

单模激光系统线性化近似适用范围的分析*

程庆华^{1,2} 曹力¹ 吴大进¹ 徐大海²

(1 华中科技大学激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

(2 荆州师范学院物理系, 荆州 434100)

摘要 采用线性化近似方法计算了具有实虚部关联的量子噪声和泵噪声驱动的单模激光损失模型的光强相对涨落, 为了对线性化近似的适用范围进行详细的分析, 分别讨论了量子噪声强度、泵噪声强度、量子噪声实虚部间关联系数对光强相对涨落的影响, 得出在小噪声、远离阈值时, 线性化近似适用范围扩大; 小噪声、远离阈值且当量子噪声实虚部无关联时, 线性化近似适用范围极大的结论。

关键词 单模激光; 光强相对涨落; 线性化近似

中图分类号 TN241 **文献标识码** A

0 引言

激光器在工作时总是伴随有涨落出现, 人们认为通常由两种噪声引起激光场的涨落, 一种是自发辐射的量子噪声, 以加法噪声形式体现; 另一种为泵噪声, 以乘法噪声形式体现, 近年来研究噪声及其关联对激光动力学性质的影响是人们关注的重要课题。为了进一步描述激光器工作时的真实情况, 人们考虑了噪声之间的不同关联形式, 并对噪声极其不同关联对激光系统统计性质的影响进行了一系列的研究^[1-5], 许多研究者为了克服解光场的朗之万方程时非线性项带来的数学处理困难, 采用线性化近似方法来计算反映激光动力学性质的光强关联函数、光强相对涨落、功率谱等物理量^[6,7], 很自然线性化近似方法的适用范围受到了人们的关注^[8], 有必要对线性化近似的适用范围进行讨论, 以利于激光动力学理论和应用技术^[9,10]的发展。

本文在考虑量子噪声实部和虚部之间关联的情况下, 用线性化近似方法计算了单模激光损失模型的光强关联函数 $C(t)$ 和光强相对涨落 $C(0)$, 为了对线性化近似方法的适用范围进行详细的分析, 分别讨论了量子噪声强度 Q 、泵噪声强度 P 、量子噪声实虚部间关联系数 λ_q 对光强相对涨落 $C(0)$ 的影响, 得出在小噪声、远离阈值时, 线性化近似方法适用范围扩大; 小噪声、远离阈值且量子噪声实虚部间无关联时, 线性化近似方法适用范围极大的结论。

1 单模激光损失模型的光强关联函数及光强相对涨落

单模激光损失模型的光强朗之万方程为^[4]

$$\frac{dI}{dt} = 2a_0I - 2AI^2 + P(1 - |\lambda_q|) + 2I p_R(t) + 2\sqrt{I}\varepsilon_r(t) \quad (1)$$

激光系统的噪声满足的统计性质为

$$\begin{aligned} \langle p_R(t) \rangle &= \langle \varepsilon_r(t) \rangle = 0 \\ \langle p_R(t)p_R(s) \rangle &= Q\delta(t-s) \\ \langle \varepsilon_r(t)\varepsilon_r(s) \rangle &= P(1 + |\lambda_q|)\delta(t-s) \\ \langle p_R(s)\varepsilon_r(t) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

式(1)和式(2)中, a_0 、 A 分别表示净增益系数和自饱和系数; $p_R(t)$ 为泵噪声实部; ε_r 为位相锁定后的量子噪声; P 、 Q 分别是量子噪声强度和泵噪声强度; $-1 \leq \lambda_q \leq 1$ 是量子噪声实虚部之间的关联系数。

设 $I = I_0 + \delta(t)$, 其中 $\delta(t)$ 为微扰项, 将方程(1)

在稳定态 $I_0 = \frac{a_0}{A}$ 附近线性化得

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = -\gamma\delta(t) + 2I_0 p_R(t) + 2\sqrt{I_0}\varepsilon_r(t) + P(1 - |\lambda_q|) \quad (3)$$

