

光轴方向任意的晶体连续双折射双反射*

任海霞 刘立人 宋哲 栾竹

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘要 根据惠更斯定理,研究了单轴晶体光轴任意方向的双折射与全内双反射,给出了光线方向和光波法线方向的普遍公式. 讨论了在晶体沿多个面的连续双折射双反射,分析了前一界面输出量和后一界面输入量之间的联系,得到多次双折射双反射后的光线方向和光波法线方向. 在此基础上,适当地选取晶体的界面参数,相当于选取光轴方向,可以使o光和e光的分离角 Δ_{oe} 更大. 光轴方向任意的晶体连续双折射双反射对晶体器件的最优化设计非常有帮助. 最后给出了改变斜入射 2×2 电光开关的出射面参数使 Δ_{oe} 优化的实例.

关键词 双折射; 双反射; 连续界面; 分离角; 优化设计

中图分类号 O435.1 **文献标识码** A

0 引言

各向异性的单轴晶体有双折射效应^[1,2]: 当一束光从空气或在晶体入射到晶面上时, o光(常光)和e光(非常光)有不同的折射和全内反射方向. o光沿着它的波前法线方向(也就是波法线方向)传播,其折射和反射与在各向同性介质中传播一样. 而e光的光线传播方向与波法线方向一般是不一致的. 很多文献研究了单轴晶体内的双折射双反射^[3-8],对于单个面上的情况已经有了较透彻的理解. 但是要指出的是上面所列出的文献大多处理的是单个界面上的情况. 在实际中,一束光入射含有多个界面的晶体后可能被反射多次才从晶体中射出. 文献[9]研究了光轴在入射面的连续双折射双反射. 但是光轴也可能不在每一个界面的入射面内. 在这种情况下,有必要整理出光轴不在入射面内的双折射双反射的公式. 并在此基础上,计算光轴不在入射面内的晶体内的连续双折射双反射.

大多数的电光开关^[10,11]都是具有特殊的几何结构,比如光轴在入射面内,输入面和输出面平行等等,所以一些感兴趣的参数也受到了限制,例如出射晶体后o、e两光的分离角. 如果光轴可以指向任意方向,那么参数的调整范围就可以变大,有利于晶体器件的最优化设计.

1 单个界面上的双折射双反射

建立如图1所示的 (x, y, z) 坐标系,它是界面的法线坐标系: z 轴是界面的内法线, $z=0$ 是界面, $z >$

0 是晶体,

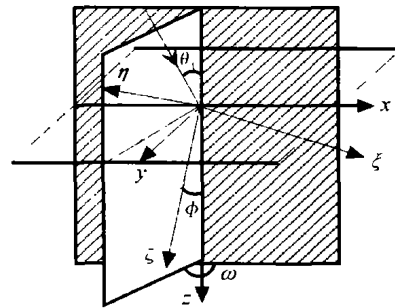


图1 界面法线和入射面组成的坐标系
Fig. 1 System defined by the surface normal and the plane of incidence

$z < 0$ 是空气; x 轴是入射面(入射光波法线和界面法线组成的面)与界面的交线,向右为正方向; y 轴在界面内. (ξ, η, ζ) 是晶体的光轴坐标系: ζ 轴是晶体光轴方向,选取在晶体内的为正方向; ξ 轴是垂直主截面(晶体光轴和界面法线组成的面),并在界面内; η 轴在主截面内. ζ 和 z 夹角为 ϕ ,主截面和入射面夹角为 ω ,则两坐标系之间的变换为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \omega & \cos \omega \cos \phi & \cos \omega \sin \phi \\ -\cos \omega & \sin \omega \cos \phi & \sin \omega \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 T 是变换矩阵. θ_i 是入射光波法线和界面法线所成的角, θ_r 是折射或全内反射光波法线与界面法线所成的角. n_o 、 n_e 分别为晶体的常光折射率和非常光折射率,下标 i 指入射, r 指折射或反射.

