

一维非均匀 Kerr 介质的传输矩阵算法*

陈历学 丁卫强 李文惠 张 宇 宋璞林 刘树田

(哈尔滨工业大学应用物理系, 哈尔滨 150001)

摘 要 研究了一维非均匀 Kerr 介质的子层逆向递推传输矩阵算法, 给出了数值实现方案. 此方法可以方便而精确地模拟非均匀 Kerr 介质的传输行为. 应用此算法模拟一维 Kerr 缺陷光子晶体的光学双稳开关过程时, 得出了和非线性时域有限差分方法相一致的结果.

关键词 Kerr 介质; 非线性; 传输矩阵

中图分类号 O437 **文献标识码** A

0 引言

光学三阶非线性一直是非线性光学的重要研究课题. 由于难以获得完全解析解, 因此, 三阶非线性介质的数值计算一直是一个非常重要的研究方法. Kerr 介质是常用的三阶非线性介质, 在光学开关和孤子理论中被广泛研究. 时域有限差分 (FDTD) 数值方法是 Maxwell 时空矢量微分方程的差分解法, 是一种十分有效的数值模拟方法. 在使用 FDTD 方法处理 Kerr 介质时, 必须引入附加的非线性差分方程, 构成非线性的时域有限差分 (NFDTD) 方法. 处理 Kerr 介质非线性附加差分方程的常用方法有如下三种. 最简单的方法是直接迭代. 第二种方法是文献[1]中使用的绝热跟随近似, 求解三次方程来得到电场和电位移之间的关系. 第三种方法是文献[2,3]中发展的快速响应 Kerr 介质的 FDTD 方法, 获得附加的非线性差分方程. FDTD 方法的最大问题是要求内存容量大, 而且计算量巨大, 尤其对于开关的全过程模拟. 傅里叶变换 - 光束传播方法 (FFT - BPM), 是一种分裂步方法, 在两个计算格点之间的传播距离内, 将介质看作线性介质, 使用傅里叶变换方法计算光束的传播, 然后在格点处考虑非线性介质的作用. 但是传统的分裂步方法采用了慢变化包络近似, 同时也不能处理反射问题. 文献[4,5]报道的分裂步算法并没有使用慢变化包络近似, 同时可以处理反射. 但是这一算法是一个标量模型, 同时计算工作量和时域有限差分方法相当. 在文献[6]中, 作者使用了基于分层介质正向递推的非线性传输矩阵方法, 从输入端到输出端的正向递推的试探算法, 在给定输入光和试探反射光时, 在输出端反向传播为零的条件下, 证明试探反射光的

正确性并得到输出光. 但是, 对于非线性的光学双稳态过程, 一个输入对应多个输出, 因此试探算法容易遗漏多值数输出.

本文在文献[6]的基础上, 给出处理一维非均匀 Kerr 介质的子层逆向递推传输矩阵算法. 在给定一个输出光的条件下, 通过每一个子层, 由输出端向输入端逆向递推, 得到输入光和反射光, 克服了文献[6]的试探算法遇到的麻烦. 为验证此方法的有效性, 我们考察了一维 Kerr 缺陷光子晶体的双稳态, 得到了和已知 NFDTD 算法相一致的结果. 从而证明了非线性传输矩阵方法的正确性.

1 数值算法模型

一维非均匀 Kerr 介质的折射率分布为 $n(x)$, Kerr 系数分布为 $\eta(x)$, 非均匀介质的输入一侧的折射率为半无限大介质 (折射率 n_i), 输出一侧的折射率为 n_o . 如图 1 所示. 文献[2]和[3]所描述的 Kerr 介质缺陷的光子晶体以及文献[5]所描述的分布型 Kerr 介质光子晶体是非均匀 Kerr 介质的一个特殊情形.

