

# OCDMA 系统二维 RS 地址码的设计方案及性能分析\*

李传起<sup>1,2</sup> 孙小菡<sup>2</sup> 张明德<sup>2</sup> 丁东<sup>2</sup>

(1 南京气象学院物理系, 南京 210044)

(2 东南大学电子工程系, 南京 210096)

**摘要** 首次在有限伽罗瓦域 GF(7) 上以本原元 3 构造出 RS 地址序列码. 在一维 RS 素数码的基础上, 给出基于二素数的二维 RS 矩阵码(2D-RSC)的设计方案. 系统地研究了 2D-RSC 的 OCDMA 系统总体性能: 分析了 2D-RSC 码字的相关性; 导出了系统的最大用户容量; 研究了 2D-RSC 系统以多址干扰为主的误码性能. 结果表明: 2D-RSC 系统性能较之一维 RS 码有明显的改进. 特别是在大信息量传输时, 采用两个较大的素数, 基于 2D-RSC 的 OCDMA 系统的总体性能远优于一维素数码.

**关键词** 光码分多址(OCDMA); 二维 RS 码(2D-RSC); 误码率(BER)

**中图分类号** TN921-1 **文献标识码** A

## 0 引言

在光纤通信码分多址系统(OCDMA)中, 光素数码是最早投入研究的码字, 是一种十分重要的 OCDMA 系统地址码. 自 1983 年 Shaar 等提出光素数码(Optical Prime Code)概念<sup>[1]</sup>以来, 人们对光素数码的研究不断深入, 提出了许多 OCDMA 系统素数码编解码方案, 如普通素数码、优化素数码<sup>[2]</sup>、跳频素数码<sup>[3]</sup>、 $2^n$  素数码<sup>[4]</sup>、同步 RS (synchronous Reed-Solomon code) 素数码<sup>[5]</sup>等. 光码集的性能不断改进, 系统码字容量和误码率不断优化. 但是对于一维光地址码而言, 提高用户容量就必须增加码字长度. 而码字长度的增加意味着每一比特的传输周期增长, 从而导致信道码速的下降. 此外, 对于多用户、长码字的 OCDMA 系统, 随着用户数量的增加, 多址干扰增大, 系统误码率上升, 性能将不断恶化. P. A. Perrier 等<sup>[6]</sup>提出了波分复用(WDM)和码分复用(CDMA)的混合系统, 即先对光纤带宽进行波长分割, 然后对每一波长信道应用码分复用技术. 这样, 在相同的传输负载下, 有效缩短了码字长度. 不过, 这种方法只是 WDM 和 CDMA 的简单叠加, 其用户容量和系统性能均没有得到本质上的改进.

二维光地址码是将基于光纤延时线的时域扩频技术与基于空分复用的波长分割技术结合起来, 在时域和谐域同时对光脉冲进行编码. 大大缩短了码字长度, 有效地提高了光纤带宽的利用率. 同时, 系统性能得到进一步优化.

与其他二维光地址码<sup>[7]</sup>一样, 2D-RSC 的主要参量为  $(m \times n, w, \lambda_a, \lambda_c)$ , 其中  $m$  为码字所用的波长片数,  $n$  为码字长度, 即每一数据比特被切成的时间片数, 每个码字由  $m \times n$  矩阵表示;  $w$  为码重, 即分布在矩阵中的“1”的个数;  $\lambda_a$  和  $\lambda_c$  分别为自相关和互相关限制.