1.1 从空气到晶体的折射

如图1,一束平行光线从空气入射到单轴晶体表面上,根据惠更斯原理^[4],晶体内的e光波面是椭球

$$n_e^2(\xi^2 + \eta^2) + n_o^2\zeta^2 = 1 \quad (2)$$

*国家自然科学基金(60177016)和国家科技部(2002CCA03500)资助项目
Tel: 021-59911214 Email: dstrait@sina.com
收稿日期: 2003-10-08

的切平面

$$n_e^2(\xi_R \xi + \eta_R \eta) + n_o^2 \zeta_R \zeta = 1 \quad (3)$$

其中 $R(\xi_R, \eta_R, \zeta_R)$ 是切点. 则 OR 就是折射后 e 光线矢量 S_r , 切平面的法向量就是折射后 e 光波法线矢量 K_r . 给出 ϕ, ω, θ_i 可求出 $R(\xi_R, \eta_R, \zeta_R)$ [4]

$$\begin{cases} \xi_R = \sin \omega \sin \theta_i / n_e^2 \\ \eta_R = (\cos \omega \cos \phi \sin \theta_i - \mu \sin \phi) / n_e^2 \\ \zeta_R = (\cos \omega \sin \phi \sin \theta_i + \mu \cos \phi) / n_e^2 \end{cases} \quad (4)$$

式中 $\mu = \cot \theta_i \sin \theta_i, \mu \geq 0$. 而 R 又是椭球上的一点, 把式(4)代入式(2), 得到 μ 的一元二次方程, 可以解出 μ 的值. 现在 μ 为已知, 则由式(4)可求出 $R(\xi_R, \eta_R, \zeta_R)$ 再用公式(1)变换到法线坐标系中, 那么折射后 e 光光线矢量 S_r 就可得到

$$\begin{bmatrix} S_{rx} \\ S_{ry} \\ S_{rz} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \xi_R \\ \eta_R \\ \zeta_R \end{bmatrix} \quad (5)$$

折射后 e 光波法线矢量 K_r

$$\begin{bmatrix} K_{rx} \\ K_{ry} \\ K_{rz} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} n_e^2 \xi_R \\ n_e^2 \eta_R \\ n_o^2 \zeta_R \end{bmatrix} \quad (6)$$

折射后 e 光波法线折射率

$$n_r = \sqrt{\mu^2 + \sin^2 \theta_i} \quad (7)$$

1.2 从晶体到空气的折射

当一束平行光线在晶体入射到单轴晶体表面上. 入射光波法线单位向量 $K_i(\sin \theta_i, 0, \cos \theta_i)$, 光轴的单位向量 ζ 可由式(1)给出为 $(\cos \omega \sin \phi, \sin \omega \sin \phi, \cos \phi)$, 则入射光波法线与光轴的夹角 γ 可求出

$$\cos \gamma = K_i \cdot \zeta = \sin \theta_i \cos \omega \sin \phi + \cos \theta_i \cos \phi \quad (8)$$

入射光波法折射率

$$n_i = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \gamma + n_e^2 \cos^2 \gamma}} \quad (9)$$

因为在各向同性介质中, 光线矢量与光波法线矢量是一致的, 所以用 Snell 定理求解比较简单.

$$\theta_r = \arcsin(n_i \sin \theta_i) \quad (10)$$

$$K_r = S_r = (-\sin \theta_r, 0, -\cos \theta_r) \quad (11)$$

$$n_r = 1 \quad (12)$$

1.3 在晶体内的双反射

当光从晶体内向空气折射时, 如果式(10)的计算结果大于 90° , 那么就没有折射光线, 将在该界面上发生全内反射.

当一束平行光线在晶体入射到单轴晶体表面上, 类同光从空气到晶体的折射, 反射后的 e 光波面也是椭球的切平面, 可用式(3)表示. 要求出切点

$R(\xi_R, \eta_R, \zeta_R)$. 考虑界面边界条件, 入射波面到晶体界面上相隔为 $1/n_i$ (n_i 是入射光波法线折射率, 可由式(10)求出), 发生反射后, 反射波面如图 2 中所

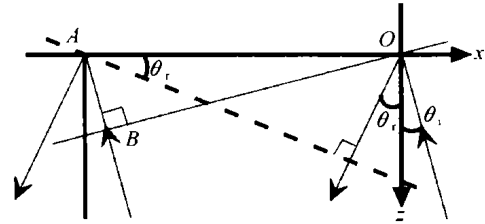


图 2 实线是入射波面, 虚线是反射波面
Fig. 2 Solid line is wavefront incident on the crystal surface, and dash line is wavefront internally reflected by the crystal surface