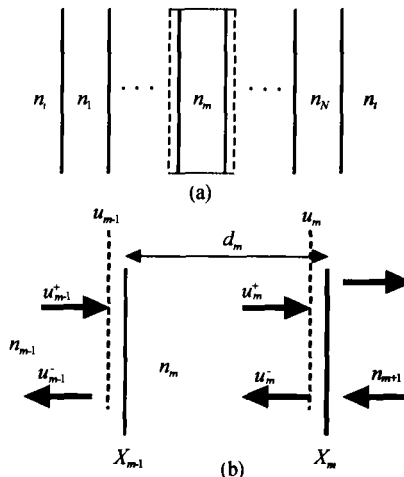


图 1 (a) 非均匀 Kerr 介质被分成 N 个均匀子层, (b) 显示 (a) 中的虚线标识部分

Fig. 1 (a) The N sublayers of an inhomogeneous Kerr medium, (b) Showing the dotted lined part in (a)

*国家自然科学基金重大项目 (No. 90101028)

Email: clx@hit.edu.cn

收稿日期: 2003-05-06

对于非均匀 Kerr 介质,由于折射率随局部光强 $I(x)$ 变化,即

$$n(x) = n^{(0)}(x) + \eta(x)I(x) \quad (1)$$

式中 $I = nc\epsilon_0 |E|^2/2$ 为光强, n 折射率, c 真空光速, E 光波振幅. 因此,折射率是随坐标和局部光强而可以任意变化的,从而不能使用普通的传输矩阵方法求解. 为了解决这一问题,我们采用分割子层的方法,即将非均匀介质 $n(x)$ 分解成为 N 个厚度为 $\Delta x = x_m - x_{m-1} = d_m$ 无限小的子层,在厚度为 d_m 的子层内,折射率 n_m 可以看作是均匀的,因此在每一子层中光强也看作是均匀的,即可以看作均匀层. 使用传输矩阵方法处理. 第 m 均匀子层内在单色波垂直入射条件下,电场可以分解为沿 $+x$ 和 $-x$ 两个方向传播的平面波之和,即

$$E_m(x, t) = u_m^+(x) e^{-i\omega t} + u_m^-(x) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

式中 $u_m^+(x) = f_m^+ e^{ik_m x}$ 和 $u_m^- = f_m^- e^{-ik_m x}$ 为沿正负 x 方向传播的平面波随空间变化部分, f_m^+ 和 f_m^- 为振幅, k_m 为光波在第 m 层的波矢. 在一个交界面两侧的平面 X_{m-1} 和 X_m 处(如图 1 所示, X_{m-1}, X_m 紧挨两相邻交界面右侧),应用电磁场的边界条件,得到电场空间部分满足如下关系

$$\begin{pmatrix} u_m^+ \\ u_m^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\beta_m} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ b_m & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{m-1}^+ \\ u_{m-1}^- \end{pmatrix} \quad (3a)$$

其中

$$a_m = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_{m-1}}{n_m} \right) \quad (3b)$$

$$b_m = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_{m-1}}{n_m} \right) \quad (3c)$$

$$\beta_m = k_m d_m = \frac{2\pi}{\lambda} n_m d_m \quad (3d)$$

方程(3)有很明显的物理意义:光在分层结构沿垂直分层方向传播,当其通过界面时,振幅将发生由菲涅耳公式决定的突变;而在均匀层内传播时仅改变相位. 方程(3a)可以改写为

$$\begin{pmatrix} u_m^+ \\ u_m^- \end{pmatrix} = M^{(m)} \begin{pmatrix} u_{m-1}^+ \\ u_{m-1}^- \end{pmatrix} \quad (4a)$$

式中

$$M^{(m)} = \begin{pmatrix} A_m & B_m \\ B_m^* & A_m^* \end{pmatrix} \quad (4b)$$

$$A_m = a_m e^{i\beta_m} \quad (4c)$$

$$B_m = b_m e^{i\beta_m} \quad (4d)$$

式中系数 A_m 和 B_m 取决于 m 和 $m-1$ 层中的光强. 因此需要知道光强在子层的分布,才能在相邻子层之间递推. 对于 Kerr 介质结构,一个输入可能对应两个甚至两个以上的输出(光学双稳和多稳态),这