式中 $\gamma = 2a_0$ 。

根据归一化光强关联函数的定义

$$C(t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{\langle I(t')I(t'+t) \rangle - \langle I(t') \rangle^2}{\langle I(t') \rangle^2}$$

代入 $I_0 = a_0/A$ 和 $\gamma = 2a_0$, 计算出单模激光损失模型的光强关联函数为

$$C(t) = \frac{A^2 P^2 (1 - |\lambda_q|)^2}{4a_0^4} + \left(\frac{Q}{a_0} + \frac{AP(1 + |\lambda_q|)}{a_0^2} \right) e^{-2a_0|t|} \quad (4)$$

*国家自然科学基金(批准号: 10275025)、湖北省教育厅重点科研项目(自然科学类)资助课题(项目编号: 2003A001)

Tel: 0716-8497162 Email: qhcheng@jznu.net

收稿日期: 2003-09-12

光强的相对涨落为

$$C(0) = \frac{A^2 P^2 (1 - |\lambda_q|)^2}{4a_0^4} + \frac{Q}{a_0} + \frac{AP(1 + |\lambda_q|)}{a_0^2} \quad (5)$$

2 线性化近似方法适用范围的析

一般认为光强的相对涨落满足条件 $C(0) \ll 1$ 是线性化近似方法适用的条件. 若设

$$C(0) = \frac{A^2 P^2 (1 - |\lambda_q|)^2}{4a_0^4} + \frac{Q}{a_0} + \frac{AP(1 + |\lambda_q|)}{a_0^2} \leq k \quad (6)$$

式(6)中 k 为线性化近似方法适用需要满足的精确度, 解上述不等式可以得出在确定精确度 k 下满足条件(6)的参数取值范围. 方程(6)关于 a_0/A 的解一共有四个, 在讨论阈值上 ($a_0/A > 0$) 的情况时, 仅取其中一个有意义的解, 但由于方程(6)的解过于烦琐, 我们引入函数 $\rho(P, Q, A, \lambda_q, k)$ 来表示其解析式, 将满足式(6)的参数取值范围表示为

$$\frac{a_0}{A} \geq \rho(P, Q, A, \lambda_q, k) \quad (7)$$

下面取不同的精确度 k 值进行讨论.

2.1 精确度为 $k = 10^{-2}$ 时线性化近似的适用范围

2.1.1 在 a_0/A 和量子噪声强度 P 的参数图下的析

在 $k = 10^{-2}$ 的条件下, 图1是满足式(7)的参数图, 图中以量子噪声实虚部间关联系数 λ_q 为参数, 由式(7)取等号绘出了 a_0/A 与量子噪声强度 P 的关系曲线, 曲线上方区域对应的光强相对涨落 $C(0)$ 满足式(6). 从图1可以看出, $|\lambda_q|$ 取值越小, $C(0)$ 满足式(6)的范围越大, 当 $\lambda_q = 0$ 时, $C(0)$ 满足条件(6)的区域极大, 故量子噪声实虚部之间无关联时线性化近似适用的范围极大.

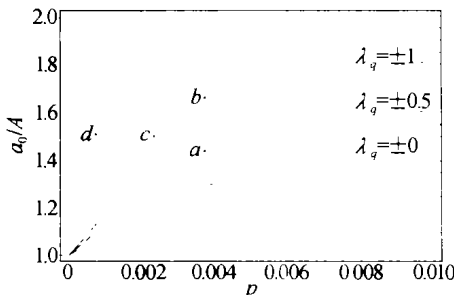


图1 $k = 10^{-2}$ 时 a_0/A 和 P 的函数曲线, $A = 1, Q = 0.01$

Fig.1 Parameter plan ($a_0/A, P$) of variance of the laser intensity

$C(0)$ for the precision $k = 10^{-2}$ with $A = 1, Q = 0.01$

在图1中对任一确定的量子噪声强度 $P = 0.005$ 取不同 $a_0/A > 0$ (阈值上) 的两个点 a, b , 从图1中可以看出, 若设 a 点的量子噪声实虚部间关联系数为 λ_{qa} , 则 a 点对应的 $C(0)$ 在 $|\lambda_q| \leq \lambda_{qa}$ 范围内

