有限维 q 非谐振子广义相干态振幅 N 次方压缩*

任 珉[1] 马志民[2] 马爱群[3,4] 赵普举[5] 杨志勇[6] 刘宝盈[7]

(1 广州大学,广州 510405)(2 哈尔滨师范大学呼兰学院物理系,哈尔滨 150500)
(3 珠海工业学校物理组,珠海 519015)(4 枣庄师专物理系,山东枣庄 277100)
(5 西北大学物理学系,西安 710069)(6 西安电子科技大学技术物理学院,西安 710071)
(7 西北大学光子学与光子技术研究所,西安 710069)

摘 要 利用 Zhang 等人提出的单模辐射场的振幅 N 次方压缩理论,研究了有限维希尔伯特空间中单参数 q 变形非简谐振子广义相干态的振幅 N 次方压缩效应. 结果发现:该量子光场的确存在场的振幅 N 次方压缩效应,其压缩条件分别与相位角 Φ、维度参数 s、压缩幂次 N、平均光子数的方根 r 和变形参数 q 相关;这一结果与无限维希尔伯特空间单参数 q 变形广义相干态的情形截然不同.

关键词 有限维希尔伯特空间;单参数 q 变形;非简谐振子;广义相干态;场的振幅 N 次方压缩

中图分类号 O431 **文献标识码** A

0 引言

量子信息科学与技术领域研究的快速发展,使得有限维希尔伯特空间简谐振子的量子特性研究受到人们的广泛关注,目前人们已经分别对有限维希尔伯特空间的简谐振子的各种量子代数、相干态的构造及其非经典量子统计特性等进行了大量的研究[1~4]. 最近几年人们又把研究简谐振子的基本思路进一步推广应用到非简谐振子之中,构造了非简谐振子的各种广义相干态,研究了它们的非经典量子特性[5~8],结果表明:非简谐振子广义相干态及其 q 变形都可以出现压缩和反聚束效应[7~9]. 但是,上述研究对于无限维希尔伯特空间中单参数 q 变形相干态的情形讨论的较多,而对于有限维希尔伯特空间中单参数 q 变形相干态则探讨较少,特别是对于有限维希尔伯特空间中单参数 q 变形非简谐振子广义相干态的高次振幅压缩特性等始终未进行任何探讨. 事实上,进一步对各种量子光场的非经典性质进行深入探讨不仅具有重大的学术价值,而且其研究成果在原子与分子光谱学、以及光量子信息科学与技术等高科技领域具有广阔的应用前景[1~20]. 需要强调指出的是,自 1992 年 Buzek 等人首先提出有限维希尔伯特空间相干态之后[3],Hillery 等人又将简谐振子的普通奇、偶相干态推广到非简谐振子之中[10,11],由此构造出了有限维希尔伯特空间奇、偶相干态,并且进一步研究了它们的压缩特性[12]. 卢道明则把单参数 q 变形的对应研究推广到有限维希尔伯特空间,构造了有限维希尔伯特空间单参数 q 变形非简谐振子的广义相干态,研究了它的振幅平方压缩效应[13],但文献[12,13]对于这个态的振幅 N 次方压缩特性问题却未进行任何探讨. 本文则进一步研究了更具有一般性的有限维希尔伯特空间中单参数 q 变形非简谐振子广义相干态的振幅 N 次方压缩,阐明了压缩条件与相位角 Φ、维度参数 s、压缩幂次 N、平均光子数的方根 r 和变形参数 q 之间的相互关系;结果发现,卢道明等人的研究结果仅仅是本文的一般性结果在压缩幂次 $N=2$ 这一条件的特例.

