

五次非线性对调制不稳定性的影响

任志君 王晶* 杨爱玲 王珍丽 王进

(中国海洋大学光学光电子实验室, 青岛 266071)

摘要 从扩展非线性薛定谔方程出发, 重点考虑了五次非线性对调制不稳定性的影响. 与过去的研究结论对比发现, 五次非线性影响着调制不稳定性发生的条件、频谱的范围及增益的大小.

关键词 调制不稳定性; 五次非线性

中图分类号 O437 **文献标识码** A

0 引言

由于调制不稳定性 (Modulational Instability, MI) 在高重复率超短光脉冲产生方面的重要作用^[1,2], 因此对它的研究引起了许多学者的注意^[3-5]. 在常用的石英光纤中, 当只考虑二阶色散时, MI 的发生仅限于光纤的反常色散区^[3]. 当脉冲在零色散波长附近, 二阶色散很小时, 必须考虑高阶色散的影响, 结果表明: 三阶色散对 MI 没有影响^[4]; 四阶色散不仅导致反常色散区产生新的 MI, 而且在正常色散区也产生了 MI^[5]. 当入射光脉冲在有高非线性系数的光纤 (例如掺杂半导体玻璃光纤) 中传输时, 五次非线性项必须考虑^[6-9]. 本文以包含了五次项的非线性薛定谔方程为基础, 进一步研究了光纤中的 MI, 并给出了五次非线性对 MI 的影响关系.

1 理论

在非线性介质中, 介质的折射率与入射光的光强有关: $n = n_0 + n_2 |E|^2 + n_4 |E|^4 + \dots$, 其中 $n_2 = 3\chi^{(3)}/(8n_0)$, $n_4 = 5\chi^{(5)}/(32n_0)$, $\chi^{(3)}$ 为三次非线性电极化率, $\chi^{(5)}$ 为五次非线性电极化率, 一般有 $\chi^{(3)} \gg \chi^{(5)}$, 因此非线性光纤中忽略 n_2 以后的项是合理的. 但当介质中非线性系数 n_4 较大时, 该项不能忽略; 或者, 当入射脉冲的能量很强时, 即使在 n_4 较小的石英光纤中, 五次非线性也必须考虑.

包含高阶色散和五次非线性的扩展薛定谔方程为^[6]

$$i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \gamma_1 |A|^2 A = i \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} + \frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4 A}{\partial \tau^4} - \gamma_2 |A|^4 A \quad (1)$$

式中 $A(z, \tau)$ 是慢变包络振幅, $\tau = t - \beta_1 z$ 是延迟时

间, z 为传输距离, β_j 是 j 阶群速度色散系数. γ_j 为非线性系数, $\gamma_j = \frac{n_i \omega}{c A_{\text{eff}}}$ ($j=1, 2, i=2, 4$), ω 为光波频率, c 为光速, A_{eff} 为有效纤芯面积, 在本文中, 由于五次非线性系数 γ_2 的引入, 为便于区别, 把过去文献中^[3-6]常用的非线性系数 (克尔系数) γ_1 称为三次非线性系数.

方程(1)的稳定解为: $\bar{A} = \sqrt{P} \exp[iP(\gamma_1 + P\gamma_2)z]$, 式中 P 为初始光强. 为了研究解的稳定性, 微扰该稳态, 设微扰项 $|a(z, \tau)| \ll \sqrt{P}$, 有

$$A = (\sqrt{P} + a) \exp[iP(\gamma_1 + P\gamma_2)z] \quad (2)$$

把式(2)代入式(1)并使 a 线性化, 有

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 a}{\partial \tau^3} - \frac{i}{24} \beta_4 \frac{\partial^4 a}{\partial \tau^4} - i\gamma_1 P(a + a^*) - 2i\gamma_2 P^2(a + a^*) = 0 \quad (3)$$

设微扰为: $a(z, \tau) = a_1 \exp[i(Kz - \Omega\tau)] + a_2 \cdot \exp[-i(Kz - \Omega\tau)]$, Ω, K 是微扰的频率和波矢, 把微扰代入式(3), 通过数学运算, 可得 K 和 Ω 满足的色散关系为

$$K = \frac{1}{6} \beta_3 \Omega^3 |\Omega| \pm \frac{i}{24} |\Omega| \{ -(\Omega^2 \beta_4 + 12\beta_2) \times [\beta_4 \Omega^4 + 12\beta_2 \Omega^2 + 48P\gamma_1 + 96P^2\gamma_2] \}^{1/2} \quad (4)$$

K 的虚部使微扰指数增长, 因此, 有虚数解是产生 MI 的前提. 由 MI 的增益定义: $g(\Omega) = 2\text{Im}(K)$ 可得

$$g(\Omega) = \frac{|\Omega|}{12} [-(\Omega^2 \beta_4 + 12\beta_2) \times (\Omega^4 \beta_4 + 12\beta_2 \Omega^2 + 48P\gamma_1 + 96P^2\gamma_2)]^{1/2} \quad (5)$$

由式(5)发现, 三阶色散对 MI 不起作用, 入射功率的大小, 二、四阶色散及三、五次非线性的大小及正负共同决定着 MI 产生的范围及大小. 这是一种复杂的函数关系, 下面我们分别予以讨论.