## 1 2D-RSC 矩阵码的码字构造

在有限伽罗瓦域 GF( $p$ ) ( $p$  为素数) 上, 长度为  $N = p - 1$  的一维 RS 码的本原多项式为<sup>[5]</sup>

$$g(x) = (x - \alpha^b)(x - \alpha^{b+1})(x - \alpha^{b+2}) \dots (x - \alpha^{b+d-2}) \quad (1)$$

式(1)中,  $\alpha$  为伽罗瓦域 GF( $p$ ) 上的一个本原元;  $d$  为最小码距;  $b$  为某一整数, 决定着本原多项式  $g(x)$  的起始项, 其典型值为 1. 在一维  $(N, K, d)$  RS 码集  $C$  中, 与码字  $c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{p-2})$  相联系的多项式为  $c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{p-2}x^{p-2}$ . 这里  $K = N - d + 1$ , 决定着码集的码字容量  $\phi$ ,  $\phi = p^K$ . 码字多项式  $c(x)$  由本原多项式  $g(x)$  和信息多项式  $z(x)$  共同决定,  $c(x) = g(x)z(x)$ .

当  $K = 1$  时,  $d = N - 1 = p - 2$ , 取  $b = 1$ , 有  $g(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2) \dots (x - \alpha^{p-3})$ . 设  $z(x) = 1$ , 则  $g(x)$  的系数代表一维 RS 码的一个码字  $c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{p-2})$ . 根据循环移位的法则, 共得到  $p$  个码字, 即

$$c_i^T = (c_0^T, c_1^T, c_2^T, \dots, c_{p-2}^T), T \in [0, p-1] \quad (2)$$

式中  $c_i^T = c_i \oplus T$ ,  $\oplus$  为模  $p$  和运算.

在 GF(7) 上取本原元  $\alpha = 3$ , 有:  $\alpha^{6i} = 1 \pmod{7}$ ,  $\alpha^{1+6i} = 3 \pmod{7}$ ,  $\alpha^{2+6i} = 2 \pmod{7}$ ,  $\alpha^{3+6i} = 6 \pmod{7}$ ,  $\alpha^{4+6i} = 4 \pmod{7}$ ,  $\alpha^{5+6i} = 5 \pmod{7}$ ,  $i = [0, 1, 2, \dots]$ . 得到

$$g(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^3)(x - \alpha^4) =$$

\*南京气象学院科研基金资助项目  
Tel: 025-8731031 Email: leecq@seu.edu.cn  
收稿日期: 2002-12-16



## 2 2D-RSC 矩阵码的相关性分析

类似于一维光素数码, 2D-RSC 的自相关和互相关限制分别为

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_{i,j} x_{i,j \oplus \tau} \leq \lambda_a \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_{i,j} x_{i,j \oplus \tau} \leq \lambda_c \quad (7)$$

式中,  $x_{i,j}$  为位于码字矩阵中第  $i$  行、第  $j$  列的码元,  $\tau$  为移位次数,  $\oplus$  表示模  $n$  和运算. 考察式(6)中由对任意给定的  $i, j$  所确定的码字  $x$ , 其  $p_0 - 1$  个“1”分别位于

$$\begin{aligned} & (c_0^T \oplus_{p_0} i, ((c_0^T \oplus_{p_0} i) \otimes_{p_1} j)(p_0 - 1)), \\ & (c_1^T \oplus_{p_0} i, 2 + ((c_1^T \oplus_{p_0} i) \otimes_{p_1} j)(p_0 - 1)) \\ & \dots, (c_{p-2}^T \oplus_{p_0} i, p - 2 + ((c_{p-2}^T \oplus_{p_0} i) \otimes_{p_1} j_x)(p_0 - 1)). \end{aligned}$$

由于  $c_0^T, c_1^T, \dots, c_{p-2}^T$  互不相同,  $c_k^T \oplus i, k \in [0, p_0 - 2]$  也各不相同, 即“1”分列于不同的行. 每一行至多有一个“1”. 这样, 码字  $x$  经  $\tau$  ( $\tau \pmod{n} \neq 0$ ) 次横向移位后, 其“1”的列位置与移位前的列位置必不相同. 由式(1), 自相关旁瓣值为零.