示的虚线, 可表示为

$$x \sin \theta_i - \mu z + 1/n_i = 0 \quad (13)$$

式中 $\mu = \cot \theta_i \sin \theta_i, \mu < 0$. 而式(3)和(13)表示的是同一波面, 所以利用系数相等可得

$$\begin{cases} \xi_R = -n_i \sin \omega \sin \theta_i / n_e^2 \\ \eta_R = -n_i (\cos \omega \cos \phi \sin \theta_i + \mu \sin \phi) / n_e^2 \\ \zeta_R = -n_i (\cos \omega \sin \phi \sin \theta_i - \mu \cos \phi) / n_e^2 \end{cases} \quad (14)$$

而 R 又是椭球上的一点, 把式(14)代入式(2), 得到 μ 的一元二次方程, 可以解出 μ 的值. 现在 μ 为已知, 则由式(14)可求出 $R(\xi_R, \eta_R, \zeta_R)$, 再用式(1)变换到法线坐标系中, 那么反射后 e 光光线矢量 S_r 就可得到

$$\begin{bmatrix} S_{rx} \\ S_{ry} \\ S_{rz} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \xi_R \\ \eta_R \\ \zeta_R \end{bmatrix} \quad (15)$$

反射后 e 光波法线矢量 K_r

$$\begin{bmatrix} K_{rx} \\ K_{ry} \\ K_{rz} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} n_e^2 \xi_R \\ n_e^2 \eta_R \\ n_o^2 \zeta_R \end{bmatrix} \quad (16)$$

反射后光波法线折射率

$$n_r = n_i \sqrt{\mu^2 + \sin^2 \theta_i} \quad (17)$$

上述的公式也同样适用于 o 光, 只要在使用时令 $n_o = n_e, n_i = n_o$. 如果 $\omega = 0^\circ$ 或 180° , 就是光轴在入射面的情况. 经过验证, 把 $\omega = 0^\circ$ 或 180° 代入本文推导的公式中, 和光轴在入射面内的双折射双反射公式 [9] 是相符合的.

2 连续双折射双反射

当光进入含有多个界面的晶体元件后, 可能会被反射许多次才从晶体出射, 而且光轴可能不会在每一个界面的入射面内. 我们必须考虑这种情况, 它对晶体元件设计是很重要的.

表 1 两个界面上的连续双折射双反射

Interface 1	Interface 2	S_{1r}	K_{1r}	n_{1r}	Relation	S_{2r}	K_{2r}	n_{2r}	
1	air-crystal	crystal-air	Eq. (5)	Eq. (6)	Eq. (7)	Eq. (18)	Eq. (11)	Eq. (11)	Eq. (12)
2	air-crystal	crystal-crystal	Eq. (5)	Eq. (6)	Eq. (7)	Eq. (21)	Eq. (15)	Eq. (16)	Eq. (17)
3	crystal-crystal	crystal-crystal	Eq. (15)	Eq. (16)	Eq. (17)	Eq. (22)	Eq. (15)	Eq. (16)	Eq. (17)
4	crystal-crystal	crystal-air	Eq. (15)	Eq. (16)	Eq. (17)	Eq. (23)	Eq. (11)	Eq. (11)	Eq. (12)

一般来说,两个面的双折射双反射有 4 种情况,如表 1. 为了简便,我们用“air-crystal”表示从空气到晶体的折射,“crystal-air”表示从晶体到空气的折射,“crystal-crystal”表示晶体内的全内反射. 对于单个面上的双折射或双反射,给出入射光的光线方向和光波法线方向,都可以得到折射或反射的光线方向和光波法线方向,问题在于如何将界面 1 的输出与界面 2 的输入联系起来. 注意到在光从界面 1 传播到界面 2 的过程中,光波法线和光轴夹角没改变,那么光波法线折射率也没改变,所以有