满足条件(6), b 点对应 $C(0)$ 的对所有 λ_q 的取值均满足条件(6), 用上述两个点对应的参数 a_0/A 由式(5)绘出光强的相对涨落 $C(0)$ 随量子噪声实虚部间关联系数 λ_q 的函数曲线如图2. 分析图2可以发现, 1) 随着 a_0/A 的增大整条 $C(0)$ 随 λ_q 的函数曲线下移, 说明越远离阈值光强的相对涨落 $C(0)$ 越小. 例如对应 a 点的曲线, 光强相对涨落 $C(0)$ 的取值范围小于 1.07×10^{-2} , 增大 a_0/A 至 b 点对应的曲线, $C(0)$ 的取值范围下降为小于 10^{-2} . 2) a, b 两点对应的 $C(0)$ 随 λ_q 的函数曲线在 $\lambda_q = 0$ 处有极小值, 说明远离阈值且量子噪声实虚部间无关联时光强的相对涨落极小, 线性化方程在此条件下有较高的精度.

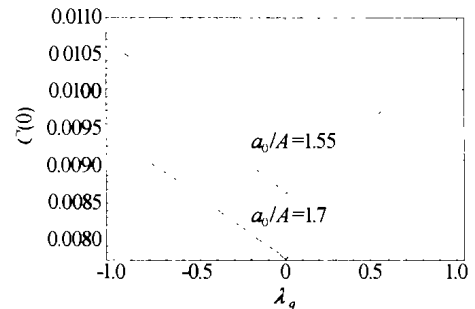


图2 图1中 a, b 两点对应的 $C(0)$ 和 λ_q 的函数曲线

$A = 1, Q = 0.01, a$ 点: $a_0/A = 1.55, P = 0.005$,
 b 点: $a_0/A = 1.7, P = 0.005$

Fig.2 The $C(0)$ versus λ_q with $A = 1, Q = 0.001, P = 0.005$, and $a_0/A = 1.55$ and $a_0/A = 1.77$ corresponding to point a and b in Fig. 1, respectively

在图1中对任一确定的 $a_0/A = 1.5$ 取量子噪声强度 P 不同的三个点 a, c, d , 从图1中可看出, 若设 a 点量子噪声实虚部间的关联系数为 λ_{qa} , 则 a 点对应的 $C(0)$ 在 $|\lambda_q| \leq \lambda_{qa}$ 范围内满足条件(6), c, d 两点对应的 $C(0)$ 对所有的 λ_q 取值满足条件(6), 用上述三个点对应的参数 P 由式(5)绘出光强的相对涨落 $C(0)$ 随量子噪声实虚部间的关联系数 λ_q 的函数曲线如图3. 分析图3可以发现, 1) 当 a_0/A 不变时, 随着量子噪声强度 P 的减小整条 $C(0)$ 随 λ_q 的

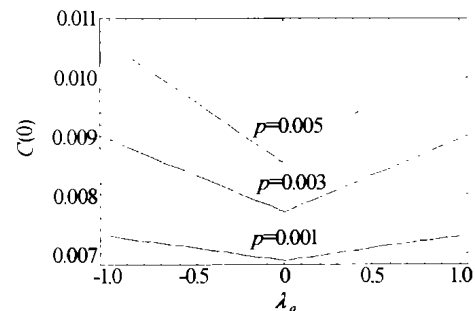


图3 图1中 a, c, d 三点对应的 $C(0)$ 和 λ_q 的函数曲线

$A = 1, Q = 0.01, a$ 点: $a_0/A = 1.55, P = 0.005, c$ 点:
 $a_0/A = 1.55, P = 0.003, d$ 点: $a_0/A = 1.55, P = 0.001$

Fig.3 The $C(0)$ versus λ_q with $A = 1, Q = 0.01, a_0/A = 1.55$ and $P = 0.005, P = 0.003$ and $P = 0.001$ corresponding to point a, c and d in Fig. 1, respectively

函数曲线下移,说明 P 越小光强的相对涨落 $C(0)$ 越小. 例如对应 a 点的曲线,光强涨落 $C(0)$ 的取值范围小于 1.07×10^{-2} ;减小 P 至 d 点对应的曲线, $C(0)$ 的取值范围下降到小于 0.75×10^{-2} . 2) a, c, d 三点对应的 $C(0)$ 随 λ_q 的关系曲线在 $\lambda_q = 0$ 处均有极小值,说明量子噪声强度 P 小且量子噪声实虚部间无关联时光强的相对涨落极小,线性化方程在此条件下有较高的精度.