1 两种 q 非谐振子的广义相干态

1.1 无限维 q 广义相干态

文献[12]指出,非简谐振子哈密顿算符的无量纲形式为

$$H=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^2}+\frac{A}{2x^2}+\frac{1}{2}x^2 \qquad (A>0) \tag{1}$$

与其对应的自然坐标算符和自然动量算符为

$$Q=x^2-H,P=\frac{1}{2i}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\right) \tag{2}$$

它们满足对易关系

$$[H,Q]=-2\mathrm{i}P,[H,P]=2\mathrm{i}Q,[Q,P]=2\mathrm{i}H \tag{3}$$

引入相应的湮没和产生算符

$$\begin{gathered}a=\frac{1}{2}(Q+\mathrm{i}P),a^+=\frac{1}{2}(Q-\mathrm{i}P)\\ [H,a]=-2a,[H,a^+]=2a^+,[a,a^+]=H\end{gathered} \tag{4}$$

引入单参数 q 变形光场的光子湮没和产生算符[8]

$$a_q=a\varphi(N),a^+=\varphi(N)a^+ \tag{5}$$

$$\varphi(N)=\sqrt{\frac{[N][N+2k-1]}{N[N+2k-1]}} \tag{6}$$

式中 $N=H/2-k$ 为粒子数算符

$$k=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2A+\frac{1}{4}}\right)$$

*广东省科技计划项目(批准号:2003C33303)、陕西省自然科学基金项目(批准号:2001SL04)和陕西省科技攻关项目(批准号:2002K05-G9)资助

Tel:020-32230685 Email:renmin_58@163.net

收稿日期:2004-06-17

$$[\chi]=\frac{q^{\chi}-1}{q-1}\qquad(q\in[0,1])$$

单参数 q 变形光场的光子湮没与产生算符之间的对易关系为

$$[a_q,a_q^+]_q=a_q,a_q^+-qa_q^+a_q=[2N+2k],$$
$$[N,a_q^+]=+a_q^+,[N,a_q]=-a_q\qquad(7)$$

它们对 Fock 态 $|n\rangle$ 的作用为

$$N|n\rangle=n|n\rangle$$
$$a_q|n\rangle=\sqrt{[n][n+2k-1]}|n-1\rangle,$$
$$a_q^+|n\rangle=\sqrt{[n+1][n+2k]}|n+1\rangle\qquad(8)$$

单参数 q 变形非简谐振子广义相干态可表为

$$|\beta\rangle_q=\{F_q(\beta)\}^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{\sqrt{[n]!\ [2k]_n}}|n\rangle\qquad(9)$$

式中

$$F_q(\chi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi^{2n}}{[n]!\ [2k]_n}$$
$$[n]!\ =[n]\times[n-1]\cdots\cdots[2]\times[1]$$
$$[\chi]_n=[\chi]\times[\chi+1]\cdots\cdots[\chi+n-1]$$
$$\beta=r\exp\ (\mathrm{i}\phi)$$

1.2　有限维 q 广义相干态

文献[12,14]指出，由 $|0\rangle,|1\rangle,\cdots|2s\rangle$ 组成 $(2s+1)$ 维希尔伯特空间，其中 s 为维度参数（取任意正整数）．在此空间中，单参数 q 变形非简谐振子的湮没和产生算符分别为

$$a_q=\sum_{n=0}^{2s}\sqrt{[n][n+2k-1]}|n-1\rangle\langle n|,$$
$$a_q^+=\sum_{n=0}^{2s}\sqrt{[n+1][n+2k]}|n+1\rangle\langle n|\qquad(10)$$

a_q 和 a_q^+ 满足对易关系

$$[a_q,a_q^+]=\sum_{n=0}^{2s}[2n+2k]|n\rangle\langle n|-[2s+1][2s+2k]|2s\rangle\langle 2s|\qquad(11)$$

它们对广义 Fock 态的作用为

$$a_q|n\rangle=\sqrt{[n][n+2k-1]}|n-1\rangle,$$
$$a_q|0\rangle=0\qquad(12a)$$
$$a_q^+|n\rangle=\sqrt{[n+1][n+2k]}|n+1\rangle,$$
$$a_q^+|2s\rangle=0\qquad(12b)$$

