

光波在一维周期介质中传播的色散和反射

王维江^{1,2} 肖万能¹ 周金运²

(1 中山大学光电材料与技术国家重点实验室, 广州 510275)

(2 广东工业大学应用物理系, 广州 510090)

摘要 从光的电磁理论出发导出了光在一维周期介质中的特性矩阵的表达式. 运用特性矩阵方法对光在周期介质中的色散关系、光子带隙、反射率光谱等特性进行了数值模拟和理论分析, 在此基础上还讨论了与光子带隙相应的反常折射率.

关键词 周期介质; 光子带隙; 特性矩阵; 色散

中图分类号 O436 **文献标识码** A

0 引言

光子晶体是一种介电函数(或折射率)周期性变化排布的材料. 光子晶体的两个最根本特征是具有光子禁带(或带隙)以及使光子局域化. 光子晶体的基本原理是利用了光在周期介质中的多次布喇格散射和多次干涉, 形成光子能带和光子能隙. 光子晶体的这些特征, 使它在许多方面有重要的应用: 利用掺杂光子晶体来抑制或者增强自发辐射^[1-3], 制造高效率 and 零阈值的激光器^[4]. 通过在光子晶体中引入缺陷, 可以制造高性能的光子晶体滤波器、单频率光全反射镜和光子晶体光波导、高品质的激光谐振腔^[5,6]. 特别是缺陷层的介电函数具有克尔非线性时, 系统在光学响应中能够出现双稳态、多稳态及光学限制等特性^[7,8]. 此外, 利用折射率随光强非线性变化而产生的能隙变化为基础的光开关^[9], 以及通过在可调谐带隙光子晶体内不同的区域施加电场从而精确地控制光的传播途径^[10]等等. 这些情况都表明对光子晶体特性的研究有重要的理论和应用价值.

本文从电磁波理论出发, 运用特性矩阵方法能够非常方便地对光波在一维周期介质中的色散关系、带隙结构、反射率光谱等进行理论分析和数值模拟, 在此基础上可以讨论与之有关的反常折射率现象.

1 光波在一维周期介质中的传播方程和特性矩阵

假设周期性非磁性介质是折射率分别为 n_1 和 n_2 的介质层的交替排列, 在其前后是半无限大的各向同性均匀介质, 折射率分别为 n_0 和 n_g , 整个系统为 $n_0 | n_1(z) n_2(z) \cdots n_1 n_2 | n_g$ 结构, 如图 1.

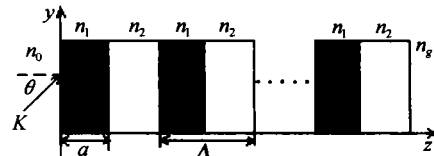


图1 一维周期介质的结构

Fig. 1 Structure of 1D periodical media

周期结构的折射率分布为

$$n(x) = \begin{cases} n_1 & (0 < z < a) \\ n_2 & (z < z < \Lambda) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $n(z + \Lambda) = n(z)$, $\Lambda = a + b$ 为介质的空间周期, 入射面为 yz 面.

为简单起见, 考虑一束频率为 ω 的单色平面光波入射到分层介质并在其中传播的情形. 其电矢量 E 的麦克斯韦方程(不考虑非线性效应)可写成

$$-\nabla^2 E + \nabla(\nabla \cdot E) - (\omega^2/c^2) \epsilon_r E = 0 \quad (2)$$

式中 ϵ_r 为介质相对介电函数, $\epsilon_r(r) = \epsilon_r(r + \Lambda)$, c 为真空中的光速. 因为任何电磁波都可以认为是 TE 波(transverse electric wave, TE)和 TM 波(transverse magnetic wave, TM)的叠加. 不失一般性, 先对 TE 波进行分析, 在此情形下 $E_y = E_z = 0$, 在一维周期介质中, 式(2)可简写为^[11]

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + n_a^2 k_0^2 E_x = 0 \quad (3)$$

式中 $n_a^2 = \epsilon_r$ ($\alpha = 1, 2$ 表示介质层), $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$, 式(3)中已假定电场强度与时间的关系为 $e^{-i\omega t}$. 对式(3)采用分离变量法可解得

$$E_x = E(y, z) = U(z) e^{i(k_y y - \omega t)} \quad (4)$$

式中 $U(z)$ 为 z 的函数(可能为复数). 光波的磁矢量分量为

$$H_y = V(z) e^{i(k_y y - \omega t)} \quad (5)$$

$$H_z = W(z) e^{i(k_y y - \omega t)} \quad (6)$$

波矢分量为

$$k_{\omega} = \left[\left(\frac{n_a \omega}{c} \right)^2 - k_y^2 \right]^{1/2} \quad (7)$$

$$k_y = n_1(\omega/c) \sin \theta_1 = n_2(\omega/c) \sin \theta_2 \quad (8)$$

*Tel: 020-38457557 Email: wang_w_j@21cn.com

收稿日期: 2003-03-11

$$\left. \begin{aligned} k_{1z} &= n_1(\omega/c) \cos \theta_1 \\ k_{2z} &= n_2(\omega/c) \cos \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中 θ_1, θ_2 分别为光的波矢方向在 n_1 介质和 n_2 介质中与介质平面法线的夹角。