对于式(6)确定的两个不同码字  $x, y$ : 由  $i_x, j_x$  确定的码字  $x$  中“1”的位置为

$$\begin{aligned} & (c_0^T \oplus_{p_0} i_x, ((c_0^T \oplus_{p_0} i_x) \otimes_{p_1} j_x)(p_0 - 1)), \\ & (c_1^T \oplus_{p_0} i_x, 1 + ((c_1^T \oplus_{p_0} i_x) \otimes_{p_1} j_x)(p_0 - 1)) \\ & \dots, (c_{p-2}^T \oplus_{p_0} i_x, p - 2 + ((c_{p-2}^T \oplus_{p_0} i_x) \otimes_{p_1} j_x)(p_0 - 1)); \end{aligned}$$

由  $i_y, j_y$  确定的码字  $y$  中“1”的位置为

$$\begin{aligned} & (c_0^T \oplus_{p_0} i_y, ((c_0^T \oplus_{p_0} i_y) \otimes_{p_1} j_y)(p_0 - 1)), \\ & (c_1^T \oplus_{p_0} i_y, 1 + ((c_1^T \oplus_{p_0} i_y) \otimes_{p_1} j_y)(p_0 - 1)), \\ & \dots, (c_{p-2}^T \oplus_{p_0} i_y, p - 2 + ((c_{p-2}^T \oplus_{p_0} i_y) \otimes_{p_1} j_y)(p_0 - 1)). \end{aligned}$$

现假设在  $x, y$  中分别有两个或两个以上的“1”的对应位置相同. 则有

$$\begin{aligned} c_{k_1}^T \oplus_{p_0} i_x &= c_{l_1}^T \oplus_{p_0} i_y, \\ k_1 + ((c_{k_1}^T \oplus_{p_0} i_x) \otimes_{p_1} j_x)(p_0 - 1) &= \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & l_1 + ((c_{l_1}^T \oplus_{p_0} i_y) \otimes_{p_1} j_y)(p_0 - 1) \\ c_{k_2}^T \oplus_{p_0} i_x &= c_{l_2}^T \oplus_{p_0} i_y, \\ k_2 + ((c_{k_2}^T \oplus_{p_0} i_x) \otimes_{p_1} j_x)(p_0 - 1) &= \end{aligned} \quad (9)$$

$$l_2 + ((c_{l_2}^T \oplus_{p_0} i_y) \otimes_{p_1} j_y)(p_0 - 1)$$

式(8)、(9)中,  $k_1, k_2$  对应  $x$  中的两个“1”,  $l_1, l_2$  对应  $y$  中的两个“1”,  $k_1, k_2, l_1, l_2 \in [0, p_0 - 2]$ .

$$\text{设 } c_{k_1}^T \oplus_{p_0} i_x = c_{l_1}^T \oplus_{p_0} i_y = r_1,$$

$$c_{k_2}^T \oplus_{p_0} i_x = c_{l_2}^T \oplus_{p_0} i_y = r_2$$

有  $r_1 \neq r_2$  (同一码字中两个“1”位于不同的行).

则由式(8)和式(9)得

$$k_1 + (r_1 \otimes_{p_1} j_x)(p_0 - 1) = l_1 + (r_1 \otimes_{p_1} j_y)(p_0 - 1) \quad (10)$$

$$k_2 + (r_2 \otimes_{p_1} j_x)(p_0 - 1) = l_2 + (r_2 \otimes_{p_1} j_y)(p_0 - 1) \quad (11)$$

式(10)与式(11)相减得

$$\begin{aligned} (r_1 - r_2) \otimes_{p_1} (j_x - j_y) &= ((l_1 - l_2) - \\ & (k_1 - k_2)) / (p_0 - 1) \end{aligned} \quad (12)$$

显然, 式(11)右端恒小于1, 等式成立的条件是两端为零. 由  $r_1 \neq r_2$  得:  $j_x = j_y$ ; 代回式(9)得:  $k_1 = l_1$ ; 代回式(7)得  $i_x = i_y$ . 这样,  $x$  和  $y$  实际上是同一码字, 违背了  $x, y$  是两个不同码字的前提. 因此, 在  $x, y$  中分别有两个或两个以上的“1”的对应位置相同的假设不能成立. 这样, 互相关函数的最大值为1.

