

# 共轭梯度算法在画幅式层析成像光谱仪中的应用

赵振理<sup>1,2</sup> 马臻<sup>1</sup> 李英才<sup>1</sup>

(1 中科院西安光学精密机械研究所空间室, 西安 710068)

(2 中国科学院研究生院, 北京)

**摘要** 介绍了画幅式层析成像光谱仪的基本原理及共轭梯度算法, 解决了共轭梯度法在实际应用中的几个问题, 如图像分割, 先验算子的引入. 通过对实际数据的计算, 得到了  $95 \times 95$  的像素, 28 个波段的数据立方体. 实际证明本算法及程序在层析成像光谱仪上的应用是成功的.

**关键词** 层析成像光谱仪; 共轭梯度法 (CG 算法); 系统投影矩阵

**中图分类号** TP731 **文献标识码** A

## 0 引言

画幅式层析光谱仪能够对目标进行光谱成像, 它既能得到目标的二维空间信息, 同时也能得到景物的光谱信息. 文献[1]将成像光谱仪采集到的二维空间和一维光谱信息称为数据立方体 (Data Cube). 在成像光谱仪中, 画幅式层析成像光谱仪的优势在于, 对于推扫或挥扫的成像光谱仪, 其一次曝光时间只能获取数据立方体的一个切面或线条, 通过扫描的方式获取整个数据立方体. 对于光谱和空间瞬变的景物进行光谱成像时, 扫描过程可能导致像的模糊或失真.

画幅式层析成像光谱仪能够很好地克服上述缺陷, 它在一次曝光时间内获取的数据能重构全部的三维数据立方体. 与色散型或干涉型成像光谱仪不同的是, 画幅式层析成像光谱仪在平行光路里加入一二维正交光栅, 通过光栅的衍射, 一次曝光时间获取的是数据立方体的多个投影方向的投影图像, 由这些投影图像可以重构数据立方体. 其工作方式和面阵相机一样, 但能够对二维景物进行光谱成像.

## 1 画幅式层析成像原理

画幅式层析成像光谱仪的原理图如图 1<sup>[2]</sup>. 由物镜、视场光阑和准直镜组成望远系统, 二维正交光栅在平行光路里, 由于衍射效应, 它把一束光线衍射成多束光线, 并除中央 0 级衍射外, 其它都是色散开的. 成像镜将光栅衍射的多路光线成像在 CCD 像面上, CCD 接收到的是由 0 级和 1 级衍射组合的 9 个投影像, 其中 (0,0) 级为中央 0 级衍射, 是没有色散的, 但由于光栅在该级衍射的衍射效率随波长变化而变化, 对该级衍射的光束成像得到的图像与普通相机拍摄的图像在几何特征上基本一样, 在灰度

上略有差别.

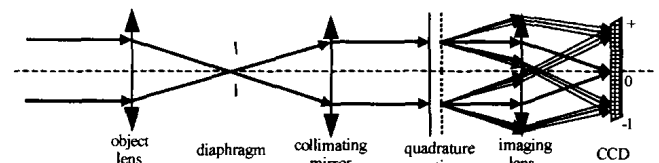


图 1 画幅式层析成像光谱仪光学系统

Fig. 1 The optic system of scope-tomography imaging spectrometry

光栅衍射等同于将数据立方体在多个投影方向上进行投影, 投影方向为光栅的衍射角, 而 CCD 像面接收的多个投影像等同于数据立方体在衍射方向的多个投影, 其原理见图 2, 中央 (0,0) 级衍射的投影像与普通照相机得到的图像相似.

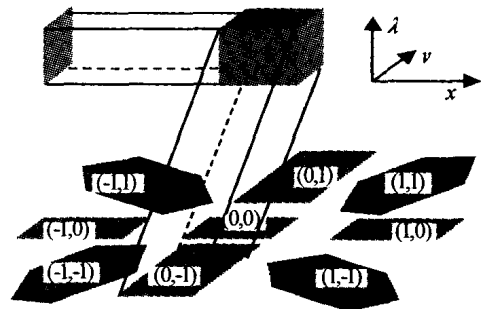


图 2 与光栅衍射相对应的数据立方体投影图

Fig. 2 The projection of he data cube

根据数字图像理论, 为该系统建立以下模型<sup>[2]</sup>

$$g = H \times f + n \quad (1)$$

式中,  $n$  为系统噪声,  $g$  为焦平面探测器上得到的测量值构成的  $N_d$  维向量,  $f$  为数据立方体的离散数据点构成的  $N_s$  维向量, 矩阵  $H$  的每一列向量对应数据立方体的每个离散数据点  $(x, y, \lambda)$  在探测器面上的归一化点源响应, 或者说是其每一个元素  $H_{mn}$  是数据立方体的第  $n$  个离散元素被第  $m$  个探测器像元探测到的概率<sup>[3]</sup>, 它可由理论推导, 也可由试验测量.

