等

级数的关系,当  $M$  为 4、8、16 时,其理论衍射效率可分别高达 81%、95%、98.7%,可知,  $M$  的几倍或几十倍的增加,对衍射效率的提高没有太大的意义,一般情况下,取  $M$  为 8 即可. 所以,对相息图上位相在  $(0, 2\pi)$  或是  $(-\pi, \pi)$  取值时量化为相同的等级数  $M$ ,即可消除相息图采样点的计算及存贮量的冗余,大大地提高计算速度及减小信息存贮量.

本文首先通过理论计算,得出相息图上  $2\pi$  位相周期的始末点位置,设为  $x_1$  与  $x_2$  点处,则  $x_1$  与  $x_2$  点位置相应的相位满足

$$\Delta\phi = |\phi_1(x) - \phi_2(x)| = \left| \frac{\pi}{\lambda z_0} [(x_1 - x_0)^2 - (x_2 - x_0)^2] \right| = 2\pi \quad (3)$$

然后根据该始末位置间的距离等间距量化为 8 个等级数. 其余各处的处理方法依次类推. 同时,为保证变频采样后的相息图与等间距采样相息图的实际空间位置与大小的匹配,满足出图要求,本文采用邻近数值等值插值恢复,恢复后的相息图可得到良好的再现像质.

下面具体分析点光源一维相息图的变频率采样的过程.

设信号  $\phi'(x)$  分布为

$$\phi'(x) = \frac{\pi}{\lambda z_0} (x - x_0)^2 \quad (4)$$

则点光源一维相息图上的位相分布  $\phi(x)$  为  $\phi'(x)$  除以  $2\pi$  取余数的表达式. 设一基元相息图长度为 12 mm,其中心为坐标原点,物点离开中心轴的距离为  $x_0 = 1$  mm,离开相息图平面的距离为  $z_0 = 1$  m,记录光波长  $\lambda = 6 \times 10^{-7}$  m,可计算得其最高空间频率为  $1.2 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$ . 若以频率  $f_s = 1 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$  取样,即每隔 0.01 mm 取一样点,则对相息图上最高频率位相在  $(0, 2\pi)$  或是  $(-\pi, \pi)$  量化为 8 个等级数,则采样点总数为 1201 个,相应的位相分布如图 2,其中  $[-2 \text{ mm}, 2 \text{ mm}]$  区间内的位相分布如图 3(a). 由图 2 可以看出,在各不同空间频率处的  $(0, 2\pi)$  之间采样的点数是不同的,尤其是在低频区域其采样点数远远地大于高频区域. 如图 3(a),在低频区域显

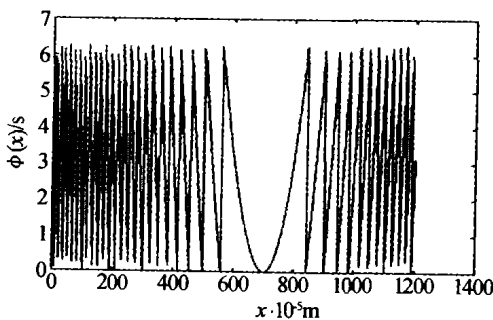
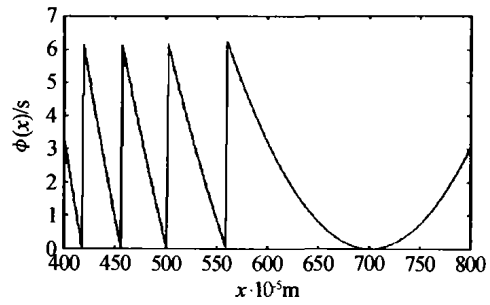
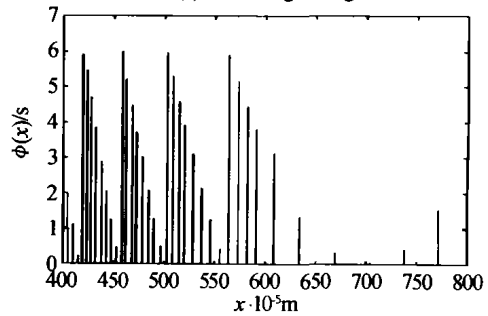


图 2 一维相息图位相分布  
Fig. 2 The phase distribution of a line kinoform

然有大量的冗余样点数. 若对其采用变频采样,使各不同空间频率处的  $(0, 2\pi)$  之间采样的点数相同,则对于  $[-2 \text{ mm}, 2 \text{ mm}]$  区间内位相的变频采样如图 3(b). 比较 3(a) 与 3(b) 可知,原本需要 401 个采样点的信号在变频采样后只需 38 个采样点即可. 经邻近数值等值插值恢复后,原信号恢复如图 4. 显而易见,这种变频采样的方法大大地减少了原信号信息的存贮量.