至此, 由式(6)定度的 2D-RSC 二维码字的自相关和互相关分别为 0 和 1, 相关特性优良, 从而保证良好的误码性能.

## 3 2D-RSC 矩阵码的码字容量

对于二素数  $p_0, p_1$  构成的 2D-RSC 码集  $(p_0 \times (p_0 - 1)p_1, p_0 - 1, 0, 1)$ , 每个一维 RS 码可生成  $p_0 p_1$  个二维码字,  $p_0$  个一维码共生成  $p_0^2 p_1$  个 2D-RSC.  $(p_0 \times (p_0 - 1)p_1, p_0 - 1, 0, 1)$  2D-RSC 的码字容量为  $p_0^2 p_1$ . 较之 WDM + CDMA 混合系统, 二维码的码字容量大大增加. 由于 WDM + CDMA 混合系统只是各信道上基于一维光码的 OCDMA 系统的简单叠加, 其总码字容量为各信道一维码的码字数量之和. 单信道上一维 RS 码的容量为  $p_0$ , 则  $p_0$  个分立信道的总容量仅为  $p_0^2$ . 在占用同样带宽的情况下, 2D-RSC 的码字容量是混合系统的  $p_1$  倍. 基于 2D-RSC 的 OCDMA 系统容纳用户数的性能远远优于基于一维码的 OCDMA 系统.

二维码  $(m \times n, w, \lambda_a, \lambda_c)$  的最大码字基数  $\phi_{\max}$  可从 Johnson 条件推广得到

$$\phi_{\max}(m \times n, w, 1, 1) \leq \frac{m \times (mn - 1)}{w(w - 1)} \quad (13)$$

当  $m = p_0, n = (p_0 - 1)p_1, w = p_0 - 1$  时, 由式(13)计算得

$$\begin{aligned} \phi_{\max}(p_0 \times (p_0 - 1)p_1, p_0 - 1, 1, 1) &\leq \\ \frac{p_0 \times (p_0(p_0 - 1)p_1 - 1)}{(p_0 - 1)(p_0 - 2)} \end{aligned} \quad (14)$$

式(5)给出的二素数 2D-RSC 码字基数为  $p_0 p_1$ . 当  $p_0, p_1$  较大时, 接近于码字基数的上界. 即基于该码字的 OCDMA 系统在用户容量上接近于最优化. 如图 1 所示. 同时, 该码字的自相关旁瓣为零, 相关特性优于其他  $(m \times n, w, 1, 1)$  矩阵码. 由式(13)知:  $p_0$  为 2D-RSC 码字的波长片数, 决定着占用带宽.  $(p_0 - 1)p_1$  为码字的时间片数, 决定着数据传输比特率. 显然, 较大的  $p_0, p_1$  可增加码字容量, 改进传输性能. 但占用带宽增加, 传输速率降低. 因此, 根据不同传输需求, 适当地选择  $p_0, p_1$ , 可以获得满意

的用户容量和系统的误码性能。

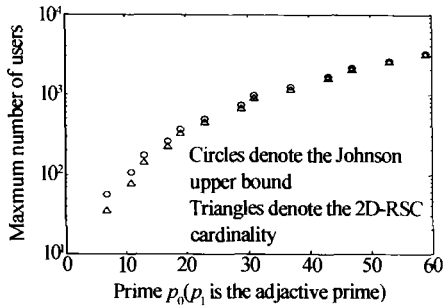


图1 二素数 RS 矩阵码系统的码字容量  
Fig. 1 The cardinality of 2D-RSC system based on two adjacive primes