2 分析讨论

2.1 $\beta_4 = 0$ 时, γ_2 对 MI 的影响

此时忽略四阶色散, 只考虑二阶色散和非线性

*Tel: 0532-5901211 Email: wjing@mail.ouc.edu.cn
收稿日期: 2003-06-30

的作用. 由式(5), 可得增益为

$$g(\Omega) = |\beta_2 \Omega| \left(-\frac{4P\gamma_1}{\beta_2} - \frac{8P^2\gamma_2}{\beta_2} - \Omega^2 \right)^{1/2} \quad (6)$$

由式(6), 要有 MI 发生, 须有

$$-\frac{4P\gamma_1}{\beta_2} - \frac{8P^2\gamma_2}{\beta_2} > 0 \quad (7)$$

在本文的研究中, 我们假定 γ_1 恒为正, 针对于一般光纤材料的自聚焦特性, 这一假定是合理的.

当 $\gamma_2 = 0$ 时, 只有在光纤的反常色散区, 即 $\beta_2 < 0$ 时, MI 才能发生, 这与以往的研究结果完全相同^[3].

当 $\gamma_2 \neq 0$ 时, 在反常色散区, 式(7)的条件转化为 $\gamma_1 + 2P\gamma_2 > 0$. 当 $\gamma_2 > 0$ 时, 该式恒成立, 令 $\Omega_c^2 = \frac{4P\gamma_1}{|\beta_2|} + \frac{8P^2\gamma_2}{|\beta_2|}$, 由式(6)可知, 此时频谱的范围为 $\Omega^2 < \Omega_c^2$, 最大增益值 $g_{max} = 2P\gamma_1 + 4P^2\gamma_2$, 很明显, 五次非线性系数为正时, 增大了 MI 频谱的范围及增益值, 如图 1.

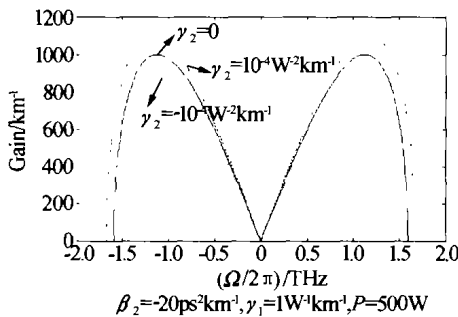


图 1 反常色散区调制不稳定性增益谱
Fig. 1 Gain spectra of the modulational instability in the regime of anomalous dispersion

当 $\gamma_2 < 0$ 时, 只有在 $\gamma_1 > 2P|\gamma_2|$ 时, 才有 MI 发生. 可见, 由于五次非线性的影响, 在光纤的反常色散区, MI 并非总能发生, 这与不考虑五次非线性的结果并不相同^[3]. 实际上, 一般的石英光纤中, $\gamma_1 \gg |\gamma_2|$; 只有那些由 $|\gamma_2|$ 较大的特定物质制造的光纤, 当入射功率很大时, 才有条件 $\gamma_1 < 2P|\gamma_2|$ 式的成立. 当式(7)的条件满足时, 由式(6)容易求得频谱的范围为: $\Omega^2 < \Omega_c^2 = \frac{4P\gamma_1}{|\beta_2|} - \frac{8P^2|\gamma_2|}{|\beta_2|}$, 最大增益值为 $g_{max} = 2P\gamma_1 - 4P^2|\gamma_2|$, 可见, 负的五次非线性系数减小了 MI 频谱的范围及增益值, 如图 1.

在光纤的正常色散区, 如果 $\gamma_2 = 0$ 时, 是不可能发生 MI 的. 但当 $\gamma_2 \neq 0$ 时, 由式(7), 只要五次非线性系数 γ_2 为负, 且有 $|\gamma_2| > \gamma_1/2P$ 时, 即使在光纤的正常色散区, 也同样能发生 MI, 如图 2. 这一性质为在光纤的正常色散区产生超短光脉冲串提供了思路, 因此在实际的应用中必将有重要的价值.