2.1.2 在 a_0/A 和泵噪声强度 Q 的参数图下的分析
 用与 2.1.1 相同的方法同样可以在 $a_0/A - Q$ 参数图下对线性化近似的适用范围进行分析. 下面省略画出参数图的具体讨论,仅给出分析结果:我们发现,泵噪声强度减小、远离阈值、量子噪声实虚部间关联减弱时,线性化近似适用范围扩大;泵噪声强度小且量子噪声实虚部间无关联时光强的相对涨落极小,线性化方程在此条件下有较高的精度.

2.2 精确度为 $k = 10^{-4}$ 时线性化近似的适用范围

若减小 k 的取值(提高近似精确度),取 $k = 10^{-4}$ 时,图 4 是满足式(6)的参数图,图中以量子噪声实虚部间的关联系数 λ_q 为参数,由式(6)取等号绘出了 a_0/A 与量子噪声强度 P 的关系曲线,曲线上方区域对应的光强相对涨落 $C(0)$ 满足式(6)的范围. 比较图 1 和图 4 可以看出,在所有其它参数取值范围相同的情况下,若 k 的取值减小, a_0/A 与 P 的关系曲线变化规律不变,但整条曲线上移,使 $C(0)$ 满足式(6)的范围减小,表明在噪声强度不变的条件,近似精确度大大提高后,离阈值很远线性化近似才是正确的.

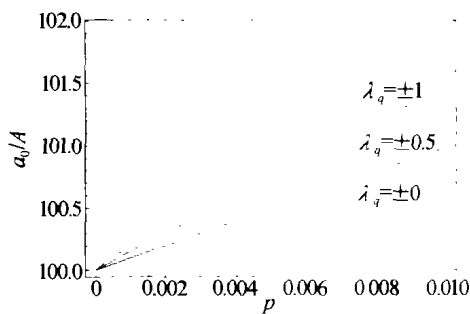


图 4 $k = 10^{-4}$ 时 a_0/A 和 P 的函数曲线, $A = 1, Q = 0.01$

Fig. 4 Parameter plan ($a_0/A, P$) of the $C(0)$ for the precision $k = 10^{-4}$ with $A = 1, Q = 0.01$

取 $k = 10^{-4}$ 时,图 5 是满足式(6)的参数图,图中以量子噪声实虚部间的关联系数 λ_q 为参数,由式(6)取等号绘出了 a_0/A 与泵噪声强度 Q 的关系曲线,曲线上方区域对应的光强相对涨落 $C(0)$ 满足式(6)的范围. 从图 5 可以看出,近似精确度提高以后,当泵噪声强度 Q 增加时 a_0/A 急剧增加,此时离阈值较远 ($a_0/A \gg 1$) 时线性化近似是适用的. 在图 5 中,三条 $|\lambda_q|$ 取值不同的曲线基本重合,说明此

时量子噪声实虚部间的关联系数 λ_q 对 $C(0)$ 满足式(6)的参数取值范围影响不大,即对线性化近似的适用范围影响不大.