$$n_{1r} = n_{2i} \tag{18}$$

以界面 1 的法线坐标系为基准,界面 2 可表示为

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{19}$$

界面 2 总可以平移到过原点,故 $D = 0$; 又因为选取内法线方向为正,界面 2 可重写为

$$(A/C)x + (B/C)y + z = 0 \Rightarrow Ax + By + z = 0 \tag{20}$$

于是在界面 1 的法线坐标系中,界面 2 的的界面法线向量 N_2 为 $(A, B, 1)$, 光轴的单位向量 ζ_1 可由式(1)得到为 $(\zeta_{1x}, \zeta_{1y}, \zeta_{1z})$, 界面 1 的折射或反射光波法线向量 K_r 可由式(6)或(16)得到为 $(K_{1rx}, 0, K_{1rz})$ 则界面 2 法线坐标系中的关键量 $\phi_2, \omega_2, \theta_{2i}$ 都可求出

$$\cos \phi_2 = WTJX\zeta_1 N_2 = \frac{|A\zeta_{1x} + B\zeta_{1y} + \zeta_{1z}|}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \tag{21}$$

$$\cos \theta_{2i} = \frac{|K_{1rx}A + K_{1rz}|}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1} \sqrt{K_{1rx}^2 + K_{1rz}^2}} \tag{22}$$

$$\cos \omega_2 = [| -Bk_{1rx}(\xi_{1y} - B\xi_{1z}) + (AK_{1rx} - K_{1rz}) \cdot (A\xi_{1z} - \xi_{1x}) + BK_{1rx} (B\xi_{1x} - A\xi_{1y}) |] / [\sqrt{(\xi_{1y} - B\xi_{1z})^2 + (A\xi_{1z} - \xi_{1x})^2 + (B\xi_{1x} - A\xi_{1y})^2} \cdot \sqrt{B^2 + (AK_{1rx} - K_{1rz})^2}] \tag{23}$$

按照表 1 所列的公式,就可计算两个面上的双折射双反射. 多个面上的双折射双反射可以看成是若干个两个连续界面上的双折射双反射级联而成的,因此多个面上的双折射双反射也可求解.

3 例证

以前对于光轴在入射面的情况,只能通过调整光轴和界面法线的夹角 ϕ 来获得 o、e 光的最大输出分离角. 现在可以通过同时调整主截面和入射面的夹角 ω 以及光轴和界面法线的夹角 ϕ 来达到目的. 比如对于如图 3 所示的电光开关^[11],其输入面与输

出面平行. 在出射面上, $\phi = 31.82^\circ, \omega = 180^\circ$, o 光入射角为 $\theta_{oi} = 2.18^\circ$, e 光入射角为 $\theta_{ei} = 0.03009^\circ$, 最后输出的 o、e 光的分离角 Δ_{oe} 为 4.9225° . 但是如果以出射面为基准,在此基础上改变界面为 $Ax + By + z = 0$,也就是改变了 ϕ 和 ω ,可以得到更大的 Δ_{oe} . 使用表 1 中的公式经过计算,得到当新的界面为 $-0.32x \pm 0.32y + z = 0$ 时,也就是 $\phi = 21.89^\circ, \omega_e = \pm 91.59^\circ, \omega_o = \pm 91.89^\circ$ 时, o、e 光有最大的分离角 $\Delta_{oe} = 22.836^\circ$,如图 4 所示.

