

PMD 分析中的 PMF 级联模型研究*

张慧剑¹ 孙学明^{1,2} 左萌¹ 顾皖仪¹

(1 北京邮电大学光通信中心,北京 100876)

(2 北京电子科技学院,北京 100070)

摘要 PMF 级联模型是进行 PMD 研究广泛采用的模型. 从 PMD 矢量在 Stokes 空间的运动入手, 推导出了 PMF 级联模型的 DGD 的统计分布并给出了整体特性与局部特性之间的关系, 所得结果用 JME 法验证是正确的. 最后通过误差分析, 提出了该模型的级联段数的选取原则. 所得结论可为 PMD 的仿真提供理论依据.

关键词 偏振模色散; PMD 矢量; 差分群时延; 主偏振态

中图分类号 TN929.11 **文献标识码** A

0 引言

光纤通信技术朝着长距离、高速率方向飞速发展, 现在单信道速率达到或超过 40 Gb/s 的 WDM 系统已成为可能. 在色度色散和非线性效应对传输性能的影响得到较好的解决后, 偏振模色散成为光通信发展的严重障碍. 对于 PMD 系数为 $0.5 \text{ ps}/\sqrt{\text{km}}$ (大量已敷光纤均为该值) 的光纤只考虑一阶 PMD 的影响, 40 Gb/s 信号的受限距离仅为 $25 \text{ km}^{[1]}$. 作为一种具有随机性的累积效应, PMD 的统计特性可由 Poole 动态微分方程得出, 但是推导过程相当复杂^[2]. 本文从 PMD 矢量在 Stokes 空间的运动入手, 利用热力学的相关理论推导出了 PMF 级联模型的 DGD 的统计分布及 PMD 系数与每段 PMF 的关系. 所得结果与文献[3]一致并与琼斯矩阵本征值方法吻合.

1 理论推导

PMD 模拟器 (PMDE) 普遍采用多段 PMF 级联的模型 (如图 1). 各段 PMF 长度均为 l_0 , 快慢轴时延差服从 $N(\Delta\tau_0, \sigma^2)$ 分布, 本征偏振态随机旋转,

即快轴 (或慢轴) 与固定坐标系的夹角服从 $(0 \sim 2\pi)$ 的均匀分布. 实验证明这样的 PMDE 产生的 DGD 服从 Maxwell 分布.

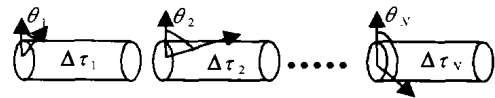


图 1 PMF 级联模型

Fig. 1 The PMF concatenated model

光纤的 PMD 效应可由 PMD 矢量 Ω 来描述, Ω 定义为

$$\Omega = \Delta\tau q$$

式中 $\Delta\tau$ 是 DGD; q 是单位偏振矢量, 表示快 PSP 的方向.

显然在图 1 的级联模型中, Ω 是随着段数 N 的变化而变化的并且模值 ($\Delta\tau$) 与方向 (q) 同时变化. 当 N 足够大, 主偏态 q 将弥漫整个邦加球. 图 2 给出了级联段数由 1 到 N 时, Ω 端点在 Stokes 空间运动的轨迹. 由图可以看出, Ω 在做无规则的随机运动. 实际上, 由于各段 PMF 的 $\Delta\tau_i$ 和 θ_i 均独立, Ω 的变化可视为独立增量过程且在一维 (q 不随 N 变化) 情况下其增量 $\Delta\tau^{(i+1)} - \Delta\tau^{(i)}$ 分布是正态的, 故 Ω 在 Stokes 空间的运动可按 Brown 运动处理.