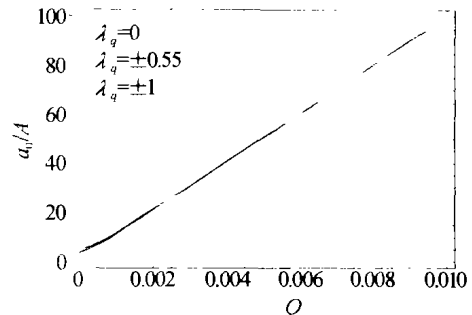


图 5 $k = 10^{-4}$ 时 a_0/A 和 Q 的函数曲线, $A = 1, P = 0.001$

Fig. 5 Parameter plan ($a_0/A, Q$) of the $C(0)$ for the precision $k = 10^{-4}$ with $A = 1, P = 0.001$

3 结论

由 2.1 和 2.2 的讨论可知,在小噪声、远离阈值、量子噪声实虚部间关联减弱时,线性化近似的适用范围扩大;在小噪声、远离阈值且 $\lambda_q = 0$ 时,光强的相对涨落极小,即线性化近似的适用范围极大;如果在其它参数取值范围不变的条件下,减小 k 欲使精确度提高时,则要求更进一步远离阈值线性化近似才是正确的.

参考文献

- 1 Fulinski A, Telejko T. On the effect of interference of additive and multiplicative noise. *Phys Lett (A)*, 1991, **152**(1~2): 11~14
- 2 Cao L, Wu D J. Stochastic dynamics for systems driven by correlated noise. *Phys Lett (A)*, 1994, **185**(1): 59~64
- 3 Zhu S Q. Steady-state analysis of a single-mode laser with correlations between additive and multiplicative noise transient properties. *Phys Rev (A)*, 1993, **47**(3): 2405~2408
- 4 Ke S Z, Cao L, Wu D J. General laser intensity langevin equation in a single-mode laser model. *Chin Phys Lett*, 2001, **18**(3): 370~372
- 5 Zhang L, Cao L, Wu D J. New amplitude equation of single-mode laser. *Chin Phys*, 2003, **12**(01): 33~38
- 6 Zhou X J, Cao L, Wu D J. Statistical properties of the output light intensity in a single-mode laser driven by correlated noises. *Chin Phys Lett*, 1998, **15**(3): 183~185
- 7 Zhang L Y, Cao L, Wu D J, et al. Stochastic resonance in linear regime of a single-mode laser. *Chin Phys Lett*, 2003, **20**(1): 25~27
- 8 Hernandez-Garcia E, Toral R, San Minguel M. Intensity correlation functions for the colored gain-noise model of dye lasers. *Phys Rev (A)*, 1990, **42**(11): 6823~6830
- 9 徐朝阳, 谭石慈, 邢达, 等. 低强度激光照射巨噬细胞对其免疫活性的影响. *光子学报*, 2003, **32**(3): 246~266

Xu Z Y, Tan S C, Xing D, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(3):246 ~ 266

10 郑瑞伦, 刘俊, 等. 强激光辐射下金属材料表面热力学效

应. *光子学报*, 2002, **31**(4):480 ~ 484

Zheng R L, Liu J, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(4):480 ~ 484

Analyses of Valid Range for the Linear Approximation in a Single-mode Laser

Cheng Qinghua^{1,2}, Cao Li¹, Wu Dajin¹, Xu Dahai²

1 *State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430070*

2 *Department of Physics, Jingzhou Normal University, Jingzhou 434100*

Received date: 2003-09-12

Abstract Adopting the linear approximation method, the variance of the intensity is correlated in a loss model of a single-mode laser driven by pump noise and quantum noise with cross-correlated real and imaginary parts. Moreover, the valid range for the linear approximation method, the influences on the variance of the laser intensity by the intensities of the pump noise and quantum noise, and the cross-correlation coefficient between the real and imaginary parts of the quantum noise is discussed respectively. The valid range is extended in the case of small noises and far from threshold, and the valid range is the largest in case of small noises, far from threshold, and no correlation between the real and imaginary parts of the quantum noise.

Keywords Single-mode laser; Variance of the laser intensity; Linear approximation method



Cheng Qinghua was born on Oct. 1 1957, in Tianmen, Hubei Province. She graduated from Jingzhou Teachers College in 1979. She received her M. S. degree in theoretical physics from Huazhong Normal University in 2000. Now she is an associated professor in the department of physics, Jingzhou Teachers College. She has been doing optics teaching and research work. Her major research fields include laser physics and nonlinear dynamics.