

数字全息图变频采样研究

蔡晓鸥¹ 王辉² 李勇²

(1 温州师范学院物理与电子信息学院, 浙江温州 325003)

(2 浙江师范大学信息光学研究所, 金华 321004)

摘要 根据 Whittaker-Shannon 抽样定理, 对菲涅耳全息图进行变频率采样, 保证整个全息图各部分采样频率为该处相应空间频率的两倍, 从而完全消除数字全息图由于采样冗余而带来全息图的信息冗余. 并且, 对变频采样后的全息图进行线性插值恢复即可获得良好的再现像质. 实验和理论均证明了该方法的有效性和可行性, 为全息图的信息存贮与传输提出一条新的思路.

关键词 数字全息图; 变频采样; 空间频率; Whittaker-Shannon 抽样定理

中图分类号 TB877 **文献标识码** A

0 引言

随着计算机技术的飞速发展, 利用计算机制全息图在立体显示方面的应用已引起了国内外研究机构的极大关注^[1-3], 例如全息电视, 全息打印机等. 但是, 作为一种通讯用的立体显示技术, 全息图记录的立体信息非常庞大(传输一路全息电视图象需要2-3百千兆赫以上的带宽^[4]), 若要使具有庞大信息量的全息图应用于实际传输进而实现全息的实时显示, 首先必须考虑的是信息的压缩、存储、再现及再现像质的评价^[5,6]. 信息量压缩与信息存储是计算机制全息付诸于实践的关键所在.

根据 Whittaker-Shannon 抽样定理^[7], 对于一个有限带宽的函数, 当它的采样频率是它最大频率的两倍时, 该函数可以由采样所得的抽样值唯一确定. 再由全息图的光栅结构可以得知, 全息图上局部空间频率是不同的, 为了不损失全息图的信息, 一般计算全息的采样频率以全息图所具有的最大频率为准, 这样带来的结果是大部分的低频区域的采样也是高频采样, 使得全息图的冗余信息庞大. 我们提出对数字全息图进行变频率采样, 从而使得整个全息图上局部采样频率为该处相应空间频率的两倍, 从而完全消除数字全息图由于采样冗余而带来全息图信息存储的巨大冗余. 本文采用对相应全息图进行相邻数值比较判断, 确定相应的空间频率及采样频率, 从而使得信息存储量大大地减少, 为全息图的信息存贮与传输提出一条新的思路.

1 变频采样全息图的制作原理

1.1 Whittaker-Shannon 抽样定理

抽样是制作计算全息图的一个重要和必不可少的步骤. 利用梳状函数对连续函数 $f(x, y)$ 抽样, 抽样函数 $f_s(x, y)$ 由 δ 函数的阵列构成.

$$f_s(x, y) = \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{\Delta y}\right) * f(x, y) \quad (1)$$

式中: Δx 和 Δy 是在 x 和 y 方向的抽样间隔, 利用卷积定理, 抽样函数的频谱为

$$F_s(\xi, \eta) = \text{FFT}\left\{\text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \text{comb}\left(\frac{y}{\Delta y}\right)\right\} * f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\xi - \frac{n}{\Delta x}, \eta - \frac{m}{\Delta y}\right) \quad (2)$$

可知: 若 $f(x, y)$ 是有限带宽函数, 其频谱在空间频域的一个有限区域上不为零. 记 $2B_x$ 和 $2B_y$ 是这个有限区域在 ξ, η 方向上的宽度, 则只要抽样间隔 $\Delta x \leq \frac{1}{2B_x}$ 及 $\Delta y \leq \frac{1}{2B_y}$, 则 $F_s(\xi, \eta)$ 中的各个频谱就不会出现混叠现象, 即可用滤波的方法从 $F_s(\xi, \eta)$ 中分离出原函数的频谱 $F(\xi, \eta)$, 再由 $F(\xi, \eta)$ 恢复原函数.