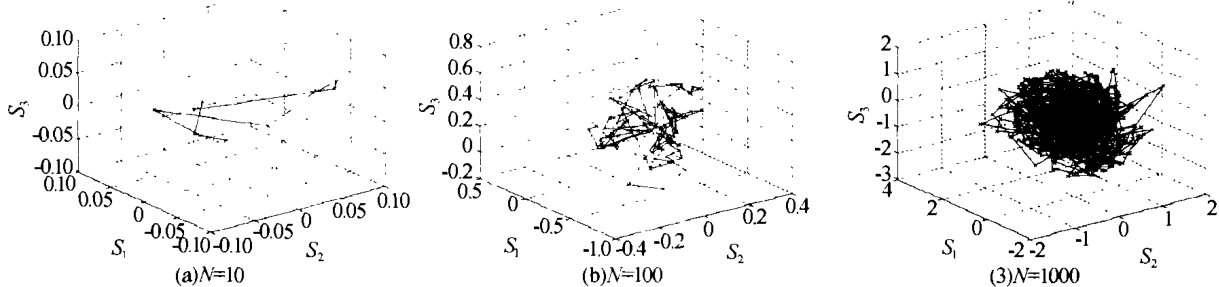


图 2 PMD 矢量在 Stokes 空间的运动

Fig. 2 The motion of PMD vector in Stokes space

令 $f(r, l)$ 为光纤长度为 l 时, Ω 在 r 处的概率密度; $\varphi(\Delta r)$ 为 l 增加到 $l + l_0$ 时, Ω 变化 Δr 的概率密度. 在距离 l_0 内, Ω 由 r_1 运动到 r 的概率密度为 $f(r_1)\varphi(r - r_1)$

*国家自然科学基金重点项目 (60132020, 60302026) 和国家 863 资助项目
Tel: 010-62283383 Email: zhj_79_0@263.net
收稿日期: 2003-07-21

同理, Ω 由 r 运动到 r_1 的概率密度为

$$f(r)\varphi(r_1-r)$$

据 Boltzmann 方程, 在 l_0 中 $f(r)$ 的增加为

$$\frac{\partial f}{\partial l} l_0 = \int_0^\infty f(r_1)\varphi(r-r_1)dr_1 - \int_0^\infty f(r)\varphi(r_1-r)dr_1 \quad (1)$$

式(1)的物理意义为, 左端表示 $f(r)$ 在光纤增长一小量 l_0 后的增量, 右端表示 Ω 由空间中所有点运动到 r 的概率与 Ω 由 r 运动到所有异于 r 的点的概率之差.

方程(1)进而可以化为

$$\frac{\partial f}{\partial l} l_0 = \int_0^\infty [f(r+r')-f(r)]\varphi(r')dr' \quad (2)$$

$\varphi(r)$ 应满足归一化条件

$$\int_0^\infty \varphi(r)dr = 1$$

及对称条件

$$\varphi(r) = \varphi(-r)$$

现在考虑一维(Ω 只在 x 轴上运动)的情况, 即相邻两段 PMF 的快轴夹角为 0 或 $\pi/2$. 如图 3, 要把 PMD 矢量的三维运动投影到 x 轴上.

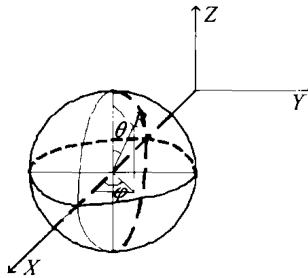


图 3 PMD 矢量的 3 维运动在一维轴上的投影
Fig. 3 The projection of the PMD vector's three-dimensional motion on one axis

以下讨论中 $x = \Delta\tau$. 方程(2)化为

$$\frac{\partial f}{\partial l} l_0 = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+x')-f(x)]\varphi(x')dx' \quad (3)$$

定义平均值

$$\langle \Delta x \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$$

$$\langle \Delta x^2 \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx$$

$\varphi(x)$ 的 x 范围应很小, Ω 产生大移动 x 的概率很小. 故式(3)中的积分可展为

$$\begin{aligned} f(x+x') &= f(x) + x' \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{1}{2!} (x')^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + \dots \\ \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+x')-f(x)]\varphi(x')dx' &= \langle x' \rangle \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \\ &\frac{1}{2!} \langle (x')^2 \rangle \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

方程(3)可化为

$$\frac{\partial f}{\partial l} - \frac{\langle \Delta x \rangle}{l_0} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{l_0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