有限维希尔伯特空间单参数 q 变形非简谐振子的广义相干态可定义为

$$|\beta,s\rangle_q=\{F_q(r,2s)\}^{\frac{-1}{2}}*\sum_{n=0}^{2s}\frac{\beta^n}{\sqrt{[n]!\ [2k]_n}}|n\rangle\qquad(13)$$

式中，$F_q(r,m)=\sum_{n=0}^{m}\frac{r^{2n}}{[n]!\ [2k]_n}$

2　态 $|\beta,s\rangle_q$ 的振幅 N 次方压缩效应

类似于张智明等人首先提出的一般单模辐射光场的振幅 N 次方压缩的定义[15]，在此我们引入单参数变形 q 光场的振幅 N 次方压缩的概念．

对于 q 光场而言，其两个正交相位分量的振幅 N 次方分量可表为

$$\chi_1=\frac{1}{2}(a_q^N+a_q^{+N})$$
$$\chi_2=\frac{1}{2\mathrm{i}}(a_q^N-a_q^{+N})\qquad(14)$$

它们满足对易关系和测不准关系

$$[\chi_1,\chi_2]=\frac{\mathrm{i}}{2}(a_q^N,a_q^{+N})$$
$$\langle(\Delta\chi_1)^2\rangle\langle(\Delta\chi_2)^2\rangle\geqslant\frac{1}{4}|\langle[\chi_1,\chi_2]\rangle|^2\qquad(15)$$

定义

$$\Delta\chi_1=\langle(\Delta\chi_1)^2\rangle-\frac{1}{2}|\langle[\chi_1,\chi_2]\rangle|=\frac{1}{4}[\langle a_q^{2N}+a_a^{+2N}\rangle+2\langle a_q^{+N}a_q^N\rangle-\langle a_q^N+a_q^{+N}\rangle^2]$$
$$\Delta\chi_2=\langle(\Delta\chi_2)^2\rangle-\frac{1}{2}|\langle[\chi_1,\chi_2]\rangle|=\frac{1}{4}[-\langle a_q^{2N}+a_a^{+2N}\rangle+2\langle a_q^{+N}a_q^N\rangle+\langle a_q^N-a_q^{+N}\rangle^2]\qquad(16)$$

若 $\Delta\chi_1<0$ 或 $\Delta\chi_2<0$，则称 χ_1 分量或 χ_2 分量存在场的振幅 N 次方压缩效应．

由式(11)、(12)可得

$$\langle a_q^N+a_q^{+N}\rangle=2r^{2N}[F_q(r,2s)]^{-1}\cdot F_q(r,2s-N)\cos\ (N\varphi)$$
$$\langle a_q^{2N}+a_q^{+2N}\rangle=2r^{4N}[F_q(r,2s)]^{-1}\cdot F_q(r,2s-2N)\cos\ (2N\varphi)$$
$$\langle a_q^N-a_q^{+N}\rangle=2\mathrm{i}r^{2N}[F_q(r,2s)]^{-1}\cdot F_q(r,2s-N)\sin\ (N\varphi)$$
$$\langle a_q^{+N}a_q^N\rangle=2r^{2N}[F_q(r,2s)]^{-1}\cdot F_q(r,2s-N)\qquad(17)$$

由式(16)、(17)可得

$$\Delta\chi_1=\frac{1}{2}r^{2N}[F_q(r,2s)]^{-2}\{[F_q(r,2s-2N)\cdot\cos\ (2N\varphi)+F_q(r,2s-N)]F_q(r,2s)-2[F_q(r,2s-N)]\cos^2(N\varphi)\}$$
$$\Delta\chi_2=\frac{1}{2}r^{2N}[F_q(r,2s)]^{-2}\{[F_q(r,2s)\cdot[-F_q(r,2s-2N)\cos\ (2N\varphi)+F_q(r,2s-N)]-2[F_q(r,2s-N)]^2\sin^2(N\varphi)\}\qquad(18)$$