1.2 变频采样全息图的制作原理

为简单起见, 以点源全息图为例讨论全息图的空间频率分布, 设参考光是平面光波, 其与记录平面法线的夹角为 θ_{xR} , 如图1所示, 则参考光可写成

$$r(x, y) = R_0 \exp(jk_0 x \sin \theta_{xR}) \quad (3)$$

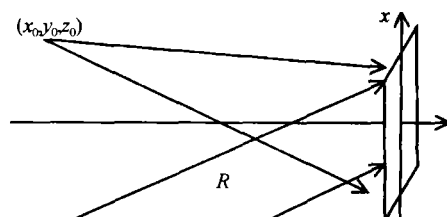


图1 点源全息图的计算光路图

Fig. 1 The computer light path of point hologram

设物点的坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 记录平面上物光波的非涅耳近似可写成

$$u(x,y) = a \exp(jk_0 \frac{x^2 + y^2}{2z_0}) \exp(jk_0 \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0}) \cdot \exp(-jk_0 \frac{xx_0 + yy_0}{z_0}) \quad (4)$$

式中, a 是物光波的振幅. 全息图的透射率分布为

$$\tau(x,y) \propto |u(x,y) + r(x,y)|^2 = a^2 + R_0^2 + 2aR_0 \cdot \cos \left\{ k_0 \left[\frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0} - \frac{xx_0 + yy_0}{z_0} - x \sin \theta \right] \right\} = a^2 + R_0^2 + 2aR_0 \cos \{ \varphi(x,y) \} \quad (5)$$

上式结构的空空间频率分布为

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = \frac{x - x_0}{\lambda z_0} - \frac{\sin \theta}{\lambda} \quad (6a)$$

$$f_y = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{y - y_0}{\lambda z_0} \quad (6b)$$

由此可知, 全息图的光栅结构与物体空间频谱分量及参考光的空空间频率有关, 即全息图上局部空空间频率是不同的. 所以, 我们可以对不同区域进行不同频率的采样, 只要各处采样都满足 Whittaker-Shannon 抽样定理, 就可以保证整个全息图的信息不丢失. 本文采用对相应全息图进行相邻数值比较判断, 记录全息图数值变化过程中的每一最大、最小数值及其位置坐标, 从而判断出该位置的空空间频率并作出了相应的采样, 信息存储量将大大地减少. 为简单起见, 在采用变频率采样以后, 本文利用线性插值的方法进行全息图的恢复, 实验证明, 这种处理方法将完全保证原图的频谱特性.

下面从一维的情况出发, 分析利用该方法来进行变频率采样的过程以及线性插值后恢复图象的频谱特性.

设信号为

$$f(x) = a + b \cos [2\pi k(x^2 - dx)] \quad (7)$$

式(7)正是基元全息图的一维形式. 取基元全息图长度为 12 mm, 其中心为坐标原点, 并设物点与参考光振幅均为 1, 物点离开中心轴的距离为 $x_0 = 2$ mm, 离开全息图的距离为 z_0 , 参考光为平行光, 则可取 $a = 2, b = 2, k = 1/(2\lambda z_0) \approx 10^6$ m, $d = 4$ mm, 为使所画频谱图有一定幅度, 本文暂不考虑零频特性, 即只讨论 $f'(x) = b \cos [2\pi k(x^2 - dx)]$ 信号, 以下记为原信号. 若以频率 $f_x = 5 \times 10^4$ Hz 取样, 将原信号进行数字化, 并取区间为 $[-2$ mm, 2 mm], 得相应的部分原信号图像如图 2(a) 所示, 其采样点数为 201 个. 显然, 在低频区域, 有大量的冗余样点数. 原信号的频谱特性如图 2(b) 所示. 若对它进行变频率采样, 即只采样相应的最大与最小数值, 则所得对应图 2(a) 的变频率采样图像如图 3 所示.

