

# MRTD 算法在集成平面光波导组件分析中的应用\*

孔繁敏 郭毅峰 李康 刘新

(山东大学信息科学与工程学院, 济南 250100)

**摘要** 将基于 Daubechies 紧支集尺度函数的时域多分辨分析(MRTD)算法用于集成平面光波导组件的时域分析中, 实现了 MRTD 算法的各向异性理想匹配层(APML)吸收边界条件, 并对平行介质带定向耦合器进行了数值模拟和验证, 所得结果与解析解非常一致. 与传统的 FDTD 算法相比, MRTD 算法在不牺牲计算精度的前提下能够大大节省计算资源.

**关键词** 时域多分辨分析算法; 各向异性理想匹配层; 集成平面光波导组件

**中图分类号** TN252 **文献标识码** A

## 0 引言

随着光波导器件集成度的增高, 用解析法精确求解 Maxwell 方程组在此类器件中的解极为困难, 因此用数值方法对 Maxwell 方程组进行精确求解就变得势在必行. 目前, 光波导器件分析常用的数值方法为光束传播法(BPM)<sup>[1,2]</sup>和时域有限差分法(FDTD)<sup>[3,4]</sup>. BPM 法计算简单、速度快, 但它采用了菲涅耳(Fresnel)近似, 忽略了由于光波导轴向的不均匀性而引起的反射波, 而这些反射波在那些作为反射器的光波导器件中是不能被省略的. FDTD 算法具备简洁和直观特性, 可对结构复杂的导体、绝缘介质以及非线性、各向异性物质建模. 近年来, FDTD 法已被应用于光波导器件的仿真和分析中<sup>[5]</sup>. 由于数值色散的影响, FDTD 算法在进行电大尺寸光波导器件仿真时计算网格数目相当庞大, 导致 FDTD 算法运行耗时长, 内存需求大.

近年来, 小波分析与电磁场的结合引起了人们极大的兴趣. 1996 年, Krumpholz 将小波多分辨分析思想引入到电磁场 Maxwell 方程组的求解, 得到了基于三次样条 Battle-Lemarie 尺度函数的时域多分辨分析(MRTD)算法<sup>[6]</sup>. 与当前流行的 FDTD 算法相比, MRTD 具有较好的色散特性, 大大减少了计算网格数, 提高了电磁场的时域模拟效率<sup>[7,8]</sup>.

本文基于 Daubechies 尺度函数的时域多分辨分析(MRTD)算法<sup>[9]</sup>用于集成平面光波导组件的时域分析中, 实现了 MRTD 算法的各向异性理想匹配层(APML)吸收边界条件, 并通过平行介质带定向耦合器的数值模拟及其耦合长度的计算进行了验证, 所得结果与解析解非常一致.

## 1 基本理论

集成平面光波导组件的宽度一般为几个毫米, 与光波的波长相比, 可以认为是无限宽的, 光波在这个方向上不受限制, 即  $\partial/\partial z = 0$ , 这样集成平面光波导组件的研究就成为二维问题了.

对于 TE 波, 只有  $H_x$ 、 $H_y$  和  $E_z$  分量, Maxwell 方程组可写成

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z \quad (1c)$$

把式(1)中的  $E_z$ 、 $H_x$  和  $H_y$  场分量用 Daubechies 紧支集尺度函数  $\phi(x)$  展开如下

$$E_z(x, y, t) = \sum_{i,j,n=-\infty}^{+\infty} E_{z,i,j,n}^{\phi} \phi_i(x) \phi_j(y) h_n(t) \quad (2a)$$

$$H_x(x, y, t) = \sum_{i,j,n=-\infty}^{+\infty} H_{x,i,j+1/2,n-1/2}^{\phi} \phi_i(x) \cdot \phi_{j+1/2}(y) h_{n-1/2}(t) \quad (2b)$$

$$H_y(x, y, t) = \sum_{i,j,n=-\infty}^{+\infty} H_{y,i+1/2,j,n-1/2}^{\phi} \phi_{i+1/2}(x) \cdot \phi_j(y) h_{n-1/2}(t) \quad (2c)$$