### 4 2D-RSC 矩阵码的误码性能

在分析二素数 2D-RSC 矩阵码码字  $(p_0 \times (p_0 - 1)p_1, p_0 - 1, 0, 1)$  的误码性能时,主要考虑来自于多用户干扰 (MUI) 的噪声源,而忽略诸如热噪声,量子噪声等对系统性能的不利影响. 当某个用户传输数据“0”时,如果其他用户串扰的累积效应,使得多用户干扰的功率超过了接收机判决门限,而被判决为“1”,就形成一个误码. 根据分析二维光正交矩阵码使用的“撞击”法<sup>[7]</sup>,2D-RSC 码字中的脉冲“1”之间的平均撞击率为

$$\bar{q} \approx \frac{w^2}{2m \times n} = \frac{(p_0 - 1)^2}{2p_0(p_0 - 1)p_1} = \frac{p_0 - 1}{2p_0p_1} \quad (15)$$

对于实际用户数为  $K$ 、接收机判决门限为  $Th$ 、基于光正交码的 OCDMA 系统,来自其它  $K - 1$  用户的多址干扰引起的系统误码率为

$$BER = \frac{1}{2} \sum_{i=Th}^{K-1} \binom{K-1}{i} q^i (1-q)^{K-1-i} \quad (16)$$

以  $\bar{q}$  代替  $q$ ,得到 2D-OOC 的误码率为

$$BER = \frac{1}{2} \sum_{i=Th}^{K-1} \binom{K-1}{i} \left( \frac{p_0 - 1}{2p_0p_1} \right)^i \left( 1 - \frac{p_0 - 1}{2p_0p_1} \right)^{K-1-i} \quad (17)$$

图 2 给出了二素数  $p_0, p_1$  分别为 (7, 9) 的 2D-RSC 码字 7 相对于并发用户数的系统误码性能,其中接收机的判决门限设为  $Th = p_0 - 1$ .

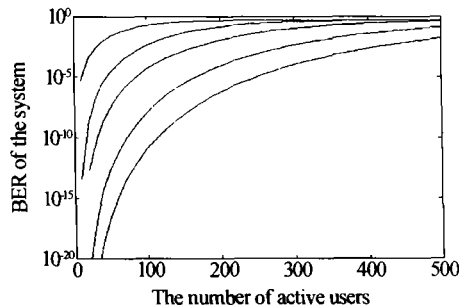


图2 2D-RSC 矩阵码 OCDMA 系统相对于并发用户数的误码性能  
Fig. 2 Performance of system BER of 2D-RSC OCDMA against number to active users

从图 2 可以看出:对于由 (9, 13), (13, 17),

(17, 19), (19, 23) 确定的 2D-RSC 光码集,在系统误码率低于  $10^{-9}$  的条件下,分别能容纳用户数 20、33、75 和 135. 假设每用户的数据比特率为 10 Gb/s,该系统总理论容量可达到 Tb/s 的量级.

### 5 结论

在众多的光素数码中,RS 码是性能较优的一种. 本文首次在 GF(7) 上以本原元 3 构造出一维 RS 码. 并以此为出发点,应用近世代数理论,把一维码拓展为二维矩阵码,提出了基于二素数的二维 (2D-RSC) 的具体设计方案. 围绕光码分多址 (OCDMA) 技术实用化的两个主要指标—最大并发用户数和系统误码率 BER,对 2D-RSC 矩阵码在 OCDMA 系统中的应用进行了较为详细的分析研究. 结果表明:基于 2D-RSC 的 OCDMA 系统总体性能优良. 在保持系统误码率不变的条件下,提高了系统传输速率和系统在线用户容量. 通过适当选择二个素数,2D-RSC 系统满足  $10^{-9}$  误码率要求的并发用户数可进一步增大,系统总容量进一步提高. 特别是在传输距离不太远的局域网中,基于 2D-RSC 的 OCDMA 系统有着现实的应用价值.