(a) Partial original signal



(b) Frequency-change sample for partial original signal

图 3 部分原信号及其变频采样

Fig. 3 Partial original signal and its Frequency-change sampling

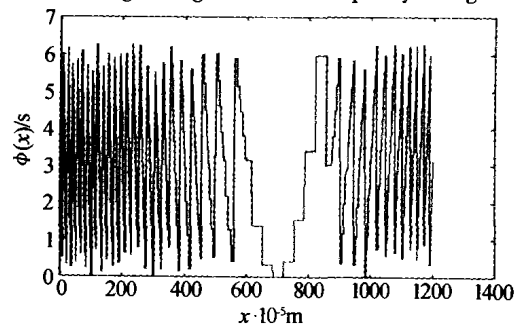


图 4 变频插值后的恢复信号

Fig. 4 Restoration image of Frequency-change sampled signal

## 2 信息压缩比率

为说明用非变频采样法与变频采样法制作相息图的信息压缩比,设计制作一  $2a \times 2a$  大小的物体的相息图,相息图的大小为  $2A \times 2A$ ,光路图如图 5,相息

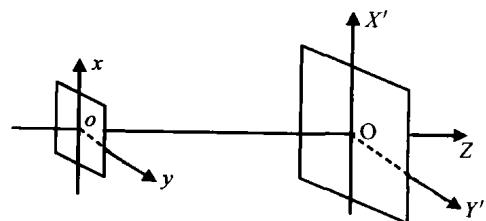


图 5 相息图的制作光路图

Fig. 5 The light path of kinoform

图与物体之间的距离为  $Z$ , 记录光波长为  $\lambda$ . 按非变频采样相息图的制作原理, 把相息图上最高频率 (见式(2)) 位相在  $(0, 2\pi)$  或是  $(-\pi, \pi)$  量化为 8 个等级数, 并以此抽样间隔对整个相息图抽样, 则相息图上的采样点数为

$$N = [16A(a+A)/\lambda z]^2 \quad (5)$$

对于变频采样相息图, 严格计算取样点数一般情况下是比较困难的, 但可以进行比较合理的估计. 设物体沿  $x$  方向上离开轴线最大距离  $a$  处在相息图中间的位相为

$$\phi(x)_0 = \frac{\pi}{\lambda z} a^2$$

则在相息图边缘的位相是

$$\phi(x)_A = \frac{\pi}{\lambda z} (a+A)^2$$

从相息图中心到边缘位相变化为

$$\Delta\phi(x) = \phi(x)_A - \phi(x)_0 = \frac{\pi}{\lambda z} [(a+A)^2 - a^2]$$

因此在整个相息图一维方向上  $2\pi$  的周期数为

$$N'_i = 2 * \frac{\pi}{\lambda z} [(a+A)^2 - a^2] / 2\pi$$

因此, 根据变频相息图的制作原理, 相息图上每一个位相周期上取 8 个等级数, 则相息图上的采样点数为

$$N' = \left\{ \frac{8(a+A)^2 - 8a^2}{\lambda Z} \right\}^2 \quad (6)$$

所以压缩比为

$$M = \frac{N}{N'} = \left( \frac{2a+2A}{2a+A} \right)^2 \quad (7)$$

由式(7)可以看出, 若  $a$  一定,  $M$  随着  $A$  的增加而增大, 即对同一物体, 所制作的相息图的尺寸越大, 压缩比越大; 若  $A$  一定,  $M$  随着  $a$  的增加而减小, 即制作相同大小的相息图, 物体的尺寸越大, 压缩比越小; 若对一位于轴线上的点光源, 即  $a=0$  时, 无论相息图的尺寸如何, 其压缩比恒为 4:1, 达到最大值. 在实际相息图的制作中, 为确保人眼双目有足够的视场和视差效果, 一般取相息图的大小为  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ , 考虑到人眼的明视距离, 取物体与相息图的距离为  $250 \text{ mm}$ , 若取物体尺寸为  $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ , 则变频采样后的数据计算与存储量大约为原相息图存储量的 30%. 这一数据是非常可观的.

### 3 实验结果及分析

为便于说明这种变频率采样及恢复方法应用于相息图的实际效果, 本文制作一“相”字的相息图. 具体参数为: 物体线度为  $4 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$ , 光源波长取为  $0.63 \mu\text{m}$ , 物体与相息图相距  $300 \text{ mm}$ , 相息图上

样点间隔为  $4.7 \mu\text{m}$ , 样点数为  $1280 \times 1280$ , 即制作一  $6 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$  的相息图. 由相息图的制作原理得知, 该相息图即按最高频率位相在  $(0, 2\pi)$  或是  $(-\pi, \pi)$  量化为 8 个等级数采样. 再对该相息图进行变频采样制作变频相息图. 为考虑版面问题, 以所得相息图的一部分为例, 以下称为部分原相息图 (如图 6(a) 所示) 及部分变频相息图插值后的恢复图 (图 6(b) 所示). 利用计算机进行模拟再现<sup>[8]</sup>, 图 7(a)、7(b) 分别给出了非变频和变频全息图恢复后的计算机模拟再现结果.