要取决于 Kerr 介质内光强的分布. 也就是说,从输入端递推到输出端的过程中会出现多值现象,从而给计算带来麻烦. 但是,对于每一个确定的输出光,只有一个输入光. 因此本文采用给定透射光来反推待定的入射和反射光,即所谓逆向递推方法. 为此,将方程(4a)改写为

$$\begin{pmatrix} u_{m-1}^+ \\ u_{m-1}^- \end{pmatrix} = \overline{M}^{(m)} \begin{pmatrix} u_m^+ \\ u_m^- \end{pmatrix} \quad (5a)$$

$$\overline{M}^{(m)} = \frac{1}{D_m} \begin{pmatrix} A_m^* & -B_m \\ -B_m^* & A_m \end{pmatrix} \quad (5b)$$

式中 $D_m = |A_m|^2 - |B_m|^2$, 而 A_m 和 B_m 由方程(4c)和(4d)给出. 令

$$u_m = u_m^+ + u_m^- \quad (6)$$

利用方程(4)和(5)得

$$u_{m-1} = \frac{1}{D_m} [(A_m^* - B_m^*) u_m^+ + (A_m - B_m) u_m^-] = \exp[-j\beta_m] u_m^+ + \exp[j\beta_m] u_m^- \quad (7)$$

式(7)的推导过程中使用了关系式 $a_m - b_m = D_m$. 因此,通过将矩阵求逆的方法,由第 m 层的光场分布 u_m 反推出第 $m-1$ 层的光场 u_{m-1} ,再利用方程(1)和(3d)求得第 $m-1$ 层的折射率 n_{m-1} 和相位 β_m . 这样,从 m 层到 $m-1$ 的传输矩阵元 A_m, B_m 和 D_m 都表示为已知量(u_m^+, u_m^-)的函数,因此根据方程(5)可以逆推出(u_{m-1}^+, u_{m-1}^-). 这样,从第 $m-1$ 层 Kerr 介质中的光场分布,可以反向逆推出了相邻的第 m 层 Kerr 介质的光场分布.

根据方程(4),可以写出任意多的均匀子层和交界面所组成的周期结构的传输矩阵. 当考虑整个结构时,可以得出入射光,反射光和透射光之间的关系为

$$\begin{pmatrix} u_i \\ u_r \end{pmatrix} = \overline{M} \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8a)$$

$$\overline{M} = \overline{M}^{(0)} \overline{M}^{(1)} \dots \overline{M}^{(N)} \overline{M}^{(b)} \quad (8b)$$

$$\overline{M}^{(b)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_{N+1}/n_t & 1 - n_{N+1}/n_t \\ 1 - n_{N+1}/n_t & 1 + n_{N+1}/n_t \end{pmatrix} \quad (8c)$$

式中 M 为所有层的传输矩阵之积. 从方程(8)可以解出振幅透射率反射率分别为

$$t = u_t/u_i = \overline{M}_{11}^{-1} \quad (9a)$$

$$r = u_r/u_i = \overline{M}_{21} \overline{M}_{11}^{-1} \quad (9b)$$

根据以上的理论推导,可以给出数值上的实现方法.

1) 首先由给出的 u_t , 利用矩阵 $\overline{M}^{(b)}$ 求解出 u_N^+ 和 u_N^- .

2) 由方程(1)求出 n_N , 并且由方程(3d)计算 β_N .

3) 令 $m = N$.

4) 由方程(7)计算 u_{m-1} , 由方程(1)计算 n_{m-1} , 由方程(3d)计算 β_{m-1} .

5) 由方程(3b)和(3c)计算 a_{m-1} 和 b_{m-1} .