式中

$$\langle \Delta x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(-\frac{(\Delta\tau - \Delta\tau_0)^2}{2\sigma^2} \right) d(\Delta\tau) \cdot$$

$$\int_{R=\Delta\tau} \frac{R \sin \varphi \cos \theta}{4\pi R^2} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(-\frac{(\Delta\tau - \Delta\tau_0)^2}{2\sigma^2} \right) \cdot$$

$$d(\Delta\tau) \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{R^3 \sin^2 \varphi \cos \theta}{4\pi R^2} d\theta d\varphi = 0$$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(-\frac{(\Delta\tau - \Delta\tau_0)^2}{2\sigma^2} \right) d(\Delta\tau) \cdot$$

$$\int_{R=\Delta\tau} \frac{(R \sin \varphi \cos \theta)^2}{4\pi R^2} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(-\frac{(\Delta\tau - \Delta\tau_0)^2}{2\sigma^2} \right) \cdot$$

$$d(\Delta\tau) \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{R^4 \sin^3 \varphi \cos^2 \theta}{4\pi R^2} d\theta d\varphi = \frac{\sigma^2 + (\Delta\tau_0)^2}{3}$$

将上面结果代入方程(4)得

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{1}{2} \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{l_0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\text{式中 } D = \frac{\sigma^2 + (\Delta\tau_0)^2}{6l_0}$$

此方程的解为

$$f(x, l) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dl}} \exp \left(-\frac{x^2}{4Dl} \right)$$

由此得

$$\langle x^2 \rangle = 2Dl$$

当 $l = l_0$ 时

$$\langle x^2 \rangle = \langle (\Delta x)^2 \rangle$$

若考虑 Ω 的三维运动, 则 Ω 在光纤长为 l 时在 (x, y, z) 处的概率为

$$\begin{aligned} f(x, y, z, l) &= f(x, l)f(y, l)f(z, l) = \\ &\left(\frac{1}{4\pi Dl} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{r^2}{4Dl} \right) \end{aligned}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 我们感兴趣的仅仅是 Ω 的模值即 $\Delta\tau (= r)$, 把上式概率密度对 $r = \Delta\tau$ 的球面积分, 得到 $\Delta\tau$ 的概率密度函数为

$$f(\Delta\tau, l) = 4\pi \left(\frac{1}{4\pi Dl} \right)^{3/2} (\Delta\tau)^2 \exp \left[-\frac{(\Delta\tau)^2}{4Dl} \right] \quad (5)$$

可以求得

$$\langle \Delta\tau \rangle = 4 \sqrt{\frac{Dl}{\pi}} = \sqrt{\frac{8N[\sigma^2 + (\Delta\tau_0)^2]}{3\pi}}$$

$$\langle (\Delta\tau)^2 \rangle = 6Dl = N[\sigma^2 + (\Delta\tau_0)^2]$$

$$\text{PMD 系数} = \frac{\langle \Delta\tau \rangle}{\sqrt{l}} = \sqrt{\frac{8N[\sigma^2 + (\Delta\tau_0)^2]}{3\pi l}} \quad (6)$$

由上面结果可看出整段光纤的 DGD 服从 Maxwellian 分布, 平均 DGD 与距离的 1/2 次方成正比, PMD 系数由每段 PMF 的特性决定.

为了简化模型, 取每一段 PMF 的 $\Delta\tau$ 为同一常数. 令式(6) $\sigma = 0$, 得

$$\text{PMD 系数} = \sqrt{\frac{8}{3\pi l_0}} \Delta\tau_0 = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \frac{\Delta\tau_0}{l_0} \sqrt{l_0} =$$

$$\sqrt{\frac{8}{3\pi}} \frac{\Delta n}{c} \sqrt{l_0}$$

式中 Δn 为两本征轴折射率差, c 为真空光速. 若 PMD 系数取典型值 $0.5 \text{ ps}/\sqrt{\text{km}}$, $l_0 = 1 \text{ km}$, 则 $\Delta n = 1.6281 \times 10^{-7}$, $\Delta\tau_0 = 0.5427 \text{ ps}$. 下一节中 JME 法与本文所得结果的比较采用的就是这组参数.

