

光学测量数据的统示分布表示

刘梦夏¹ 王璘^{2,3} 周桃庚¹ 沙定国¹

(1 北京理工大学信息科学技术学院光电工程系, 北京 100081)

(2 中国科学院西安光学精密机械研究所, 西安 710068)

(3 中国科学院研究生院, 北京 100039)

摘 要 通过对光学测量中常见的叉线对准以及焦距、曲率半径测量进行大样本数据采集和分析处理, 利用实验方法得到常见光学测量数据的分布, 并选择 Beta 分布统示表示多种分布, 简化了光学测量中的分布研究. 研究结果可以作为贝叶斯统计中的数据先验分布, 用于对一般测量进行贝叶斯方法的不确定度评定.

关键词 Beta 分布; 统示分布; 光学测量; 对准; 焦距; 曲率半径

中图分类号 O443 **文献标识码** A

0 引言

随着现代科技的发展, 对测量数据处理的要求愈来愈高, 现代误差理论不断寻找统一、实用、可靠的评定准则与方法, 力求实用化和高准确度二者兼顾. 经典误差理论的研究局限于正态分布, 但是在实际测量中, 表示诸分量的概率分布不仅是正态分布, 也有三角分布、均匀分布、反正弦分布等对称分布, 以及指数分布等非对称分布. 计算、合成不确定度时, 由于分布不同, 所取参数也不同, 在同一置信水准进行合成比较困难. 在实际测量结果处理中使用不同分布描述不同分量, 不如使用同一分布表示更加简单可行. 因此, 出现了利用各种可变参数的函数形式来统示常见分布的倾向, 如采用 Chartter 级数或 Edperth 级数的展开法^[1]; 采用 4 段对称折线的逼近法; 采用 Pearson III 型分布密度的统示法, 采用多参数两三段折线分布来逼近直方图^[2], 还有 Beta 分布统示法^[3], 本文使用 Beta 分布统示实际光学测量分布.

1 原理

Beta 分布是一类特殊分布, 在分布变换和数学推演中常常用到, 包含从均匀分布、三角分布到正态分布的各种形态; 不仅包含对称的分布, 也包含不对称的分布. Beta 函数表示如式(1), 式中 $a > 0, b > 0$.

$$B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du \quad (1)$$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & x \leq 0 \text{ or } x \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

式(2)是表示 Beta 分布的概率密度函数, 式中 a 与 b 是两个正参数, 参数 a 与 b 的变化将导致密度曲线形状的变化, 图 1 给出了 a 与 b 取不同值时, 几种典型的 Beta 密度曲线. 由图可见, $a > 1, b > 1$ 时密度曲线呈单峰状; $a < 1, b < 1$ 时密度曲线呈 U 形; $a > 1, b < 1$ 时密度曲线呈 J 形; $a < 1, b > 1$ 时密度曲线呈反 J 形, $a = 1, b = 1$ 时密度曲线呈直线状且平行于 x 轴.

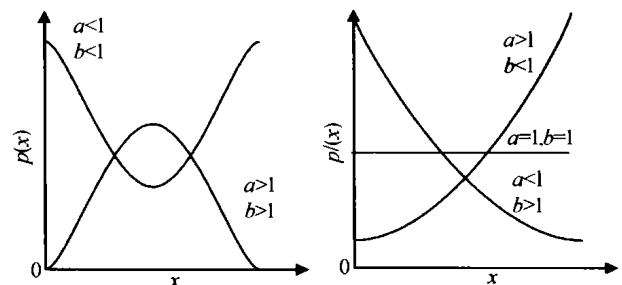


图 1 几种典型的 Beta 分布密度曲线
Fig. 1 Typical Beta distribution density curves

2 Beta 统示分布表示光学测量数据

本文对叉线对准数据、目视放大率测焦距数据、自准直法测曲率半径数据等几类光学测量^[4]数据进行测量分布研究. 首先对原始数据进行剔除粗大误差、修正系统误差的处理, 再归一化, 使得数据在 0 到 1 之间, 采用 Beta 分布统示表示. 可以通过计算得到 Beta 分布的参数, 以及相应的均值、标准差、偏度和峰度.