由式(18)可知：在 $\Delta\chi_2$ 中，当用 $\varphi+\pi/2N$ 取代 φ 时，$\Delta\chi_2=\Delta\chi_1$，因而只要讨论 $\Delta\chi_2$ 和 $\Delta\chi_1$ 其中的任何一个分量的情况即可．

$\Delta\chi_1$ 可变为

$$\Delta\chi_1=\frac{1}{2}r^{2N}[F_q(r,2s)]^{-2}\{[F_q(r,2s-2N)\cdot F_q(r,2s)-F_q(r,2s-N)^2]\cos\ (2N\varphi)+F_q(r,2s-N)F_q(r,2s)-F_q(r,2s-N)^2\}\qquad(19)$$

由式(13)可得

$$F_q(r,2s-2N)-F_q^2(r,2s-N)=A_2(2s-2N+1)r^{2(2s-2N+1)}+A_2(2s-2N+2)r^{2(2s-2N+2)}+\cdots+A_2(4s-2N)r^{2(4s-2N)}-A_4(2s-2N)r^{4(2s-2)}-$$

$A_2(4s-2N+1)r^{2(4s-2N+1)}\cdots-A_4(2s-N)r^{4(2s-N)}$

$$F_q(r,2s-N)F_q(r,2s)-F_q(r,2s-N)^2=B_2(2s-N+1)r^{2(2s-N+1)}+B_2(2s-N+2)r^{2(2s-N+2)}+\cdots B_2(4s-N)r^{2(4s-N)} \quad (20)$$

式中

$$A_2(2s-2N+1)=\frac{1}{[2s-2N+1]!\ [2K]_{2s-2N+1}}$$

$$A_2(2s-2N+2)=\frac{1}{[2s-2N+2]!\ [2K]_{2s-2N+2}}-\frac{1}{\sqrt{[2s-2N+1]!\ [2K]_{2s-2N+1}}}\frac{1}{\sqrt{[1]!\ [2K]_1}}$$

$$\vdots$$

$$A_2(4s-2N)=\frac{1}{[2s-2N]!\ [2K]_{2s-2N}}$$

$$A_4(2s-2N)=\frac{1}{[2s-2N]!\ [2K]_{2s-N}}$$

$$A_2(4s-4N+1)=\frac{1}{[2s-2N]!\ [2K]_{2s-2N}}\cdot\frac{1}{\sqrt{[2s-2N+1]!\ [2K]_{2s-2N+1}}}$$

$$A_4(2s-N)=\frac{1}{[2s-N]!\ [2K]_{2s-N}}$$

$$B_2(2s-N+1)=\frac{1}{\sqrt{[2s-N+1]!\ [2K]_{2s-N+1}}}$$

$$B_2(2s-N+2)=\frac{1}{\sqrt{[2s-N+2]!\ [2K]_{2s-N+2}}}+\frac{1}{\sqrt{[2s-N+1]!\ [2K]_{2s-N+1}}}\frac{1}{\sqrt{[1]!\ [2K]_1}}$$

$$\vdots$$

$$B_2(4s-N)=\frac{1}{\sqrt{[2s-N]!\ [2K]_{2s-N}}\sqrt{[2s]!\ [2K]_{2s}}}$$

若要使 $\Delta\chi_1<0$ 只要满足条件

$$\frac{F_q(r,2s-N)}{F_q(r,2s-2N)}<1 \quad (21)$$

由于 $2(2s-N+1)>2(2s-2N+1)$,因而只要 r 取小于1的数就能使式(21)成立．这样在选择了一定的q,适当选择足够小的r,就能使式(21)成立．因此,在式(21)成立的条件下,通过适当地选 φ,就可使 $\Delta\chi_1<0$ 成立．这就充分表明在有限维希尔伯特空间中,单参数 q 变形非简谐振子的广义相干态在一定条件下可以存在振幅 N 次方压缩效应．另一方面,由于 $F_q(r,2s-N)F_q(r,2s)-F_q^2(r,2s-N)$ 与 $F_q(r,2s-2N)F_q(r,2s)-F_q^2(r,2s-N)$ 这两者在 $s\to\infty$ 时均为0,故在 $s\to\infty$ 时 $\Delta\chi_1=\Delta\chi_2\to0$,因此在这种情况下态 $|\beta,s\rangle_q$ 趋向于最小测不准态．这就表明,无限维希尔伯特空间中单参数 q 变形非简谐振子广义相干态在任何情况下都不会呈现振幅 N 次方压缩效应．