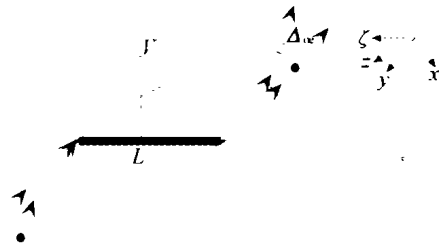


图 3 斜入射的 2×2 电光开关

Fig. 3 2×2 electro-optic switch with oblique incidence

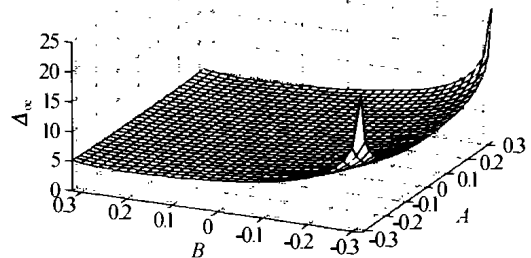


图 4 出射晶体后 o 光和 e 光的分离角 Δ_{oe}

Fig. 4 Angular separation Δ_{oe} between o-ray and e-ray emerging from crystal

由上例可以看出,只需在晶体的出射面上做一些调整,就可以使 o、e 光的分离角更大,也可以使 o、e 光的分离角更小. 这对一些器件的特殊设计需求是很有用的. 先前运用的晶体器件,其输入面和输出面大多是平行的. 所以只有考虑入射面上的情况就可以了,但是对某些输出面不平行的器件,就需要另行计算,我们就可以根据表 1 中的公式得到输出结果. 而且以前的晶体器件一般也就是双折射的级联使用,现在可以根据本文得到的公式进行多个界面上的连续双折射双反射使用了.

4 结论

给出了光轴任意方向的单轴晶体多个面上的连续双折射双反射的数学解,并在此基础上进行了晶

体结构的最优化设计. 适当地选取晶体的界面参数, 相当于选取光轴方向, 可以使 o 光和 e 光的分离角更大.

参考文献

- 1 Yariv A, Yeh P. Optical waves in crystals, New York: Wiley Press, 1984. 84 ~ 89
- 2 Born M, Wolf E. Principles of optics. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 799 ~ 813
- 3 Stavroudis O N. Ray tracing formulas for uniaxial crystals. *J Opt Soc Am*, 1962, **52**(2): 187 ~ 191
- 4 Swindell W. Extraordinary-ray and -wave tracing in uniaxial crystals. *Appl Opt*, 1975, **14**(9): 2298 ~ 2301
- 5 Simon M C, Echarri R M. Ray tracing formulas for monoaxial optical components. *Appl Opt*, 1983, **22**(2): 354 ~ 360
- 6 Liang Quan-Ting. Simple ray tracing formulas for uniaxial optical crystal. *Appl Opt*, 1990, **29**(7): 1008 ~ 1010
- 7 Beyerle G, McDermid I S. Ray-tracing formulas for refraction and internal reflection in uniaxial crystals. *Appl Opt*, 1998, **37**(34): 7947 ~ 7953
- 8 Avendano-Alejo M, Stavroudis O N. Huygen's principle and rays in uniaxial anisotropic media. I. Crystal axis normal to refracting surface. *J Opt Soc Am(A)*, 2002, **19**(8): 1669 ~ 1673
- 9 Ren H, Liu L, Song Z, et al. Double refraction and reflection of sequential interfaces in a crystal and application to integration of $1 \times N$ optical switch. *J Modern Optics*, 2003, **50**(14): 2231 ~ 2242
- 10 Wang N, Liu L, Yin Y. Cantor network, control algorithm, two-dimensional compact structure and its optical implementation. *Appl Opt*, 1994, **34**(35): 8176 ~ 8182
- 11 Song Z, Liu L, Ren H. Integrated optical bypass-exchange switch. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(7) (in press)

Double Refraction and Reflection of Sequential Interfaces in a Crystal: the Optic Axis Orientation Arbitrary

Ren Haixia, Liu Liren, Song Zhe, Luan Zhu

Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800

Received date: 2003-10-08

Abstract The general formulation of double refraction or internal double reflection for any directions of incidence and arbitrary orientation of the optic axis in a uniaxial crystal is analyzed in terms of Huygens's principle. Then with the relations between the output of the former interface and the input of the latter, double refraction and/or double internal reflection in a crystal along two and multiple successive interfaces can be calculated. On this basis, if the parameters of the interface are chosen appropriately, the range of angular separation between the ordinary ray and extraordinary ray can be much greater. It is useful for crystal element design. Finally, as an example, an optimum design of the output end interface for a 2×2 electro-optic switch is given.

Keywords Double refraction; Double reflection; Sequential interfaces; Angular separation; Optimum design



Ren Haixia was born on May 18, 1974, in Shanghai, P. R. China. She received the B. S. Degree in electronic engineering in 1997 and M. S. Degree in optics engineering in 2001 from Xi'an Institute of Technology, Xi'an, China. Now she is a Ph. D. candidate in Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences. Her major research interests are optical switches and optical communication.