式(2)中:  $h_n(t) = h(t/\Delta t - n + 1/2)$ ,  $h(t)$  为 Haar 小波尺度函数;  $\phi_i(x) = \phi(x/\Delta x - i + M_1)$ ,  $M_1$  为尺度函数的一阶矩;  $E_{z,i,j,n}^{\phi}$ 、 $H_{x,i,j+1/2,n-1/2}^{\phi}$  和  $H_{y,i+1/2,j,n-1/2}^{\phi}$  分别为场分量  $E_z$ 、 $H_x$  和  $H_y$  的展开系数.

由于 Daubechies 尺度函数的移位内插特性, 任意时刻场分量  $E_z$ 、 $H_x$  和  $H_y$  在空间一点的值实际上就是相应的展开系数, 因此, 把式(2)代入式(1)中并采用 Galerkin 方法<sup>[10]</sup>, 可以得到基于具有  $N$  阶消失矩的 Daubechies 尺度函数(简称 DBN)的 MRTD 差分公式

$$H_x^{n+1/2}(i, j+1/2) = H_x^{n-1/2}(i, j+1/2) -$$

\* 山东大学青年基金(编号:11170051310029)资助项目  
Tel:0531-8366030 Email:kongfm@sdu.edu.cn  
收稿日期:2003-08-19

$$\frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \sum_{l=-2N+1}^{2N-2} a(l) E_z^n(i, j+l+1) \quad (3a)$$

$$H_y^{n+1/2}(i+1/2, j) = H_y^{n-1/2}(i+1/2, j) +$$

$$\frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \sum_{l=-2N+1}^{2N-2} a(l) E_z^n(i+l+1, j) \quad (3b)$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = \frac{2\varepsilon - \sigma \Delta t}{2\varepsilon + \sigma \Delta t} E_z^n(i, j) + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon + \sigma \Delta t} \cdot$$

$$\left( \sum_{l=-2N+1}^{2N-2} a(l) \left[ \frac{H_y^{n+1/2}(i+l+1/2, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+1/2}(i, j+l-1/2)}{\Delta y} \right] \right) \quad (3c)$$

式(3)中  $\Delta x$  和  $\Delta y$  分别为沿  $x$  和  $y$  方向的空间步

表 1 Daubechies 尺度函数相对应的  $a(l)$

$l$	DB1	DB2	DB3	DB4
0	1.0000000000	1.2291666667	1.2918129281	1.3110340773
1		-0.0937500000	-0.1371343465	-0.1560100710
2		0.0104166667	0.0287617723	0.0419957460
3			-0.0034701413	-0.0086543236
4			0.0000080265	0.0008308695
5				0.0000108999
6				-0.0000000041

为了使式(3)达到数值稳定,时间步长  $\Delta t$  应满足修正的 Courant 稳定性条件

$$\Delta t \leq \left( v_{\max} \sum_{l=-2N+1}^{2N-2} |a(l)| \sqrt{(1/\Delta x)^2 + (1/\Delta y)^2} \right)^{-1} \quad (5)$$

式中,  $v_{\max}$  为计算空间中光的最大传播速度.

由于光波导中光场的分布是无限的,而计算机的存储容量是有限的,所以要用有限的网格空间模拟无限的光场分布区域必须在某处截断网格空间,这可以通过在计算区域的周围设置 PML 媒质来实现.