2 结果比较

琼斯矩阵本征分析法(JME)是一种普遍采用的

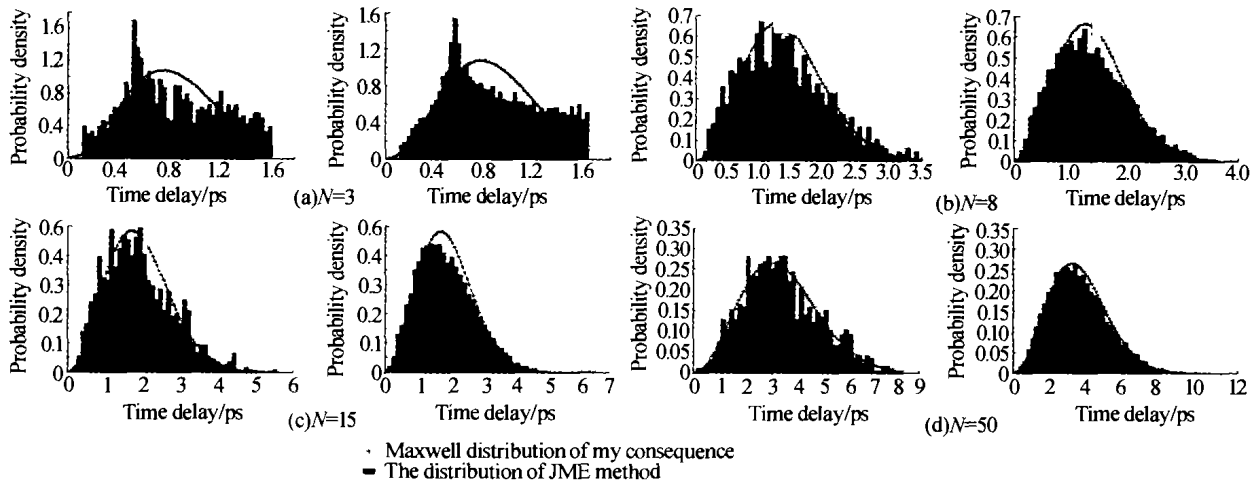


图4 图中曲线为本文所得 Maxwellian 分布, 条形图为采用 JME 法进行多次计算所得 DGD 分布. 第一列采样 1000 次, 第二列采样 10000 次

Fig. 4 The curve is the Maxwellian distribution derived in this paper, the bar diagram is the distribution of DGD which is calculated many times using the JME method. The sample times is 1000 in column 1 and 10000 in column 2

图4(a)中, 由 JME 法得到条形分布图与理论曲线相差较大. 这是因为段数太少级联模型所能产生的最大 DGD 也较小, 而理论曲线可以得到任意大的 DGD. 下面就如何选取该模型的级联段数作一些简单的分析.

L 和 N 分别表示级联模型的总长度和段数, 由上一节的结论, 每一段 PMF 的快慢轴时延差

$$\Delta\tau_0 = D_{\text{PMD}} \sqrt{\frac{3\pi L}{8N}}$$

平均 DGD

$$\langle DGD \rangle = D_{\text{PMD}} \sqrt{L}$$

DGD 满足的概率分布函数(5)可以化为以下形式

$$f(\Delta\tau) = \frac{32(\Delta\tau)^2}{\pi^2 \langle DGD \rangle^3} \exp\left[-\frac{4(\Delta\tau)^2}{\pi \langle DGD \rangle^2}\right]$$

当每一段 PMF 都是快-快耦合时, 该模型可以取到理论上的最大值

$$DGD_{\text{max}} = N\Delta\tau_0 = D_{\text{PMD}} \sqrt{\frac{3\pi LN}{8}} = \sqrt{\frac{3\pi N}{8}} \langle DGD \rangle \quad (7)$$

L 给定后, DGD_{max} 与 \sqrt{N} 成正比, N 应足够大, 使得概率

$$P\{DGD \leq DGD_{\text{max}}\} \langle P_\alpha \quad (8)$$

式中 P_α 为评价级联模型精确度的标准, P_α 越小则

且精度较高的 PMD 测量方法. 图4给出了 N 段级联模型采用琼斯矩阵本征分析法计算 DGD 的计算机仿真结果(条形图)与本文得到 Maxwellian 分布曲线的比较, 第一列条形图采样 1000 次得到, 第二列条形图采样 10000 次得到. 从图中可以看到, 随着级联段数的增加, 本文所得结论与 JME 的计算结果吻合的越来越好, 同时随着采样次数的增多, 分布也更加趋于稳定.