6) 由方程(4c)和(4d)计算 A_m 和 B_m .

7) 由方程(5a)计算 u_{m-1}^+ 和 u_{m-1}^- .

8) 令 $m = m - 1$, 返回到第 4 步继续上述过程, 直到 $m = 0$.

给定一个透射光 u_t , 就可以根据上述过程递推得到入射和反射光, 同时也得到了光强在 Kerr 介质内部的分布. 注意到, 此方法中的唯一近似是子层的分割过程, 但只要子层的分割足够密, 此误差就可以降低到所要求的精度.

2 在光学双稳开关模拟中的应用

为了验证此上述非线性传输矩阵方法的有效性, 我们将其应用于参考文献[2]中曾经研究过的具有 Kerr 介质缺陷的一维光子晶体. 该光子晶体是一个高低折射率介质周期排列结构, 中心夹杂一层 Kerr 介质作为缺陷. 低折射率层的折射率 $n_L = 1.2$, 光学厚度为 $\lambda_0/4$, 高折射率层的折射率 $n_H = 2.4$, 光学厚度为 $\lambda_0/4$. Kerr 介质两侧各有两个周期. Kerr 介质的线性折射率 $n = 2.35$, 光学厚度为 $2.35\lambda_0/2.4$, 非线性 Kerr 系数选择为 $\eta = 1.20 \times 10^{-9}$, 保证了文献[2]中选择的 $\chi^{(3)}$ 值具有同样大小的非线性效应.

图 2(a) 中实线为非线性传输矩阵方法的结果, 而虚线为 NFDTD 方法所得到的输入-输出关系曲线, 都表现出典型的双稳态特性. 从图中可以看出上跳的阈值约为 2700 KW/m^2 , 下跳阈值为 1200 KW/m^2 . 两种算法符合很好. 证明了我们的非线性传输矩阵方法的可行性.

从图中可以看到, 非线性传输矩阵方法和非线性有限差分时域方法各有其特点. 显然, 非线性传输矩阵方法是一个稳态算法, 因此, 忽略了光子晶体的驰豫过程, 也忽略了 Kerr 介质的响应过程, 因此它不能考察器件的动力学行为, 如开关过程, 过冲等等, 但是, 开关阈值非常清楚. NFDTD 方法来自于 Maxwell 方程, 因此, 它可以模拟器件的动力学过程, 图中的曲线充分地描述了开关过程和过冲过程. 但是 NFDTD 方法在阈值的辨认方面却不是十分清晰. 如果在 NFDTD 算法中延长入射三角波脉冲的时间长度, 则 NFDTD 描述的开关过程更接近非线性传输矩阵方法描述的稳态开关突变, 两种方法得到的曲线吻合得更好一些, 如图 2(b) 所示. 图 2(a) 中的输入脉冲长度为大约 $1 \times 10^4 T$ (T 为入射光波的周

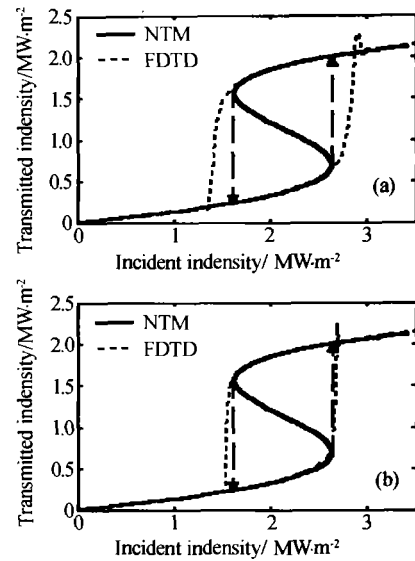


图 2 NFDTD 算法得到的一维 Kerr 缺陷光子晶体的双稳态响应(虚线)与本文中的非线性传输矩阵方法(NTM)得到结果(实线)的比较. 入射光场的频率为 $0.998\omega_0$, NFDTD 算法中的入射三角波脉冲的时间长度分别为 (a) $10000T$ and (b) $40000T$, 其中 T 为光波周期