设测量数据 x_1, x_2, \dots, x_n 令

$$u_k = \frac{x_k - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (3)$$

式中 x_{\max} 表示测量数据的最大值, x_{\min} 表示测量数据的最小值, 则数据列 $\{u_k\}$ 的大小在 0 到 1 之间.

采用式(4)、(5)计算得到 Beta 分布的参数^[3]

$$a = \bar{u} \times \left(\frac{\bar{u} \times (1 - \bar{u})}{s_u^2} - 1 \right) \quad (4)$$

$$b = (1 - \bar{u}) \times \left(\frac{\bar{u} \times (1 - \bar{u})}{s_u^2} - 1 \right) \quad (5)$$

式中 \bar{u} 为测量数据的均值, s_u^2 为测量数据的标准差.

式(6)至(9)分别为 Beta 分布的均值、标准差、偏度、峰度的计算公式,是按照一阶原点矩、二阶中心矩、三阶中心矩、四阶中心矩的定义式分别与均值、标准差、偏度、峰度之间的函数关系推导得到.

$$\mu_u = \frac{a}{a + b} \quad (6)$$

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{ab}}{(a + b) \sqrt{a + b + 1}} \quad (7)$$

$$\tau_u = 2 \frac{(b - a) \sqrt{a + b + 1}}{(a + b + 2) \sqrt{ab}} \quad (8)$$

$$\gamma_u = \frac{3(a + 1)(a + b)(a + b + 1)(2b - a)}{ab(a + b + 3)(a + b + 2)} + \frac{3(a - b)(a + b + 1)}{b(a + b + 2)} - 3 \quad (9)$$

2.1 对准数据研究

在 GXY-08A 型光具座上,由 6 名不同的测量人员采用叉线对准方式,分别进行对准实验获得 6 组大样本原始数据,归一化处理后计算得到 Beta 分布参数,再计算得到均值、标准差、偏度和峰度,如表 1. 测量人员中有经验丰富的光学专家,亦有从事光学测量领域研究的博士生和硕士生.

表 1 对准数据归一化后处理结果

序号	Beta 分布参数 a, b		均值	标准差	偏度	峰度
1	$a = 1.7528$	$b = 1.4106$	0.5541	0.2436	-0.1720	-0.9363
2	$a = 1.1970$	$b = 1.7384$	0.4078	0.2477	0.3017	-0.8973
3	$a = 2.8260$	$b = 1.9995$	0.5856	0.2041	-0.2459	-0.6876
4	$a = 1.5319$	$b = 1.1444$	0.5724	0.2580	-0.2400	-0.9859
5	$a = 0.3239$	$b = 0.8329$	0.2800	0.3057	0.9118	-0.4964
6	$a = 2.1656$	$b = 1.9488$	0.5264	0.2208	-0.0781	-0.8355

每组测量数据的测量人员不同, Beta 分布参数计算值差异较大,有 4 组数据偏度为负值,分布呈右偏峰,另两组数据分布呈左偏峰. 峰度也并不为零且大多绝对值小于 1. 将 6 名不同的测量人员的所有数据标准化处理,采用 Beta 分布表示,参数为 (3.2510, 3.1086),为近似正态分布.

2.2 焦距测量数据研究

放大率法操作原理为:被测透镜位于平行光管物镜前,平行光管物镜焦面上的分划板的一对刻线就成像在被测透镜的焦面上. 这对刻线间距 y 和它

的像间距 y' 与平行光管焦距 f_c 和被测透镜焦距 f' 的关系为

$$y'/y = f'/f_c$$

为简化焦距的计算,应合理选择光具座的一些参数,使得目镜测微镜测 y' 得到的读数乘以一个整数就可以得到被测焦距值. 选择标准镜头 ($f = 80.803 \text{ mm}$) 作为被测镜头,在 GXY-08A 型光具座上,由 6 名测量人员采用放大率法经过多次大样本测量,得到 6 组数据,经过归一化处理,用 Beta 分布统示可得到特征量如表 2.