此外, 为了满足方程的超定条件, 投影矩阵的行数  $N$  至少要大于列数  $M$ . 为此, 并不直接求解方程 (1), 而是求解其法方程. 对式 (1) 两边同左乘  $H^T$

$$H^T g = (H^T \times H)f + H^T n \tag{2}$$

令  $M = H^T H, G = H^T g, N = H^T n$ , 式(2)变为

$$G = M \times f + N \tag{3}$$

式(3)的极小范数解为

$$f = M^+ G + M^+ N \tag{4}$$

$M^+$  为  $M$  的 Moore-Penrose 广义逆. 我们可以采用奇异值分解法求  $M^+$ , 式(4)所求解也是式(1)的极小范数最小二乘解.

## 2 共轭梯度算法

由于公式(1)是一个病态方程,  $H$  为一巨型稀疏矩阵 (Sparse matrix), 方程组的解不是唯一的, 且不同的算法有不同的收敛方向以及最终收敛解. 国际上原先一般采用迭代法求解, 如 Jacobi, GS, SOR, SSOR, Chebyshev 迭代法等. Young<sup>[4]</sup> 和 Varga<sup>[5]</sup> 对此进行了细致的描述与探讨, 但直接使用这些迭代法已显得收敛速度太慢, 而且对 SOR, SSOR, Chebyshev 半迭代法依赖于最优参数的选取, 从而限制了这些方法的高效使用. 当代用来求解大型方程组(1)的最有效的方法之一是共轭梯度法 (Conjugated Gradient Method 简称为 CG).

在这里先简介一下共轭梯度法<sup>[6]</sup>. 所谓共轭梯度法, 即: 利用在点  $x^k$  处的梯度来构造共轭方向, 并在该共轭方向收敛至最终解.

若不考虑先验算子, CG 算法的公式可表述如下<sup>[7]</sup>:

首先对各  $f_j$  设正初始值  $f^{(0)} = [f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_N^{(0)}]^T$ , 可得  $r^{(0)} = G - Hf^{(0)}$ , 取  $p^{(1)} = r^{(0)}$ , 即最速下降方向.

然后, 进行迭代求解, 直到满足收敛条件. 对迭代次数  $k = 1, 2, 3, \dots$ , 可顺次得出

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{\langle r^{(k-1)}, p^{(k)} \rangle}{\langle p^{(k)}, Hp^{(k)} \rangle} = \frac{\langle r^{(0)}, p^{(k)} \rangle}{\langle p^{(k)}, Hp^{(k)} \rangle} = \frac{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle p^{(k)}, Hp^{(k)} \rangle} \\ f^{(k)} = f^{(k-1)} + \alpha_k p^{(k)} \\ r^{(k)} = G - Hf^{(k)} = r^{(k-1)} - \alpha_k Hp^{(k)} \\ \beta_{k+1} = \frac{-\langle r^{(k-1)}, Hp^{(k)} \rangle}{\langle p^{(k)}, Hp^{(k)} \rangle} = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle} \\ p^{(k+1)} = r^{(k)} + \beta_{k+1} p^{(k)} \end{cases} \tag{5}$$

利用式(5), 针对一般的形如  $Ax = b$  的方程有下列 CG 算法<sup>[8]</sup>

如果  $A \in R^{n \times n}$ , 且对称正定,  $b \in R, x_0 \in R$  为初始近似值 ( $Ax \approx b$ ), 则下列算法可计算出最终解.

$$\begin{aligned} k &= 0 \\ r_0 &= b - Ax \\ \text{while } r_k &\neq 0 \\ k &= k + 1 \end{aligned}$$

if  $k = 1$

$$p_1 = r_0$$

else

$$\beta_k = r_{k-1}^T r_{k-1} / r_{k-2}^T r_{k-2}$$

$$p_k = r_{k-1} + \beta_k p_{k-1}$$

end

$$\alpha_k = r_{k-1}^T r_{k-1} / p_k^T A p_k$$

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$$

$$r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k$$

end

$$x = x_k$$

实际上, 这是式(1)在不考虑系统噪声  $n$  的影响时所采取的算法, 当然也可以说是其法方程(3)在不考虑噪声项  $N$  时的算法. 但是在实际工作中, 针对画幅式层析成像光谱仪这个系统, 不可避免的会有系统噪声. 这时, 引入误差函数

$$J_\alpha(f) = \|Hf - g\|^2 + \alpha Q(f) \tag{6}$$

$Q(f)$  为作用在未知向量上的先验限制算子, 包括取值范围、平滑滤波、切趾等.  $\alpha$  为调谐因子, 它控制先验条件和误差项对估计值的修正的加权系数.