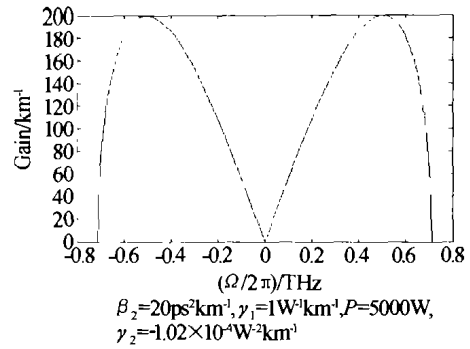


图 2 调制不稳定性增益谱
Fig. 2 Gain spectra of the modulational instability in the regime of normal dispersion

2.2 $\beta_2 = 0$ 时, γ_2 对 MI 的影响

当脉冲波长在零色散区时, 二阶色散为 0, 又由三阶色散对 MI 不起作用, 因而四阶色散成为主要的高阶色散项. 由式(5)可求得此时增益为

$$g(\Omega) = \frac{1}{12} |\Omega \beta_4|^2 \left(-\Omega^2 - \frac{48P\gamma_1 + 96P^2\gamma_2}{\beta_4} \right)^{1/2} \quad (8)$$

对照式(6)、(8), 发现当只考虑四阶色散时, $g(\Omega) \sim \Omega^4$; 而只考虑二阶色散时, $g(\Omega) \sim \Omega^2$. 可见, 在零色散区, 增益的大小更强烈的依赖于频谱. 至于五次非线性对增益的大小及频谱范围的影响, 分析办法与 2.1 的情况完全相同, 结论也基本差不多, 由于篇幅, 就不再赘述.

2.3 β_2, β_4 均不为零时, γ_2 对 MI 的影响

把式(5)写成

$$g(\Omega) = \frac{|\beta_4 \Omega|}{12} \left\{ -(\Omega^2 + 12 \frac{\beta_2}{\beta_4}) \times [\Omega^2 + 12 \frac{\beta_2}{\beta_4} \Omega^2 + 48 \frac{P(\gamma_1 + 2\gamma_2 P)}{\beta_4}] \right\}^{1/2} \quad (9)$$

为便于分析讨论, 我们把式(9)根号内的表达式写成 $(\Omega^2 - \Omega_1^2)(\Omega^2 - \Omega_2^2)(\Omega^2 - \Omega_3^2)$ 的形式, 经计算, 有 $\Omega_1^2 = -12(\beta_2/\beta_4)$, $\Omega_{2,3}^2 = -6(\beta^2/\beta_4) \pm (2/\beta_4) \sqrt{9\beta_2^2 - 12P\beta_4(\gamma_1 + 2P\gamma_2)}$, 由 $\Omega_j^2 > 0$, 必有

$$\beta_2/\beta_4 < 0 \quad (10)$$

$$9\beta_2^2 - 12P\beta_4(\gamma_1 + 12P\gamma_2) > 0 \quad (11)$$

从式(9)可知, 要有增益存在, 须有

$$(\Omega^2 - \Omega_1^2)(\Omega^2 - \Omega_2^2)(\Omega^2 - \Omega_3^2) < 0 \quad (12)$$

因此, 只有满足式(10)、(11)、(12)的情况下, MI 才能发生, 下面研究各参数对 MI 的影响时, 所有参数的选择必须满足这三个关系式.

由式(10)可知, β_2 和 β_4 符号必须相反, 因此下面的研究中, 我们根据 β_2 的正负分两大类分别讨论.

1) 在光纤的反常色散区

由 $\beta_2 < 0$, 故有 $\beta_4 > 0$, 当

$$\gamma_1 + 2P\gamma_2 > 0 \quad (13)$$

时, 有 $\Omega_1^2 > \Omega_2^2 > \Omega_3^2$, 要使式(12)成立, 必有 $0 < \Omega^2$

$< \Omega_3^2$ 或 $\Omega_1^2 < \Omega^2 < \Omega_2^2$, 即 MI 可发生在两个频率区, 我们把频谱较小的区域称为第一区域, 频谱较大的区域称为第二区域. 显然, 当 γ_2 增大时, Ω_1^2 不变, Ω_2^2 减小, Ω_3^2 增大. 可见, 第一区域高频谱端增大, 第二区域低频谱端不变, 高频谱端减小. $\gamma_1 + 2P\gamma_2 < 0$ 时, 有 $\Omega_3^2 < 0$, MI 不能发生.

利用式(11)、(13), 在其余的参数均给定的情况下, γ_2 必须满足: $\frac{-\gamma_1}{2P} < \gamma_2 < (\frac{3\beta_2^2}{4P\beta_4} - \gamma_1)/2P$.