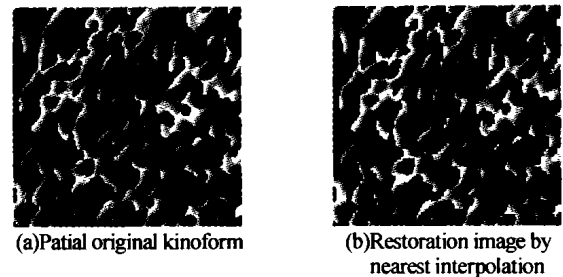


图 6 部分相息图

Fig. 6 Patial kinoform

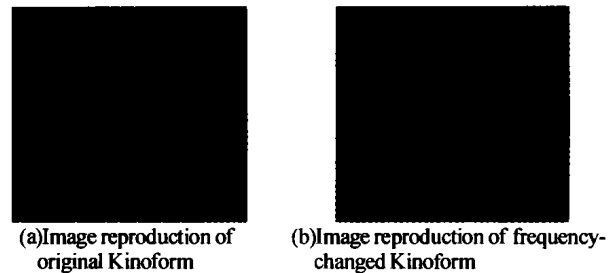


图 7 模拟再现像

Fig. 7 Image reproduction of kinoform

### 4 结论

从原相息图与变频采样相息图的模拟再现像比较可看出, 像质良好, 几乎看不出差异, 但就数据存储量而言, 该变频相息图的数据量大约为原相息图数据量的 50%. 可见, 利用变频采样法制作相息图, 具有其有效性和可行性.

根据相息图的成像原理及其局部空间频率不同的特点, 我们提出对相息图进行变频率采样. 无论是相息图上的高频区域或是低频区域, 保证其位相在  $(0, 2\pi)$  或是  $(-\pi, \pi)$  取值时量化为相同的等级数. 同时, 本文采用邻近数值等值插值恢复变频后的相息图, 即可得到良好的再现像质. 该工作消除了相息图采样点的计算及存储的冗余, 为相息图的实际应用提出一条新的思路.

#### 参考文献

- 1 Lesem L B, Hirsch P M, Jordan J A. The kinoform: a new form reconstruction device// IBM J Res Develop, 1969, 13 (3): 150 ~ 154
- 2 Li W H. Computer generated holograms: techniques and

- applications. *Progress in Optics*, 1978, 121 ~ 232
- 3 Yang S Y, Teruo SHIMOMURA. Iterative Multikinoform Method for Improving the Reconstruction of Kinoform. *Optical Review*, 1997, 4(6): 660 ~ 665
- 4 蔡晓鸥, 王辉, 李勇, 等. 全息图压缩的小波分析方法. 光子学报, 2000, 29(8): 738 ~ 743  
Cai X O, Wang H, Li Y, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2000, 29(8): 738 ~ 743
- 5 Cai X O, Wang H, Li Y. The application of wavelet analysis in hologram compression. *Acta Photonica Sinica*, 2001, 30(6): 739 ~ 743
- 6 蔡晓鸥, 王辉, 李勇. 数字全息图变频采样研究. 光子学报, 2004, 33(4): 481 ~ 484  
Cai X O, Wang H, Li Y. *Acta Photonica Sinica*, 2004, 33(4): 481 ~ 484
- 7 于美文著. 光全息学及其应用. 北京: 北京理工大学出版社, 1996. 301 ~ 305  
Yu M W. *Optical Hologram and its Applications*. Beijing: Beijing Science University Press, 1996. 301 ~ 305
- 8 蔡晓鸥. 全息图的计算机模拟再现. 应用激光, 2001, 23(3): 185 ~ 187  
Cai X O. *Applied Laser*, 2001, 23(3): 185 ~ 187

## Study on the Kinoform of Frequency-change Sampling

Cai Xiao-ou<sup>1</sup>, Wang Hui<sup>2</sup>, Li Yong<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Physics and Electronic Information College, Wenzhou Normal College, Wenzhou, Zhejiang 325003

<sup>2</sup> Institute of Information Optics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004

Received date: 2004-01-12

**Abstract** Based on the imaging theorem and different partial space-frequency characteristic of the kinoform, the kinoform has been sampled by frequency-change, ensuring that the same digitized grade should be taken in the phase difference from 0 to  $2\pi$  or  $-\pi$  to  $\pi$ . In the way, the information redundancy of the kinoform that results from the sampling redundancy has been eliminated. Further more, a good reconstructed image can be acquired from restoration kinoform by the nearest interpolation. The feasibility and efficiency of the method are confirmed by theoretical analysis and experimental results. So a new thought has been offered for fast computation, the information storage and transmission of kinoform.

**Keywords** Kinoform; Frequency-change sampling; Spatial frequency



**Cai Xiao-ou** was born in May 1972, in Zhejiang. She gained the B. S. degree from Zhejiang Normal University in 1994, and the M. S. degree from Zhejiang University in 1999. Now, she is a teacher of Wenzhou Normal College. The field that she is interested includes hologram compression, data storage and practical hologram communications.