CG 算法便是一种迭代算法, 它求解未知向量的估计值  $f^{(k)}$ , 使得误差函数在梯度方向趋向最小,  $k$  为迭代次数. 那么 CG 算法的迭代修正公式为

$$f^{(k)} = f^{(k-1)} + \lambda \frac{\partial J_\alpha(f)}{\partial f} \tag{7}$$

$\lambda$  为松弛参数, 它控制迭代收敛速度, 取值范围为  $0 \sim 2$ .

## 3 实际应用及试验结果

我们设计制作了一套画幅式层析成像系统, 具体参数为:

- 光谱范围:  $0.48 \sim 0.83 \mu\text{m}$ ;
  - 谱段数: 32;
  - 光谱图像分辨率:  $95 \times 95 \times 32$ ;
  - CCD 有效像元数:  $510 \times 510$ ;
  - 衍射光栅: 二维正交光栅
- 从试验中得到的数据为:

1) 一幅大小为  $507 \times 507$  的投影图像  $I_m$ , 它由 9 幅 0、1 级的衍射图像组成, 具体位置参照图 3;

2) 系统投影矩阵  $H$ , 由于画幅式层析成像系统是一个投影系统, 它必然包括了数据立方体对不同衍射级的投影矩阵  $M_i$ ,  $H$  的计算方法在前面已经表述.

首先对  $I_m$  进行分析,  $I_m$  是在一片 CCD 上得到的图像, 但是在层析成像中, 它被理解成由数据立方体经过不同方向投影而得到图像, 要使用 CG 算法得到数据立方体必须将  $I_m$  准确分解开, 而且不破坏图像的原有信息. 其次, 考虑系统投影矩阵  $H$ , 同样

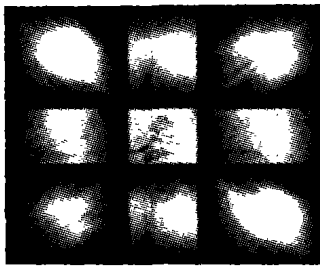


图3 CCD 得到图像  $I_m, 507 \times 507$

Fig. 3 The image  $I_m$  from CCD,  $507 \times 507$

的道理,数据立方体是经过我们设计的衍射系统投影而成  $I_m$ , 每一个矩阵元素对 9 幅投影图像都有贡献,那么  $H$  就应该包括每个矩阵元素对每幅投影图像的点扩散函数,并且经过归一化,在迭代重构计算数据立方体之前要针对每一个投影图像  $I_i$ , 分离  $H$  得到每个元素对不同图像的投影矩阵  $M_i$ .

具体的分割方法是:找到针对目标图像或矩阵的目标元素设定索引向量,直接对一个新的图像或矩阵进行赋值.

我们曾经使用过从图像  $I_m$  和  $H$  中直接提取目标元素,但是经过上机仿真试验比较后,得出结论:索引向量方法的处理速度较之直接法更为快速且准确,充分利用了 Matlab 的寻址功能. 具体分割结果见图 4.

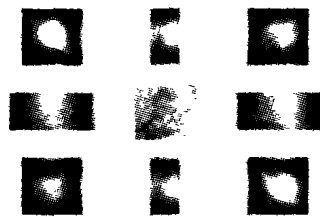


图4 将  $I_m$  分割成  $I_i$

Fig. 4 Images which are divided from

在作好前期准备后,进入 CG 算法. 第一步,设置迭代初始值,即用 0 级投影图像构成初始数据立方体. 第二步,用不同的投影图像  $I_i$  和投影矩阵  $M_i$  进行 CG 迭代,需要注意的是:在引入先验算子方面,由于系统噪声大多表现为信号的高频部分,经过多种方案的比较,引入了较为快速的 laplase 高通算子来获得系统噪声,首先获得初始数据立方体的高频噪声,再对修正量  $P$  进行卷积获得经过共轭梯度