由各层介质界面上的场强 E 和磁场强度 H 的切向分量连续可得到任意两个介质层之间的电磁场分量之间的关系

$$\begin{pmatrix} E_j \\ H_j \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} E_{j+1} \\ H_{j+1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

介质的特性矩阵为

$$M_j = \begin{bmatrix} \cos \delta_j & -i\eta_j^{-1} \sin \delta_j \\ -i\eta_j \sin \delta_j & \cos \delta_j \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中 $\delta_j = k_{zj}d_j, \eta_j = n_j \cos \theta_j$ 分别为光通过每一介质的位相和导纳。整个介质层的特性矩阵为

$$M_{TE} = M_1 M_2 \cdots M_n \quad (12)$$

对周期介质, 其特性矩阵为

$$M_{TE} = \underbrace{(M_1 M_2) \cdots (M_1 M_2)}_n = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_1 \cos \delta_2 - \eta_2 \eta_1^{-1} \sin \delta_1 \sin \delta_2 & -i\eta_2^{-1} \cos \delta_1 \sin \delta_2 - i\eta_1^{-1} \sin \delta_1 \cos \delta_2 \\ -i\eta_1 \cos \delta_1 \sin \delta_2 - i\eta_2 \sin \delta_1 \cos \delta_2 & \cos \delta_1 \cos \delta_2 - \eta_1 \eta_2^{-1} \sin \delta_1 \sin \delta_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

对 TM 波的特性矩阵 M_{TM} 的矩阵元而言, 只需要将 TE 波矩阵元中的 η_j 换成 $\eta'_j = n_j^{-1} \cos \theta_j$ 即可。

2 一维周期介质中的色散关系、带隙及反射特点

2.1 一维周期介质中的色散关系及带隙

对于在周期介质中传播的波, 由布洛赫定理可知

$$E_k(z + \Lambda) = e^{-iK\Lambda} E_k(z) \quad (15)$$

式中 K 为布洛赫波数, 从布洛赫波的周期性条件可求出 K 与 ω 的色散关系

$$K(k_y, \omega) = \frac{1}{\Lambda} \cos^{-1} \left[\frac{1}{2}(A + D) \right] \quad (16)$$

也即

$$\cos(K\Lambda) = \cos(k_{2z}b) \cos(k_{1z}a) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{2z}}{k_{1z}} + \frac{k_{1z}}{k_{2z}} \right) \cdot \sin(k_{2z}b) \sin(k_{1z}a) \quad (17)$$

由式(16)或(17)可讨论一维光子晶体的色散关系和禁带(带隙)结构。当 $|(A + D)/2| < 1$ 时, 对应实数 K , 相当于传播的布洛赫波; 当 $|(A + D)/2| > 1$ 时, K 为复数, 布洛赫波是倏逝波, 对应的频率是周期介质的禁带; 当 $|(A + D)/2| = 1$ 时, 对应的是禁带带边。图 2 是根据(17)式所模拟的色散曲线。

由图 2 可看出, 不同的周期膜系对应于不同中心波长的反射带隙。如对于 $n_1a = n_2b = \lambda_0/4$ 的结构, 由图 2(a) 的色散曲线可看出, 其带隙的中心频率在 $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0$ 等处, K 随 ω 变化, 周期为 $2\omega_0$, 而且带隙宽度相同。但在频率 $2\omega_0, 4\omega_0$ 等处则不形成带隙。当 $n_1a \neq n_2b$ 时(如图 2(b)), 禁带在中心频率(即 $\omega_0 = \pi c/(n_1a + n_2b)$)及其整数倍处形成, 但它们的带隙宽度不相同。对任意周期性介质, 只要基本周期的各层薄膜的光学厚度之和为中心波