### 参考文献

- 1 Shaar A A, Davies P A. Prime sequences: quasi-optimal sequences for or channel code division multiplexing. *Electronics Letters*, 1983, 9(21): 888 ~ 889
- 2 Yang G C, Kwong W C. Performance analysis of optical CDMA with prime code. *Eleton Lett*, 1995, 31(7): 569 ~ 570
- 3 Fathallag H, Rusch L A, Larochelle S. Passive optical fast frequencyhop CDMA communication system. *Journal of Lightwave Technology*, 1999, 3(17): 397 ~ 405
- 4 Kwong W C, Zhang J G, Yang G C. 2<sup>n</sup> prime-sequence code and its optical CDMA coding architec-ture. *Electronics Letters*, 1994, 30(6): 509 ~ 510
- 5 Yang G C, Jaw J Y. Performance analysis and sequence designs of synchronous code-division multiple access systems with multi-media services. *Proc Inst Elect Eng-Communications*, 1994, 141(6): 371 ~ 378
- 6 Perrir P A, Prucnal P R. Wavelength-division integration of code-division in fiber-optic system. *Int J Digital Analog Cabled Syst*, 1988, 1: 149 ~ 157
- 7 Guu-Chang Y, Wong C K. Performance comparison of multiwavelength CDMA for fiber-optic networks. *Trans on Commu*, 1997, 45(11): 1426 ~ 1436
- 8 Zhou X, Shalaby H M H, Lu C, et al. Code for spectral amplitude coding optical CDMA systems. *Electron Lett*, 2000, 36: 728 ~ 729
- 9 Ghafouri-Shiraz H, Shalaby H M H. Performance analysis of

optical spectral-amplitude-coding CDMA systems Using a Super-Fluorescent Fiber Source. *IEEE Photonics Technology Letters*, 2001, **13**(8): 887 ~ 889

10 Li C Q, Sun X H, Zhang M D. Performance of spectral-amplitude-coding OCDMA system with optical orthogonal code. *CION-PS 2002*, 2002. 148 ~ 150, Korea

## Performance Analysis and Code-designing of 2D-RSC Based on Two Primes

Li Chuanqi<sup>1,2</sup>, Sun Xiaohan<sup>2</sup>, Zhang Mingde<sup>2</sup>, Ding Dong<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Nanjing Institute of Meteorology, Nanjing 210044, P. R. China

<sup>2</sup> Department of Electronic Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China

Received date: 2002-12-16

**Abstract** The 1-dimension Reed-Solomon (RS) code is firstly constructed in the  $GF(7)$  with the primitive element 3. Based on this RS code, the 2-dimensions RS code (2D-RSC), the scheme of 2D-RSC code-designing is established. Focusing at the improvement in the maximum number of active users and the bit error ratio (BER), the two most important targets leading the system to be actually applied, the general performance of the OCDMA system with 2D-RSC is discussed, the relativity of the codes is analyzed, the upper bound of the number of simultaneous users is given. The system BER is particularly researched. The results indicate that the number of simultaneous users that can be contained in this system will become much larger under the same conditions, the total transmitting capacity of the system will reach the level of Tb/s. Compared to the OCDMA system with 1D-RSC, the general performance of 2D-RSC system will be largely enhanced, especially under the heavy transmitting traffic.

**Keywords** Optical code division multiple access (OCDMA); 2-dimensions Reed-Solomon codes (2D-RSC); Bit-error-ratio (BER)



**Li Chuanqi** was born in 1964. He received the M. S. degree in plasma physics from Institute of Plasma Physics, Academia Sinica, Hefei, China, in 1991. He is nowadays an associate professor and vice director of Department of Physics, Nanjing Institute of Meteorology, Nanjing, China. He is currently working toward Ph. D. in Department of Electronic Engineering, Southeast University, Nanjing, China. His research interests include photonics, optical CDMA and quanta optics.