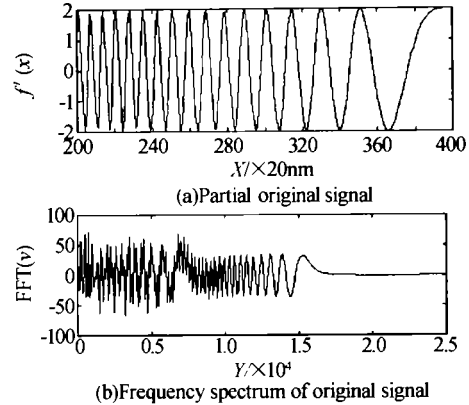


图 2 部分原信号图及其原信号的频谱图
Fig. 2 Partial original signal and its frequency spectrum

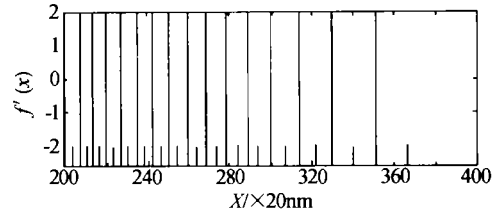


图 3 部分原信号的变频采样图
Fig. 3 Frequency-change sample for partial original signal

可以看出, 图 3 的采样点数只有 33 个, 要比图 2(a) 少得多. 在进行数字存储时, 我们可以依次存储这一行中采样数值及该数值与下一数值相隔的距离, 则数组中奇数列为所采样的数值, 偶数列为两相邻采样数值的间距. 若为二维图像, 我们可以采用单元数组的形式存储数据, 同上方法, 在每一单元里依次存储某一行采样信息. 这样可以大大减少存储信息量. 同时, 只要我们获得上述所存储的信息, 就能很容易地进行插值恢复.

本文采用线性插值的方法进行恢复, 即在相邻采样数值间线性地插入数值, 数值的个数由相应的采样间距及原信号的采样频率决定, 保证恢复后的数值个数与原信号的相同. 设相邻的采样数值为 X_{k-n} 与 X_k , 间距为 n/f_x , 则插入的数值依次为

$$X_{k-n+1} = X_{k-n} + (X_k - X_{k-n})/n \quad (8a)$$

$$X_{k-n+2} = X_{k-n+1} + (X_k - X_{k-n})/n \quad (8b)$$

⋮

$$X_{k-1} = X_{k-2} + (X_k - X_{k-n})/n \quad (8c)$$

图 4(a) 给出了对应图 2(a) 的线性插值后的恢复结果, 变频信号恢复后的频谱特性如图 4(b) 所示.

由图 2(b)、4(b) 可以看出, 除变频率采样恢复后的频谱较原信号的频谱加入细微的噪声外, 两频谱都同样完整地反映了原信号的频率分布. 所以采用这种变频采样及其恢复的方法是能完全描述原图的频率特性的, 这一点对于一幅全息图来说是至关重要的. 显而易见, 这种变频采样的方法大大地减少了原图信息的存储量.

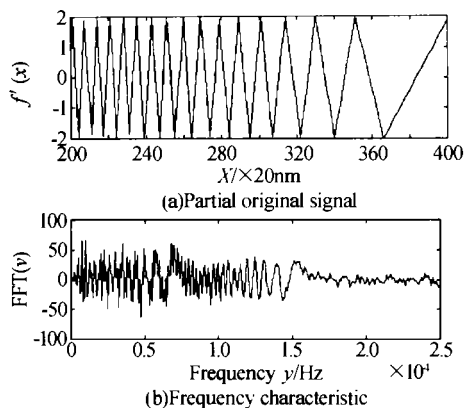
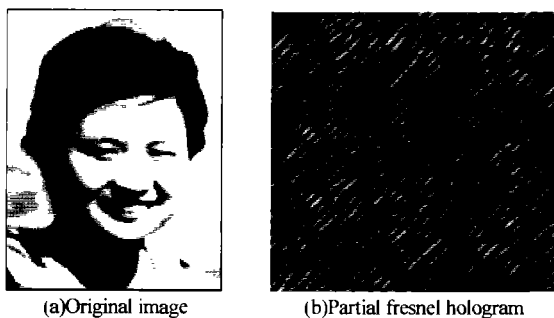


图4 变频采样后的恢复图
Fig.4 Restoration image of frequency-change sampled signal

2 实验结果及分析

为便于说明这种变频率采样及恢复方法应用于全息图的实际效果,本文制作一人像(如图5(a)所示)的非涅耳全息图. 根据全息图本身的频率分布,分别按最高频率采样和变频采样制作两幅全息图. 为考虑版面问题,以所得全息图的一部分为例,以下称为片非涅耳全息图(如图5(b)所示)及片变频采样全息图(如图6(a)所示,变频全息图是通过将采样数据按采样间距加粗绘制显示的). 图6(b)是片变频采样全息图插值后的恢复图. 利用计算机进行模拟再现^[8],图7(a)、7(b)分别给出了非变频和变频全息图恢复后的计算机模拟再现结果.