根据 APML 理论<sup>[11]</sup>,TE 波的 Maxwell 方程组为

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -j\omega\mu \frac{s_y s_z}{s_x} H_x \quad (6a)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = j\omega\mu \frac{s_x s_z}{s_y} H_y \quad (6b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon \frac{s_x s_y}{s_z} E_z \quad (6c)$$

式(6)中,  $s_x$ 、 $s_y$  和  $s_z$  定义为

$$s_\eta = 1 + \sigma_\eta / j\omega\varepsilon_0 \quad (\eta = x, y, z) \quad (7)$$

式(7)中,  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  和  $\sigma_z$  分别为沿 PML 媒质中  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的电导率. 在二维情况下,可取  $\sigma_z = 0$ . 为了使电磁波在 PML 媒质中被有效吸收,  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  在不同的区域应有不同的取值,这一点与 Berenger 的 PML 媒质中电导率参数的设置基本相同.

为了得到式(6)的差分格式,可采用引入辅助变量的方法进行.

以式(6c)为例,定义

$$D_z = \varepsilon(1 + \sigma_y / j\omega\varepsilon_0) E_z \quad (8)$$

长;  $\Delta t$  为时间步长;  $i, j$  分别为沿  $x$  和  $y$  方向的网格步长个数;  $a(l)$  为关联系数,可由式(4)计算

$$a(l) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x+l) \frac{\partial \phi(x-0.5)}{\partial x} dx \quad (4)$$

表 1 列出了不同 Daubechies 尺度函数相对应的  $a(l)$ ,这里只列出  $l \geq 0$  的  $a(l)$  值,对于  $l < 0$  的  $a(l)$  值可由  $a(-l) = -a(l-1)$  得到. 需要说明的是,基于 DB1 的 MRTD 算法(DB1-MRTD)实际上就是普通 FDTD 算法,可以说普通 FDTD 算法是 MRTD 算法的一个特例.

则式(6c)可写为

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega(1 + \frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon_0}) D_z \quad (9)$$

将式(8)、(9)转换到时域,采用 Galerkin 方法,可以得到式(6c)的差分方程

$$D_z^{n+1}(i, j) = \frac{2\varepsilon_0 - \sigma_y \Delta t}{2\varepsilon_0 + \sigma_y \Delta t} D_z^n(i, j) + \frac{2\varepsilon_0 \Delta t}{2\varepsilon_0 + \sigma_y \Delta t} \cdot \sum_{l=-2N+1}^{2N-2} a(l) \left( \frac{H_y^{n+1/2}(i+l+1/2, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+1/2}(i, j+l+1/2)}{\Delta y} \right) \quad (10a)$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = \frac{2\varepsilon_0 - \sigma_y \Delta t}{2\varepsilon_0 + \sigma_y \Delta t} E_z^n(i, j) + \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon(2\varepsilon_0 + \sigma_y \Delta t)} \cdot (D_z^{n+1}(i, j) - D_z^n(i, j)) \quad (10b)$$

式(6a)和式(6b)的差分方程也可以采用类似的方法得到.

在 PML 吸收层的差分方程中,需要 PML 吸收层外的场信息,这可以在 PML 层外侧设置理想电壁或磁壁,并应用镜像原理得到吸收层外面的场分量.

## 2 数值计算实例

为了验证基于 Daubechies 尺度函数的 MRTD 算法的精度和效率,对平行介质带定向耦合器进行了仿真和分析.

定向耦合器由两条相同的介质带构成,如图 1 所示,其中  $n_1 = 2.8$ ,  $n_2 = 2$ ,  $A = 15 \mu\text{m}$ ,  $B = 5 \mu\text{m}$ ,  $D = 0.3 \mu\text{m}$ ,  $S = 0.2 \mu\text{m}$ .

