离轴椭圆厄米-高斯光束通过一阶光学系统的变换特性

黄 伟 曾晓东 安毓英
(西安电子科技大学技术物理学院，西安 710071)

摘 要 从 Collins 公式推导出离轴椭圆厄米-高斯光束通过一阶光学系统的变换关系，并以透镜系统为特例研究了偏心厄米-高斯光束的传输特性，在垂直于 x 轴截面内强度分布仍是厄米-高斯函数形式并保持阶次不变，在传播方向上光束中心轨迹线是一条过焦点的直线.

关键词 偏心椭圆厄米-高斯光束；光传输；光强分布
中图分类号 TN24 **文献标识码** A

0 引言

高斯光束和椭圆高斯光束是描述激光束的一种常见模型，对其通过光学系统的传输变换进行较深入的探讨有重要的实际意义. 近年来，这方面已引起国内外一些学者的广泛关注[1-4]，但他们只研究了基模偏心高斯光束的情况，由于实际上方形孔径共焦腔激光器或大功率阵列型器件必须采用高阶高斯光束模型，因而需要对椭圆厄米-高斯光束经过光学系统的传输变换做进一步研究，这对加快大功率激光器在激光引信、激光雷达、光束整形等方面的应用有极其重要的价值.

本文推导出离轴厄米-高斯光束经一阶光学系统变换得到偏心厄米-高斯光束的变换关系式，详细分析了该光束的中心轨迹线、远场发散角、等相位面曲率半径等传播特性.

1 离轴厄米-椭圆高斯光束经过一阶光学系统的传输

当一椭圆厄米-高斯光束通过一阶光学系统传输时，在入射束腰位置处该离轴厄米-高斯光束的场分布可写为

$$E_0(x,y,0)=H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega_{0x}}\right)\exp\left[-\frac{(x-a_x)^2}{\omega_{0x}^2}-\frac{(y-a_y)^2}{\omega_{0y}^2}\right] \tag{1}$$

式中 ω_{0i}, a_i $(i=x,y)$ 是椭圆厄米-高斯光束在 x 和 y 方向上的束腰半径以及光束中心位置的坐标.

对于上面描述的离轴椭圆厄米-高斯光束通过一阶 *ABCD* 光学系统的传输满足 Collins 公式

$$E(x,y,z)=\frac{\mathrm{i}}{\lambda B}\iint E(x,y,0)\exp\left\{-\frac{ik}{2B}\left[A(x_0^2+y_0^2)-2(x_0x+y_0y)+D(x^2+y^2)\right]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

代入式(1)，则上式经积分后得到

$$E(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{A+B/q_{0x}}}\left(\frac{\frac{A}{B}q_{0x}-1}{\frac{A}{B}q_{0x}+1}\right)^{\frac{m}{2}}H_m\left(\frac{\sqrt{2}(x-Aa_x)}{\omega_{1x}(z)}\right)\frac{1}{\sqrt{A+B/q_{0y}}}\exp\left(-\frac{ik}{2q_{1x}(z)}(x-Aa_x)^2-\frac{ik}{2q_{1y}(z)}(y-Aa_y)^2-ikC(xa_x+ya_y)+ik(a_x^2+a_y^2)\frac{AC}{2}\right) \tag{2}$$

式中，q_{0i}, q_{1i} $(i=x,y)$ 分别为 $z=0$ 和 z 平面处的复 q 参量，且有

$$q_{1i}=\frac{Aq_{0i}+B}{Cq_{0i}+D},\quad q_{0i}=\frac{\mathrm{i}\pi\omega_{0i}^2}{\lambda},\quad k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

最后得到经一阶光学系统变换后偏心厄米-高斯光束的光强分布为

$$I(x,y,z)=E(x,y,z)E^*(x,y,z)=\frac{\omega_{0x}\omega_{0y}}{\omega_{1x}\omega_{1y}}H_m^2\left[\frac{\sqrt{2}(x-x_l)}{\omega_{1x}(z)}\right]\exp\left(-2\left(\frac{(x-x_l)^2}{\omega_{1x}^2}+\frac{(y-y_l)^2}{\omega_{1y}^2}\right)\right) \tag{3}$$

式中 $\omega_{1i}=\omega_{0i}\sqrt{A^2-B^2/q_{0i}^2}$, $x_l=Aa_x$, $y_l=Aa_y$.

可见离轴椭圆厄米-高斯光束经一阶光学系统变换后，在垂直于 z 轴的截面内仍旧保持厄米-高斯函数分布形式，并且阶次不变，但此时出射光束已经变成中心位于 (x_l, y_l) 的偏心椭圆厄米-高斯光束.

2 偏心厄米-椭圆高斯光束的传输特性

为便于讨论该偏心厄米-高斯光束的传输特性，以薄透镜系统为例进行研究，设此透镜焦距为 f，入射厄米-高斯光束的束腰位置到透镜的距离为 d，则

1) 光束中心轨迹线

Tel: 029-88202561 Email: whuang@mail.xidian.edu.cn
收稿日期：2003-03-19

由 $x_l(z)$，$y_l(z)$ 的表达式可知，偏心厄米-高斯光束的中心位于过透镜焦点的直线上，该直线方程为

$$x+\frac{a_x}{f}z-a_x=0 \quad y+\frac{a_y}{f}z-a_y=0 \tag{4}$$

如果令 $x=0$，$y=0$ 可得到其与 z 轴的夹角分别为

$$\theta_x=\arctan(-a_x/f) \quad \theta_y=\arctan(-a_y/f) \tag{5}$$

显然，偏心厄米-高斯光束的中心轨迹线已经不与 z 轴重合，而存在一个特定的夹角，且在垂直于该中心轨迹线的截面内强度分布既不是厄米-高斯函数形式也非对称形状.