长的 1/2 的整数倍(即 $\sum n_i d_i = q\lambda_0/2, q$ 为整数), 都可以形成反射带隙。

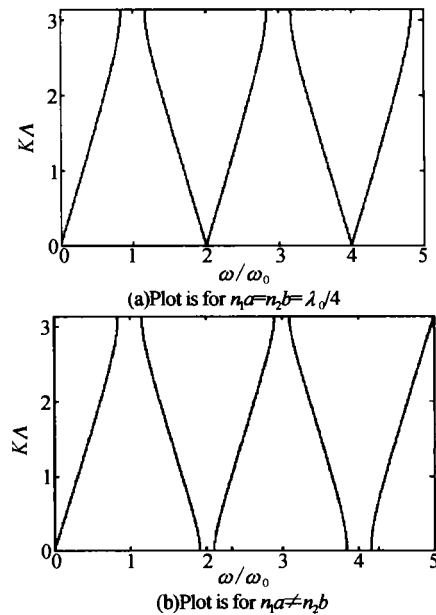


图 2 光垂直入射时的色散曲线和带隙

Fig. 2 The dispersion curves and the band gap structure, drawn for normal incidence onto the periodical media 由式(17)得到的色散关系在第一禁带宽度内, 令

$$K\Lambda = \pi + ix \quad (18)$$

对 1/4 周期介质, 即在 $n_1a = n_2b = \lambda_0/4$ 情况下, 令 φ 是与禁带中心 ω_0 (与中波长 λ_0 对应的圆频率) 归一化频移(相位差), 即

$$\varphi = \frac{\omega - \omega_0}{c} n_1 a = \frac{\omega - \omega_0}{c} n_2 b \quad (19)$$

将式(19)代入式(17)得

$$\cos(K\Lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2} \right) \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \quad (20)$$

再将式(18)代入式(20)得

$$\cosh x = \frac{1}{2} \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2} \right) \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \quad (21)$$

这是在禁带内作为频率函数的 $K\Lambda$ 的虚部表达式. 令 $x=0$, 就得到带边

$$\varphi_{\pm} = \pm \sin^{-1} \left(\frac{|n_2 - n_1|}{n_2 + n_1} \right) \quad (22)$$

将式(22)代入式(19)得到带隙宽度为

$$\Delta\omega = 2 \sin^{-1} \left(\frac{|n_2 - n_1|}{n_2 + n_1} \right) \frac{c}{n_1 a} = \omega_0 \frac{4}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{|n_2 - n_1|}{n_2 + n_1} \right) \quad (23)$$

由此可知, 带隙宽度与折射率差值有很大的关系, 特别当 $|n_2 - n_1| \ll n_1, n_2$ 时, 带隙与折射率差值成正比.

对高阶禁带的情形, 因为介质是周期性的, 在一维的情况下可把介电函数 ϵ 按互易晶格矢 $G = l(2\pi/\Lambda)$ 展开, 其中 $l=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

$$\epsilon(z) = \sum_l \epsilon_l e^{iGz} \quad (24)$$

在图 1 所示的情形下, 假设 $b < a$, 介电函数的表达式可写为

$$\epsilon(z) = \frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2) + \frac{1}{2}(n_1^2 - n_2^2)f(z) \quad (25)$$

其中 $f(z)$ 是周期为 Λ 的周期函数, 可表示为

$$f(z) = \begin{cases} 1, & -\frac{\Lambda}{2} < z < \frac{b-a}{2} \\ -1, & \frac{b-a}{2} < z < \frac{\Lambda}{2} \end{cases} \quad (26)$$

$f(z)$ 的傅里叶展开系数为

$$c_l = \frac{i}{l\pi} \left[e^{\frac{i\pi(b-a)}{\Lambda}} - \cos l\pi \right] \quad (27)$$

将式(27)、(26)代入式(25), 比较式(24)和(25)得

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2) - \frac{1}{2}(n_1^2 - n_2^2) \frac{(b-a)}{\Lambda}, \\ \epsilon_l &= \frac{i}{2l\pi} (n_1^2 - n_2^2) \left(1 + e^{\frac{i\pi(b-a)}{\Lambda}} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

如果 $n_1 a = n_2 b = \lambda_0/4, \Delta n = |n_2 - n_1|, \ll n_1, n_2$, 为简化起见, 令 $b = a$, 则

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega \frac{|\epsilon_l|}{\epsilon_0} = \omega \frac{(n_1^2 - n_2^2)(1 - \cos l\pi)}{l\pi(n_1^2 + n_2^2)} \approx \\ &= \omega \frac{\Delta n(1 - \cos l\pi)}{l\pi n} \end{aligned} \quad (29)$$

可知在介质一定的情况下, 带隙宽度随 l 的增大而变小. 在 $l=1$ 时, 式(29)与式(23)有相同的结果.