2) 在光纤的正常色散区

由 $\beta_2 > 0$, 故有 $\beta_4 < 0$, 当时 $\gamma_1 + 2P\gamma_2 > 0$, $\Omega_2^2 < 0$, MI 不能发生. 当

$$\gamma_1 + 2P\gamma_2 < 0 \quad (14)$$

时, 有 $\Omega_1^2 > \Omega_3^2 > \Omega_2^2$, 要使式(12)成立, 必有 $0 < \Omega^2 < \Omega_2^2$ 或 $\Omega_3^2 < \Omega^2 < \Omega_1^2$, 同样 MI 可发生在两个频率区. 当增大 γ_2 时, Ω_1^2 不变, Ω_2^2 减小, Ω_3^2 增大. 可见, 第一区域高频谱端减小, 第二区域低频谱端增大, 高频谱端不变. 同样, 利用式(11)、(14), 此时 γ_2 必须

满足: $(\frac{3\beta_2^2}{4P\beta_4} - \gamma_1)/2P < \gamma_2 < -\frac{\gamma_1}{2P}$.

3 结论

本文在扩展非线性薛定谔方程的基础上, 重点考虑了五次非线性对调制不稳定性的影响. 结果表明: 入射功率, 二、四阶色散及三、五次非线性共同决定着 MI 产生的范围及大小. 在不同的情况中, 五次非线性所起的作用是不同的. 与过去的研究结论对比发现, 五次非线性影响着调制不稳定性发生的条件、频谱的范围及增益的大小. 特别值得一提的是, 当不考虑高阶色散时, 由于五次非线性的影响, 在一定条件

下, 光纤的正常色散区也能发生调制不稳定性.

参考文献

- 1 Hasegawa A. Generation of a train of soliton of pulses by induced modulational instability in optical fibers. *Opt Lett*, 1984, **9**(7): 288 ~ 290
- 2 Dianov E M, Mamyshey P V, Prokhorov A M, et al. Generation of a train of fundamental solitons at a high repetition rate in optical fibers. *Opt Lett*, 1989, **14**(18): 1008 ~ 1010
- 3 Agrawal G P 著, 贾东方, 余霞虹, 等译. 非线性光纤光学原理及应用. 北京: 电子工业出版社, 2002. 88 ~ 93
Agrawal G P, Translated by Jia Dongfang, Yu XiaHong. Nonlinear Fiber Optics & Applications of Nonlinear Fiber Optics. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2002. 88 ~ 93
- 4 Potasek M J. Modulation instability in an extended nonlinear schrodinger equation. *Opt Lett*, 1987, **12**(11): 921 ~ 923
- 5 Xu Wangcheng, Wen Shuangchun, Liu Songhao, et al. Modulation instability of optical pulses in long optical fibers with minimum group-velocity dispersion. *Chin Phys Lett*, 1997, **14**(6): 470 ~ 473
- 6 Davydova T A, Zaliznyak Y A. Schrodinger ordinary solitons and chirped solitons: fourth-order dispersive effects and cubic-quintic nonlinearity. *Physica D*, 2001, **156**: 260 ~ 282
- 7 Artigas D, Torner L, Torres J P, et al. Asymmetrical splitting of higher-order optical solitons induced by quintic nonlinearity. *Opt Comm*, 1997, **143**: 322 ~ 328
- 8 Pushkarov D, Tanev S. Bright and dark solitary wave propagation and bistability in the anomalous dispersion region of optical waveguides with third- and fifth-order nonlinearities. *Opt Comm*, 1996, **124**: 354 ~ 364
- 9 尚亚东. 带五次项的非线性 Schrodinger 方程的显示精确解析解. 纺织高校基础科学学报, 1999, **12**(4): 335 ~ 339
Shang Yadong. *Foundation Science Journal of Textile University*, 1999, **12**(4): 335 ~ 339

The Effect on Modulational Instability of Quintic Nonlinearity

Ren Zhijun, Wang Jing, Yang Ailing, Wang Zhenli, Wang Jin

Optical & Optoelectronics Laboratory, Ocean University of China, Qingdao 266071

Received date: 2003-06-30

Abstract It have been calculated effected on modulational instability of quintic nonlinearity from extended nonlinear Schrödinger equation in the papers. Contrasting to the former conclusion, it is found that quintic nonlinearity affects the condition of producing, the ranges of spectrum and the values of gain of modulational instability.

Keywords Modulational instability (MI); Quintic nonlinearity

Ren Zhijun (1974-), lecturer, graduated from the Department of Physics, Inner Mongolia University in 1996, received M. S. degree in Department of Physics, Ocean University of China. His research work is mainly about nonlinear fiber optics.