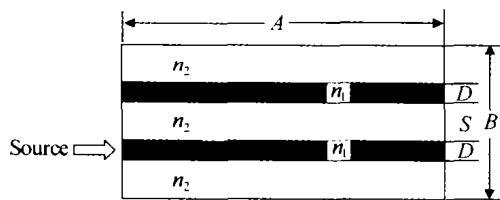


图1 平行介质带定向耦合器示意图

Fig. 1 Sketch of parallel-slab directional coupler

图2为利用DB2-MRTD算法计算所得平行介质带定向耦合器中电场 $E_z$ 及其幅度 $|E_z|$ 分布的图形. 在计算中输入波波长 $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$ , 空间步长 $\Delta s = 0.05 \mu\text{m}$ , PML的厚度 $\delta = 10\Delta s$ , 激励源采用 $\text{TE}_0$ 模. 从图2中可以清晰地看出两波导之间的能量交换, 在介质带中场幅最大值与最小值之间的距离为 $6.125 \mu\text{m}$ , 即耦合长度 $L = 6.125 \mu\text{m}$ , 这与奇偶相位

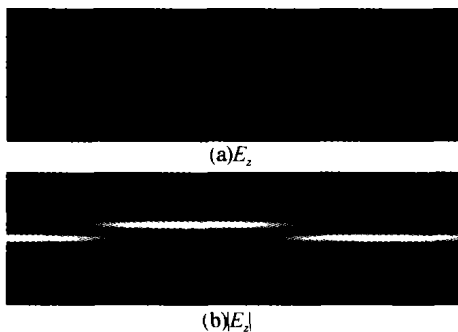


图2 平行介质带定向耦合器的场分布

Fig. 2 Field distribution for the parallel-slab directional coupler

反转所需的解析解 $L = 6.095 \mu\text{m}$ 相比<sup>[12]</sup>, 误差只有0.492%.

表2给出了不同空间步长时利用MRTD算法对平行介质带定向耦合器的耦合长度的计算结果, 其中 $\Delta s = 0.1 \mu\text{m}$ 为粗网格、 $\Delta s = 0.05 \mu\text{m}$ 为一般网格、 $\Delta s = 0.025 \mu\text{m}$ 为细网格、 $\Delta s = 0.0125 \mu\text{m}$ 为精细网格, 从表2中可以看出:

1) 对于同一种MRTD算法, 耦合长度的计算误差随着空间步长的减小而减小, 当采用细网格时, 计算误差将小于1%.

2) 与普通FDTD算法相比, 基于高阶消失矩Daubechies尺度函数的MRTD算法在计算效率和精度上具有明显的优势, MRTD算法可以采用较粗的网格而得到与FDTD采用较细网格相当的计算精度, 但计算时间和所占用的内存大大减少. 例如采用细网格的DB2-MRTD算法的计算误差为0.082%, 而采用精细网格的FDTD算法的计算误差为0.123%, 二者的计算时间之比为1:4.6, 所需的网格数之比为1:4.

3) 与DB2-MRTD算法相比, DB3-MRTD和DB4-MRTD在提高计算精度上并没有明显的改善, 但计算时间却成倍地增长, 所以计算在光波导分析中最好采用DB2-MRTD.

表2 耦合长度的计算结果

分析方法	网格类型	网格数目	执行时间/s	计算结果/ $\mu\text{m}$	误差
FDTD (DB1-MRTD)	粗网格	150 × 50	8.7	5.400	-11.403%
	一般网格	300 × 100	56.6	5.950	-2.379%
	细网格	600 × 200	427.5	6.0625	-0.533%
	精细网格	1200 × 400	3768.8	6.0875	-0.123%
DB2-MRTD	粗网格	150 × 50	19.4	6.300	3.363%
	一般网格	300 × 100	119.2	6.125	0.492%
	细网格	600 × 200	822.1	6.100	0.082%
DB3-MRTD	粗网格	150 × 50	30.0	6.300	3.363%
	一般网格	300 × 100	182.2	6.125	0.492%
	细网格	600 × 200	1250.4	6.100	0.082%
DBR-MRTD	粗网格	150 × 50	40.6	6.250	2.543%
	一般网格	300 × 100	244.6	6.125	0.492%
	细网格	600 × 200	1676.1	6.100	0.082%

### 3 结论

将基于Daubechies紧支集尺度函数的时域多分辨分析(MRTD)算法用于集成平面光波导组件的时域分析中, 并对平行介质带定向耦合器进行了数值模拟和验证, 所得结果与解析解非常一致. 与传统的FDTD算法相比, MRTD算法在不牺牲计算精度的前提下能够大大节省计算内存和计算时间, 可用于任意复杂结构的集成平面光波导组件的计算机辅助设计与分析.