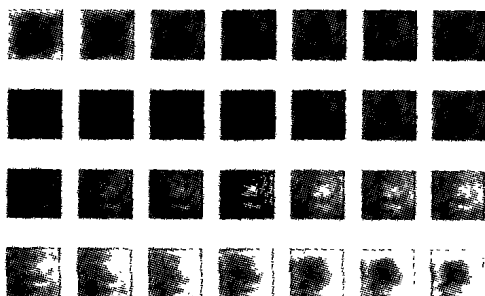


图5 最后复原有数据立方体的展开图,空间分辨率:  $95 \times 95$ , 谱段数:28

Fig. 5 Final result of CG algorism, spatial resolution:  $95 \times 95$ , spectral bands: 28

计算后的高频噪声,并对两个高频噪声进行内积,这样就可以避免高频部分经计算后引起的收敛方向误差,从而得到准确的迭代过程解,并通过反复循环. 经仿真实验,CG 算法在迭代 10 次后,已无必要进一步迭代,所得结果已经是在共轭方向上的最终结果,见图 5.

### 4 结论

共轭梯度算法是近十年来在最优化计算领域具有巨大生命力的方法,实践表明共轭梯度法是属于效果好、用途广的方法. 它的收敛速度较快且不须计算二次梯度,对于画幅式层析成像仪的问题来说是很好的选择,经过试验与上机计算,得到的数据立方体的速度在半小时以内,图像质量较好,客观的说整个过程比较成功.

但是在该算法的基础上仍然有改进的可能特别是在先验限制算子的引入以及步长因子方面,只是由于时间有限没有进行进一步的研究与上机试验.

### 参考文献

- 1 相里斌,赵葆常. 空间调制干涉成像光谱技术. 光学学报,1998,18(1):18~22  
Xiangli B, Zhao B C. *Acta Optica Sinica*, 1998, 18(1):18~22
- 2 刘良云. 计算层析成像光谱技术的研究[博士学位论文]. 西安:中国科学院西安光学精密机械研究所, 2000. 24~26  
Liu L Y. The Research of Computing Tomography Imaging Spectrometry Technology[ Ph. D thesis ], XIOPM, 2000. 24~26
- 3 刘良云,相里斌,杨建峰,等. 计算层析成像光谱仪的仿真研究. 光学学报,2000,20(6):805~809  
Liu L Y, Xiangli B, Yang J F, et al. *Acta Optica Sinica*, 2000, 20(6):805~809
- 4 Young D M, Jea K C. Generalized conjugate-gradient acceleration of non-symmetrical iterative method. *Lin Alg Appl*, 1980, 34(2):159~194
- 5 Varga R S. *Matrix Iterative*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall INC. 1992. 115~142
- 6 陈开周编著. 最优化计算方法. 西安:西北工业大学出版社, 2001. 75~86  
Chen Kaizhou. *Optimized Arithmetic*. Xi'an: Northwestern Polytechnic University Press, 2001. 75~86
- 7 胡家贛著. 线性代数方程组的迭代解法. 北京:科学出版社, 1997. 173~192  
Hu Jiagan. *The Iterative Algorism of Linear Equations*. Beijing: Science Press, 1977. 173~192
- 8 Golub G H, Van Loan C F, 袁亚湘等译. 矩阵计算. 北京:科学出版社, 2001. 58~134  
Golub G H, Van Loan C F, translated by Yuan Yaxiang. *Matrix Computing*. Beijing: Science Press, 2001. 58~134

## The Application of Conjugated Gradient Method in Scope-tomography Imaging Spectrometry

Zhao Zhenli, Ma Zhen, Li Yingcai

*Space Optics Laboratory, Xi'an Institute of Optics and Precise Mechanics, Xi'an, Shaanxi 710068*

Received date: 2004-01-02

**Abstract** The principle of Scope-Tomography Imaging Spectrometry and the Conjugated Gradient Method are introduced, and several problems in the CG method, such as diversion of CCD image, using of pre-operator, are resolved. The spectral images consisting  $95 \times 95$  spatial pixels and 28 spectral bands are obtained, by computing the datas. The result proves that the application of conjugated gradient method in scope-tomography imaging spectrometry is valid and succeed.

**Keywords** Tomography imaging spectrometry; Conjugated gradient method; System-projected matrix

**Zhao Zhenli** was born on December 8, 1976, in the city of XuZhou, Jiangsu Province, P. R. China. He earned Bachelor of Engineering in University of Science and Technology of China in 1999. Now, he works in Xi'an Institute of Optics and Precise Mechanics, Chinese Academy of Sciences, as an associate engineer. His major research fields include theory and experiment and application of tomography imaging spectral technology.