模型精确度越高, 它满足下式

$$P_\alpha = \int_{\alpha \langle DGD \rangle}^{\infty} \frac{32(\Delta\tau)^2}{\pi^2 \langle DGD \rangle^3} \exp\left[-\frac{4(\Delta\tau)^2}{\pi \langle DGD \rangle^2}\right] d(\Delta\tau) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{32(\Delta\tau)^2}{\pi^2} \exp\left[-\frac{4(\Delta\tau)^2}{\pi}\right] d(\Delta\tau) \quad (9)$$

对比式(8)、(9)

$$DGD_{\text{max}} \alpha \langle DGD \rangle$$

结合式(7)

$$N > \frac{8}{3\pi} \alpha^2$$

取 $P_\alpha = 10^{-12}$, 则 $N = 20$, 取 $P_\alpha = 10^{-15}$, 则 $N = 25$, 上面的广义积分的计算误差都比 P_α 小 3 个数量级.

3 结论

本文通过分析 PMF 随即旋转级联模型 PMD 矢量 Ω 在 Stokes 空间的运动, 得出了该模型 DGD 分布的概率密度并给出了整体 PMD 系数与各段 PMF 特性的关系, 所得结果与 JME 法计算结果一致. 这使得采用这种模型进行 PMD 研究更加方便, 比如可以方便的由整体 PMD 系数确定每一段 PMF 的双折射程度和长度, 或者由每一段的 PMD 参数确定整体的 PMD 参数以及在一定精度要求下需要选取的级联段数.

参考文献

- 1 高育选, 萧越, 李懋循. 偏振模色散对单模光纤系统的影响. 光通信研究, 2000, **102**(6): 53 ~ 56
Gao Y X, Xiao Y, Li M X. *Study on Optical Communication*, 2000, **102**(6): 53 ~ 56
- 2 Foschini G J, Poole C D. Statistical Theory of Polarization Dispersion in Single Mode Fiber. *Journal of Lightwave Technology*, 1991, **9**(11): 1439 ~ 1456
- 3 Poole C D, Favin D L. Polarization-Mode Dispersion Measurements Based on Transmission Spectra Through a Polarizer. *Journal of Lightwave Technology*, 1994, **12**(6): 917 ~ 929
- 4 阎吉祥, 魏光辉, 哈流柱, 等. 矩阵光学. 北京: 兵器工业出版社, 1995
Yan J X, Wei G H, Ha L Z, et al. *Matrix Optics*. Beijing: Weapon Industry Press, 1995
- 5 王岚, 赵文玉, 王宏祥, 等. 高速传输系统中高阶 PMD 的影响. 光子学报, 2002, **31**(8): 941 ~ 945
Wang L, Zhao W Y, Wang H X, et al. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(8): 941 ~ 945

Study of the PMF Concatenated Model in PMD Analysis

Zhang Huijian¹, Sun Xueming^{1,2}, Zuo Meng¹, Gu Wanyi¹

¹ *Optical Communication Center, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876*

² *Beijing Electronic and Science Technology Institute, Beijing 100070*

Received date: 2002-07-21

Abstract The PMF concatenated model is a popular model in PMD study. The DGD distribution of the model is derived in this paper by analyzing the motion of PMD vector in Stokes space and the relationship between the whole property and the local property is given. The result is validated by the JME method. The principle to determine the number of the PMF sectors is proposed through error analysis. The conclusion in this paper provides academic fundamental for the PMD simulation.

Keywords PMD; PMD vector; DGD; PSP



Zhang Huijian was born on September 25, 1979. He received the B. E. degree in Automation School from Beijing University of Posts and Telecommunications in 2001, entered Telecom School of BUPT for the M. E. degree in 2001. He will pursue his doctor degree directly in Center of Optical Communications of BUPT. He has been engaged in research on the key technologies of 40 G system since 2001.