3 结论

利用Zhang等人提出的单模辐射光场的振幅 N 次方压缩理论,研究了有限维希尔伯特空间中单参数 q 变形非简谐振子广义相干态的振幅 N 次方压缩效应．结果发现,当位相参数满足一定条件时,该量子态可呈现出振幅 N 次方压缩效应,且其压缩特性分别与维度参数 s、变形参数 q,以及平均光子数的方根 r 和位相参数 Φ 等密切相关．通常的无限维希尔伯特空间中单参数 q 变形非简谐振子广义相干态只是本文所研究的态在维度参数 $s\to\infty$ 时的特例,并且这种态在任何情况下都不存在振幅 N 次方压缩效应．应该指出的是,本文所采用的证明方法具有一般性．

参考文献

1 Roy B, Roy P. Even and odd coherent states in a finite-dimensional Hilbert space and properties. *J Phy*, 1998, **31**(4):1307～1317

2 Pegg D T, Barnett S M. Phase properties of the quantized single mode electro- magnetic field. *Phys Rev A*, 1989, **39**(4): 1665～1675

3 Buzek V, Wilson-Gordon A D, Knight P L, *et al*. Coherent states in a finite-dimensional basis: Their Phase properties and relation ship to coherent states of light. *Phys Rev A*, 1992, **45**(11):8079～8094

4 Kuang L M, Wang F B, Zhou Y G. Dynamics of a harmonic oscillator in a finite-dimension Hilbert space. *Phy Lett A*, 1993, **183**(1):8079(1～8)

5 徐子文. 非简谐振子的奇偶广义相干态. 物理学报, 1996, **45**(11):1807～1811

Xu Z W. *Acta Physica Sinica*, 1996, **45**(11):1807～1811

6 倪致祥. 非简谐振子的广义相干态的迭加态. 物理学报, 1997, **46**(9):1688～1692

Ni Z X. *Acta Physica Sinica*, 1997, **46**(9):1688～1692

7 于肇贤, 王继琐, 刘业厚. 非简谐振子广义奇偶相干态高阶压缩效应及反聚束效应. 物理学报, 1997, **46**(9):1693～1698

Yu Z X, Wang J S, Liu Y H. *Acta Physica Sinica*, 1997, **46**(9):1693～1698

8 徐子文. Q 变形非简谐振子广义相干态. 物理学报, 1999, **23**(5):436～444

Xu Z W. *Acta Physica Sinica*, 1999, **23**(5): 436～444

9 汪仲清. 奇偶 q-变形相干态的高阶压缩效应. 物理学报, 2001, **50**(4):690～692

Wang Z Q. *Acta Physica Sinica*, 2001, **50**(4):690～692

10 Hillery M. Amplitude-squared Squeezing of the electromagnetic field. *Phys Rev A*, 1987, **36**(8): 3796～3802

11 Xia Y J, Guo G C. Non-classical properties of even and odd coherent states. *Phys Lett A*, 1989, **136**(6):281～283

12 Zhu J Y, Kuang L M. Even and odd coherent states of a harmonic oscillator in a finite-dimensional Hilbert space and their squeezing properties. *Phys Lett A*, 1994, **193**(3):227 ~ 234

13 卢道明. 有限维希尔伯特空间 q 广义相干态振幅平方压缩. 高能物理与核物理,2003,**27**(11):966 ~ 968
Lou D M. Higher Energy Physics and Neuclear Physics, 2003,**27**(11):966 ~ 968

14 朱从旭,王发博,匡乐满. 有限维希尔伯特空间 q-畸变谐振子偶相干态及其压缩和反聚束特性. 光学学报, 1999,**19**(4):441 ~ 444
Zhu C X, Wang F B, Kuang L M. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(4):441 ~ 444