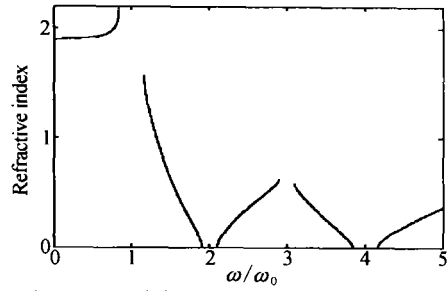


图 3 与图 2(b) 对应的带隙附近的反常折射率
Fig. 3 The anomalous index of refraction near the band gap corresponding to Fig. 2 (b)

2.2 一维周期介质的反射特性

在图 1 所示情况下, 由传播矩阵可以得到介质层前后电磁场之间的关系

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} E_g \\ H_g \end{pmatrix} \quad (30)$$

由此可得到整个膜系的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_g \end{pmatrix} \quad (31)$$

式中 $\eta_g = n_g \cos \theta_g$ 为周期介质膜后基片的导纳, 么模矩阵的 n 次方可简化为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AU_{n-1} - U_{n-2} & BU_{n-1} \\ CU_{n-1} & DU_{n-1} - U_{n-2} \end{pmatrix} \quad (32)$$

式中 $U_n = \frac{\sin(n+1)K\Lambda}{\sin K\Lambda}$ 是第二类车比雪夫 (Chebyshev) 多项式, 由式(30)、(31)和(32)可以得到反射系数为

$$r_n = \frac{\eta_0 Q_1 - Q_2}{\eta_0 Q_1 + Q_2} = \frac{(\mu_{11} + \mu_{12}\eta_g)\eta_0 - (\mu_{21} + \mu_{22}\eta_g)}{(\mu_{11} + \mu_{12}\eta_g)\eta_0 + (\mu_{21} + \mu_{22}\eta_g)} \quad (33)$$

η_0 为 n_0 介质的导纳. 膜层的反射率为

$$R = r_n r_n^* = |r_n|^2 \quad (34)$$

利用式(33)、(34)可以分析反射率光谱, 如图 4 所

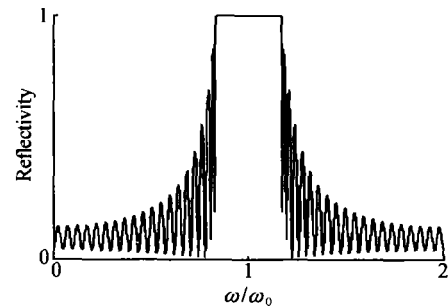


图 4 TE 波垂直入射时的反射率光谱
Fig. 4 Frequency dependence of the normal-incidence reflectivity of transverse electric wave (TE)

示(为便于比较,取与文献 12^[12] 相同的参量). 通过反射率光谱曲线可知在膜层数取不同值时相应有不同大小的反射率,周期介质层超过一定数目后反射率趋向饱和,带隙宽度变化也很小. 对 TM 波也可作类似的分析,在垂直入射的情况下,其反射光谱与 TE 波完全相同.

3 讨论

为说明文中各部分理论分析的一致性,在相同周期介质的情况下,即 $n_0 = 1, n_g = 1.5, n_1 = 2.35, n_2 = 1.38, n_1 a = n_2 b = \lambda_0/4, n = 20$. 由式(17)模拟的色散曲线图 2(a) 对应的带隙宽度 $\Delta\omega = 0.338\omega_0$; 由式(34)模拟的反射率曲线图 4 对应的带隙宽度 $\Delta\omega = 0.340\omega_0$; 直接由式(23) 计算所得出的带隙宽度为 $\Delta\omega = 0.335\omega_0$.

比较这三种情形的带隙发现,在前面关于色散和反射特性的讨论中,虽然侧重面和所使用的具体公式有所不同,但由它们所得出的带边位置和带隙宽度却十分吻合,它们的差别主要来自在读取数值模拟图的数据时存在一定的人为误差. 说明上述各理论分析的正确性以及它们之间的内在一致性. 因为它们都是以麦克斯韦方程和周期介质的特性为出发点的.

从图 2 的色散曲线的斜率可以看到,在带边处群速率 $v_g = d\omega/dk$ 趋近于零,而相速率 $v_p = \omega/k$ 在某些带边处为 ∞ , 所以驻波在这些带边处形成,由 $n = c/v_p$ 知折射率在这些带边处小于 1 甚至趋于零,出现反常折射率. 在禁带的两侧分别对应正常色散和反常色散,这可从对应的图 3 看出,这一点与文献 13^[13] 符合.