Fig. 2 Transmitted intensity of 1D photonic crystal with Kerr defect as a function of the incident intensity simulated by the method of the NFDTD algorithm (dotted line) and the NTM in this paper (solid line), respectively. The frequency of incident light is $0.998\omega_0$, and temporal length of the incident triangular wave is (a) $10000T$, (b) $40000T$, respectively, where T is the period of incident light

期)而在图 2(b)中为 $4 \times 10^4 T$. 但是, 动态过冲过程不会因为入射三角波的加长而消失, 只是过冲峰变窄而已. 就计算工作量而言, 非线性传输矩阵方法的计算量和 NFDTD 相比较简直可以忽略.

3 结论

本文采用了分割子层的方法和从输出端反向递推入射端光场的方法, 推导了非线性传输矩阵算法和其数值实现过程. 此方法可以方便处理一维 Kerr 介质结构对光强的稳态响应结果. 得到的模拟结果的精度完全可以和 NFDTD 方法相媲美, 但是计算工作量却是非常之小, 因此, 在不考虑动力学过程时, 本文讨论的 Kerr 介质非线性传输矩阵方法是一种十分有用的方法.

参考文献

- 1 Tran P. Photonic-band-structure calculation of material possessing Kerr nonlinearity. *Phys Rev(B)*, 1995, **52**(15): 10673 ~ 10676
- 2 Chen L X, Deng X X, Ding W Q, et al. Finite-difference time-domain analysis of optical bistability with low threshold in one-dimensional nonlinear photonic crystal with Kerr medium. *Opt Commu*, 2002, **209**(4-6): 491 ~ 500
- 3 Chen L X, Deng X X, Ding W Q, et al. Low threshold

- bistable switching by the nonlinear one-dimensional photonic crystal. *Chi Phys Lett*, 2002, **19**(6): 798 ~ 800
- 4 Scalora M, Haus J W, Soon B Y, *et al.* Coupled-mode equations for Kerr media with periodically modulated linear and nonlinear coefficients. *J Opt Soc Am(B)*, 2002, **19**(9): 2282 ~ 2291
- 5 Scalora M, Crenshaw M E. A beam propagation method handles reflections. *Opt Commu*, 1994, **108**(4-6): 191 ~ 196
- 6 He J, Cada M. Combined distributed feedback and Fabry-Perot structures with a phase-matching layer for optical bistable devices. *Appl Phys Lett*, 1992, **61**(18): 2150 ~ 2152
- 5 Scalora M, Crenshaw M E. A beam propagation method

Transfer Matrix Algorithm of One-dimensional Inhomogeneous Kerr Medium

Chen Lixue, Ding Weiqiang, Li Wenhui, Zhang Yu, Song Yinglin, Liu Shutian

Department of Applied Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin, 150001

Received date: 2003-05-06

Abstract Transfer matrix algorithm for one-dimensional inhomogeneous Kerr medium is studied. The method of sub-layer division and backward recursion is put forward. And numerical realization method is also given out. It's very convenient to simulate the transfer behavior of one-dimensional Kerr medium. Optical bistable switching of 1D photonic crystal with Kerr defect is investigated by this method, and the results are well agree with that of nonlinear finite difference in time domain.

Keywords Kerr medium; Nonlinear; Transfer matrix



Chen Lixue graduated from Tsinghua University, Beijing, PRC, in 1970. He received the M. S. degree and the Ph. D. degree in Optics from Harbin Institute of Technology, Harbin, PRC, in 1981 and in 1986, respectively. He became a vice professor in 1986, and a professor in 1990 in Department of Applied Physics of Harbin Institute of Technology. His main research fields are nonlinear optics, including nonlinear photonic switching, photonic circuit, nonlinear optical signal and image processing, dynamic instability in nonlinear system and laser system.