### 参考文献

- 1 Van Roey J, Donk J V D, Lagasse P E. Beam propagation method: analysis and assessment. *J Opt Soc Am*, 1981, 71(7): 803 ~ 810
- 2 Huang W P, Xu C L, Chu S T, et al. The finite-difference vector beam propagation method: analysis and assessment. *IEEE J Lightwave Tech*, 1992, 10(3): 295 ~ 305
- 3 Chu S T, Chaudhuri S K. A finite-difference time-domain method for the design and analysis of guided-wave optical structures. *IEEE J Lightwave Tech*, 1989, 7(12): 2033 ~ 2038

- 4 Huang W P, Chu S T, Goss A, *et al.* A scalar finite-difference time-domain approach to guided-wave optics. *IEEE Photonics Tech Lett*, 1991, **3**(6): 524 ~ 526
- 5 孔繁敏, 李康, 郭毅峰, 等. 平面光波导结构的 FDTD 分析. *光子学报*, 2004, **33**(3): 281 ~ 283  
Kong F M, Li K, Guo Y F, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(3): 281 ~ 283
- 6 Krumpholz M, Katehi L P B. MRTD: New time-domain schemes based on multiresolution analysis. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 1996, **44**(4): 555 ~ 571
- 7 Tentzeris E M, Robertson R L, Harvey J F, *et al.* Stability and dispersion analysis of Battle-Lemarie-Based MRTD schemes. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 1999, **47**(7): 1004 ~ 1012
- 8 Cheong Y W, Lee Y M, Ra K H, *et al.* Wavelet-Galerkin scheme of time-dependent inhomogeneous electromagnetic problems. *IEEE Microwave Guided Wave Lett*, 1999, **9**(8): 297 ~ 299
- 9 Fujii M, Hofer W J R. Time-domain wavelet Galerkin modeling of two-dimensional electrically large dielectric waveguides. *IEEE Trans Microwave Theory Tech*, 2001, **49**(5): 886 ~ 892
- 10 Harrington R F. *Field computation by Moment Method*, Wiley-IEEE Press, 1993
- 11 Gedney S D. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for truncation of FDTD lattices. *IEEE Trans Antennas and Propagation*, 1996, **44**(12): 1630 ~ 1639
- 12 Okamoto K. *Fundamentals of Optical Waveguides*. Washington: Academic Press, 2000

## Analysis of Integrated Planar Optical Waveguide Components using MRTD Scheme

Kong Fanmin, Guo Yifeng, Li Kang, Liu Xin

*School of Information Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250100*

Received date: 2003-08-19

**Abstract** The multiresolution time-domain (MRTD) method based on Daubechies' compactly supported scaling functions has been applied in the time-domain analysis of integrated planar optical waveguide components. The anisotropic perfectly matched layer (APML) absorbing boundary condition for MRTD method has been implemented. The numerical simulations for the parallel-slab directional coupler are presented and the computing results using this scheme are in highly accordance with analytical solutions. Compared with conventional FDTD method, this scheme could save considerable computational resource without sacrificing solution accuracy.

**Keywords** Multiresolution time domain method; Anisotropic perfectly matched layer Integrated planar optical waveguide components



**Kong Fanmin** was born on March 23, 1969, in Shandong Province. He received Ph. D. degree from Department of Physics of Shandong University in 1999. Now he is an associate professor of Information Science and Engineering School at Shandong University. His research interests include numerical method in modeling and design of microwave and optical devices.