15 Zhang Z M, Xu L, Chai J L, *et al.* A new kind of higher-order squeezing of radiation field. *Phys Lett*(*A*), 1990, **150**(1):27 ~ 30

16 杨志勇,侯洵. 一种双模叠加态光场的两种非线性高阶层缩效应. 光子学报,1998,**27**(4):289 ~ 299
Yang Z Y, Hou X. *Acta Photonica Sinica*, 1998, **27**(4): 289 ~ 299

17 侯洵,杨志勇. 第Ⅰ类两态叠加多模叠加态光场的非线性高阶压缩特性研究. 光子学报,1998,**27**(10):865 ~ 878
Hou X,Yang Z Y. *Acta Photonica Sinica*,1998,**27**(10): 865 ~ 878

18 杨志勇,侯洵. 多模辐射场的广义非线性高阶差压缩-N次方 X 压缩的一般理论. 光子学报,1998,**27**(12):1065 ~ 1069
Yang Z Y, Hou X. *Acta Photonica Sinica*, 1998,**27**(12): 1065 ~ 1069

19 杨志勇,侯洵. 多模辐射场的广义非线性不等阶高阶压缩的一般理论. 光子学报,1999,**28** (5):385 ~ 392
Yang Z Y, Hou X. *Acta Photonica Sinica*,1999,**28**(5): 385 ~ 392

20 杨志勇,侯洵. 第Ⅱ类两态叠加多模叠加态光场的非线性高阶压缩特性研究. 光子学报,1998,**27**(11):962 ~ 973
Yang Z Y, Hou X. *Acta Photonica Sinica*, 1998, **27**(11): 962 ~ 973

N-th Power Squeezing of the Field-amplitude on Generalized Single-parameter q-Deformation Coherent State of an Anharmonic Oscillator in a Finite-dimension Hilbert Space

Ren Min[1], Ma Zhimin[2], Ma Aiqun[3,4], Zhao Puju[5], Yang Zhiyong[6], Liu Baoying[7]

1 *Guangzhou University, Guangzhou* 510405

2 *Department of Physics of HuLan School, Harbin Normal University Heilongjiang, Harbin* 150500

3 *Zhuhai Polytechnic School, Guangdong Zhuhai* 519015

4 *Department of Physics, Zaozhuang Teacher's College, Shandong Zaozhuang* 277100

5 *Department of Physics, Northwest University, Xi'an* 710069

6 *School of Technical Physics, Xidian University, Xi'an* 710071

7 *Institute of Photonics and Photon-technology, Northwest University, Xi'an* 710069

Received date:2004-06-17

Abstract The property of N-th power squeezing of field-amplitude on generalized single-parameter q-deformation coherent state of an anharmonic oscillator in a finite-dimensional Hilbert space is studied firstly and systematically. By utilizing the theory of N-th power squeezing of the field-amplitude of single-mode radiation field, which is proposed by Zhang Zhiming et al. It is found firstly that there exists really the effect of N-th power squeezing of the field-amplitude on generalized single-parameter q-deformation coherent state of an anharmonic oscillator in a finite-dimension Hilbert space, and the condition of squeezing closely relates to parameters Φ、S、r and q, which are rather different from the case of generalized single-parameter q-deformation coherent state generated by an anharmonic oscillator in the infinite-dimension Hilbert space.

Keywords Finite-dimension Hilbert space; Single-parameter q-deformation; Generalized coherent state; N-th power squeezing of field-amplitude

Ren Min was born in December, 1958, in Harbin City, Heilongjiang Province, P. R. China. She earned B. Sc. degree in physics from department of physics, Northeast Normal University, in 1983. From 1983 to 1994, she worked at Harbin University as a lecturer. Since 1995 she has worked at Guangzhou University as an associate professor. Currently she has published over 20 papers. And her major research fields include quantum optics and anti-seismic structure engineering.