2）远场发散角

高阶高斯光束的光斑半径有不同的定义方法，采用最常用的二阶矩定义法，则式(3)表示的偏心厄米-高斯光束在 x 方向的光斑半径 $\omega_m(z)$ 和远场半发散角 θ_x 应该分别为

$$\omega_m^2(z)=\frac{4\int_{-\infty}^{+\infty}x^2H_m^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{1x}}x\right)\exp\left(-2\frac{x^2}{\omega_{1x}^2}\right)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}H_m^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{1x}}x\right)\exp\left(-2\frac{x^2}{\omega_{1x}^2}\right)\mathrm{d}x}=(2m+1)\omega_{1x}^2(z) \tag{6}$$

$$\theta_x=\lim_{z\to\infty}\frac{\omega_m}{z}=\sqrt{2m+1}\lim_{z\to\infty}\frac{\omega_{1x}}{z}=\sqrt{2m+1}\times\sqrt{\frac{1}{f^2}\omega_{0x}^2+\frac{4(1-d/f)^2}{(k\omega_{0x})^2}} \tag{7}$$

当 $d=f$ 时，该偏心椭圆厄米-高斯光束的远场半发散角存在一个最小值 $\theta_{\min}=\sqrt{2m+1}\omega_{0x}/f$，且 f 越大，$\theta_{\min}$ 越小. 这一结果对于许多需要精确描述的场合如激光器列阵的聚焦或高度准直等应是加以考虑的因素.

3）等相位面曲率半径

根据式 $q^{-1}=R^{-1}-i\lambda/\pi\omega^2$ 可得到出射面上偏心厄米-高斯光束在 x 方向的等相位面曲率半径为 $R_x=(B^2-A^2q_{0x}^2)/(BD-ACq_{0x}^2)$.

由于光束在束腰位置处等相位面应为平面，故 $\frac{1}{R_x}\to 0$，并代入 $ABCD$ 矩阵求得

$$z'=f+\frac{(d-f)f^2}{(d-f)^2+(\pi\omega_{0x}^2/\lambda)^2} \tag{8}$$

$$\omega'=\sqrt{2m+1}\frac{f\omega_{0x}}{\sqrt{(f-d)^2+(\pi\omega_{0x}^2/\lambda)^2}} \tag{9}$$

显然，厄米-高斯光束的象方束腰位置 z' 和光斑半径 ω' 都与偏移量 a_x 无关，且当入射离轴厄米-高斯光束束腰位于透镜物方焦平面上时，出射偏心厄米-高斯光束的束腰将处在透镜象方焦平面上，这已经完全不同于几何光学中的概念. 式(8)和式(9)可以很方便地用来解决各种实际问题，例如，利用透镜实现光束自再现变换和焦点法测量光束的远场发散角等.

3　结论

本文推导出离轴椭圆厄米-高斯光束通过一阶光学系统传输的变换关系式，描述了偏心厄米-高斯光束的传播特性，垂直于 z 轴截面内强度分布仍是厄米-高斯函数形式并保持阶次不变，在传播方向上光束中心轨迹线是一条直线，并给出椭圆厄米-高斯光束经一阶光学系统的束腰变换关系式(8)和(9). 本文研究方法和结果可以推广到其它类型高阶高斯光束的情况.

参考文献

1　Abdul-Azeez, Al-Rashed R, Saleh Bahaa E A. Decentered Gaussian beams. *Appl Opt*, 1995, **34**(30): 6819～6825

2　Claudio Palma. Decentered Gaussian beams, ray bundles, and Bessel-Gaussian beams. *Appl Opt*, 1997, **36**(6): 1116～1120

3　沈学举，王斧，刘秉琦，等. 偏心椭圆高斯光束. 中国激光，1999, **26**(2): 171～175
Shen X J, Wang F, Liu B Q, *et al*. *Chinese Journal of Lasers*, 1999, **26**(2): 171～175

4　周昕，刘馨，黄援朝. 高斯光束的偏心分布. 激光杂志，1998, **19**(6): 36～38
Zhou X, Liu X, Huang Y C. *Laser Journal*, 1998, **19**(6): 36～38

Transformation Properties of Off-axial Elliptical Hermit Gaussian Beams Passing Through Paraxial Systems

Huang Wei, Zeng Xiaodong, An Yuying
School of Technical Physics, Xidian University, Xi'an 710071
Received date: 2003-03-19

Abstract Based on the Collins forms, the transformation properties of off-axial EHGB passing through paraxial systems are studied and the intensity distribution of the decentered EHGB is derived. Results show that the intensity distribution of the resulting beam is still a Gaussian function distribution in the plane perpendicular to z axis and the trajectory of its center position is a straight line passing through the focus of a thin lens.
Keywords Decentered EHGB; Beam propagation; Intensity distribution

Huang Wei was born on August 22, 1977, in Anhui Province. He received the B. S. degree in optoelectronics from Xidian University in 2001. Currently, he is pursuing the M. S. degree in Optical Engineering Technical Physical School, Xidian University. His research interests are the high-power laser applications.