需要说明的是在前面的分析中,都假定介质为各向同性、均匀、非磁性无吸收介质,而且假定介质的折射率与频率无关,实际上,如果知道折射率随频率的变化关系 $n(\omega)$, 则可将上述诸式中的折射率用 $n(\omega)$ 代替,即可得到相应的带隙结构和反射率光谱. 同样用此方法还可以方便地讨论折射率为复数时的吸收介质或者有缺陷时的带隙结构.

4 结论

从光的电磁理论出发导出了光在一维周期介质中的特性矩阵的表达式. 本文表明,运用特性矩阵可以方便地对周期介质的色散关系、光子带隙、反射率光谱等进行数值模拟和理论分析,在此基础上还可方便地讨论与光子带隙相应的反常折射率. 此外,对折射率为复数或者介质结构有缺陷时的带隙

结构也可进行分析. 但对折射率随光强变化的非线性周期结构以及对掺有二能级系统的多量子阱的带隙特性研究则与本文所采用的方法有所区别,将在另文加以讨论.

参考文献

- 1 Yablonovitch E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys Rev Lett*, 1987, **58**(20): 2059 ~ 2061
- 2 Quang T, Woldeyohannes M, John S. Coherent control of spontaneous emission near a photonic band edge: a single-atom optical memory device. *Phys Rev Lett*, 1997, **79**(26): 5238 ~ 5241
- 3 Woldeyohannes M, John S. Coherent control of spontaneous emission near a photonic band edge: a qubit for quantum computation. *Phys Rev(A)*, 1999, **60**(6): 5046 ~ 5068
- 4 De Martini F, Marrocco M, Mataloni P, et al. Spontaneous and stimulated emission in the thresholdless microlaser. *J Opt Soc Am(B)*, 1993, **10**(2): 360 ~ 368
- 5 欧阳征标, 刘海山, 李景镇. 光子晶体超窄带滤波器. *光子学报*, 2002, **31**(2): 281 ~ 284
Ouyang Z B, Liu H S, Li J Z. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(2): 281 ~ 284
- 6 欧阳征标, 李景镇, 张道中, 等. 多层光子晶体滤波器研究. *光学学报*, 2002, **22**(1): 79 ~ 84
Ouyang Z B, Li J Z, Zhang D Z, et al. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(1): 79 ~ 84
- 7 Lidorilis E, Busch K, Li Q M, et al. Optical nonlinear response of a single nonlinear dielectric layer sandwiched between two linear dielectric structures. *Phys Rev(B)*, 1997, **56**(23): 15090 ~ 15099
- 8 John S, Akozbek N. Nonlinear optical solitary waves in a photonic band gap. *Phys Rev Lett*, 1993, **71**(8): 1168 ~ 1171
- 9 Tran P. Optical limiting and switching of short pulses by use of an nonlinear photonic band gap structure with a defect. *J Opt Soc Am(B)*, 1997, **14**(10): 2589 ~ 25954
- 10 Busch K, John S. Liquid-crystal photonic-band-gap materials: The tunable electromagnetic vacuum. *Phys Rev Lett*, 1999, **83**(5): 967 ~ 970
- 11 Born M, Wolf E. *Principles of Optics*(7th ed.). Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1999. 54 ~ 74
- 12 Lekner J. Light in periodically stratified media. *J opt Am(A)*, 1994, **11**(11): 2892 ~ 2899
- 13 Dowling J P, Bowden C M. Anomalous index of refraction in photonic bandgap materials. *J Modern Optics*, 1994, **41**(2): 345 ~ 351

The Dispersion and Reflection Properties of Light in One-dimensional Periodical Media

Wang Weijiang^{1,2}, Xiao Wanneng¹, Zhou Jinyun²

1 *State Key Laboratory of Optoelectronic Material and Technology, Sun Yat-Sen Univ, Guangzhou 510275*

2 *Dept. of Applied Physics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090*

Received date: 2003-03-11

Abstract Based on electromagnetic theories, the expression of characteristic matrix of one-dimensional (1D) periodical media is given. By using such characteristic matrix, the numerical simulation and analyses for the properties of light including its dispersion, the photonic band gap (PBG) and the reflectivity spectrum in 1D periodical media have been made. Furthermore, the anomalous index of refraction corresponding to PBG has been discussed.

Keywords Periodical media; Photonic band gap (PBG); Characteristic matrix; Dispersion



Wang Weijiang was born in 1964. He received his M. S. degree of science from the South China Normal University in 1997. He is an associate professor of Applied Physics Department of Guangdong University of Technology. At present he is a Ph. D. candidate of State Key Laboratory of Optoelectronic Material and Technology, Sun Yat-Sen University. His research interests include photonic materials, quantum optics, nonlinear optics and ultrafast laser spectroscopy.