(a)Original image (b)Partial fresnel hologram
图5 原图及其相应的片菲涅耳全息图
Fig.5 Original image and its partial Fresnel hologram



(a)Partial frequency-change sampled hologram (b)Restoration image by linear interpolation
图6 片变频全息图及线性插值恢复后的片全息图
Fig.6 Partial frequency-change sampled hologram and its restoration image by linear interpolation

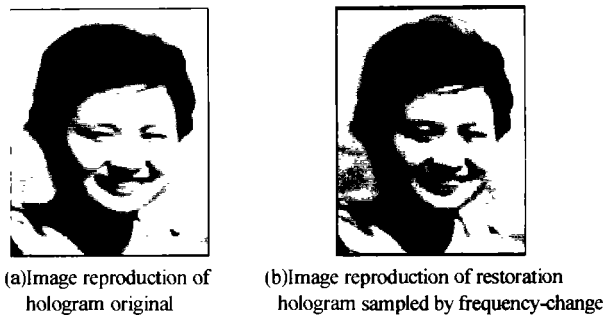


图7 模拟再现像
Fig.7 Image reproduction of hologram

由两种全息图的模拟再现像比较可以看出,变频率采样后进行线性插值恢复后的全息图具有良好的再现像质,且数据存贮量约为非变频采样全息图的三分之一. 这将为全息图的信息存贮与传输提出一条新的思路.

参考文献

- 1 Hilaie P S, Benton S A, *et al.* Real-time holographic display: Improvement using a multichannel acousto-optic modulator and holographic optical elements. *SPIE Proc*, 1991, **1461**: 254 ~ 261
- 2 Yoshikawa H, Kagotani A. Full Color Computer-Generated Rainbow Hologram with Enlarged Viewing Angle. *Optical Review*, 2002, **9**(6): 251 ~ 254
- 3 Wang Hui, Li Yong, Jin Hongzhen, *et al.* Visualization using computer-generated hologram (CGH) based on three-dimensional shape measurement data of object. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **23**(3): 284 ~ 288
- 4 Leith E N, Upatnieks J. Wavefront Reconstruction with Continuous-Tone Objects. *J Opt Soc Amer*, 1963, **53**(12): 1377 ~ 1381
- 5 蔡晓鸥, 王辉, 李勇, 等. 全息图压缩的小波分析方法. *光子学报*, 2000, **29**(8): 738 ~ 743
Cai X O, Wang H, Li Y, *et al.* *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(8): 738 ~ 743
- 6 Cai Xiaou, Wang Hui, Li Yong, *et al.* The application of wavelet analysis in hologram compression. *Acta Photonica Sinica*, 2001, **30**(6): 739 ~ 743
- 7 苏显渝, 李继陶, 著. 信息光学. 北京: 科学出版社, 1999. 160 ~ 163
Su X Y, Li J T. *Information Optics*. Beijing: Science Press, 1999. 160 ~ 163
- 8 蔡晓鸥. 全息图的计算机模拟再现. *应用激光*, 2001, **23**(3): 185 ~ 187
Cai X O. *Applied Laser*, 2001, **23**(3): 185 ~ 187

Study on Digital Hologram of Frequency-change Sampling

Cai Xiaoou¹ Wang Hui² Li Yong²

1 Physics and Electronic Information College, Wenzhou Normal College, Wenzhou, Zhejiang, China, 325003

2 Institute of Information Optics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004

Received date: 2003-09-02

Abstract Based on the sampling theorem of Whittaker-Shannon, Fresnel hologram has been Frequency-change sampled ensuring that the sampling frequency is twice as much as the corresponding spatial frequency of the hologram. In the way, the sampling redundancy that will cause the information redundancy of digital hologram has been eliminated. Further more, a good reconstructed image can be acquired from restoration hologram by linear interpolation. The feasibility and efficiency of the method are confirmed by theoretical analysis and experimental results. So a new thought has been offered for the information storage and transmission of computer-generated hologram.

Keywords Digital hologram; Frequency-change sampling; Spatial frequency; Sampling theorem of whittaker-shannon



Cai Xiaoou was born in Zhejiang on May 1972. She gained the B. S. degree from Zhejiang Normal University in 1994, and the M. S. degree from Zhejiang University in 1999. Now, she is a teacher of Wenzhou Normal College. Her interests include hologram compression, data storage and practical hologram communications.