表 2 焦距测量数据归一化处理结果

序号	Beta 分布参数 a, b		均值	标准差	偏度	峰度
1	$a = 1.1848$	$b = 1.3443$	0.4685	0.2656	0.4371	-0.6663
2	$a = 2.6052$	$b = 2.0895$	0.5549	0.2083	0.1049	-1.0717
3	$a = 2.2030$	$b = 1.3552$	0.6191	0.2274	-0.3769	-0.7343
4	$a = 2.8982$	$b = 2.7284$	0.5151	0.1941	-0.0408	-0.6933
5	$a = 1.7527$	$b = 1.6407$	0.5165	0.2384	-0.0514	-0.9351
6	$a = 3.1117$	$b = 2.9766$	0.5111	0.1878	-0.0292	-0.6590

从表 2 可以看到有四组数据偏度为负值,分布呈右偏峰,仅一组数据分布呈左偏峰. 峰度也多为绝对值小于 1. 这 6 组数据的统计直方图也都大不相同,如图 2. 通过不同人员对同一试样,在相同测试仪器和测量条件下测得的统计数据进行分析表明,分布因

人而异,人为因素是目视光学检测中的一个主要不确定度源. 将多名测试者对同一标准镜头分别得到的数据标准化处理,采用 Beta 分布表示,参数为 (3.1732, 3.0354),为近似正态分布,其分布如图 3.

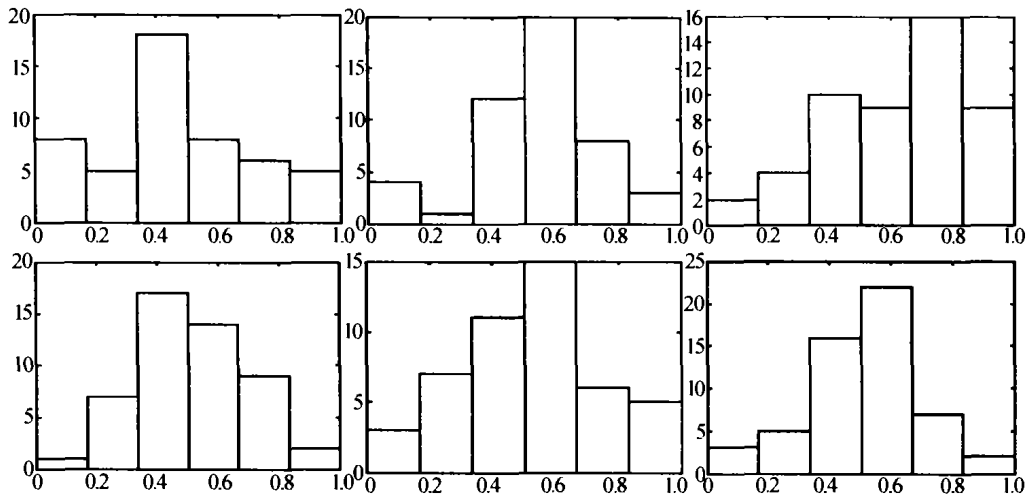


图2 不同测量人员得到的焦距测量数据统计直方图

Fig. 2 Histogram of focus data got by different persons

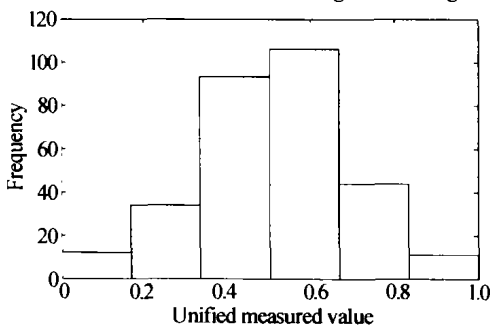


图3 标准化处理的测量焦距数据统计直方图

Fig. 3 Histogram of uniform focus data from different persons

2.3 曲率半径测量数据研究

当自准直显微镜分别调焦于被测凹球面的球心和顶点时,人眼在目镜的视场中将先后两次看到分划板 P_1 在 P_2 上成的清晰无视差的自准直像,这两次定焦位置之间的距离就是被测凹球面的曲率半径.根据上述原理,在北京理工大学研制的高精度曲率半径测定仪上,由3名测量人员对测试件(名义值 $R = 36.7 \text{ mm}$)进行大样本测量.由于在测量曲率半径时人眼极易疲劳,难于短时间内进行大样本测量,本组数据为不同测量人员在分散的时间段内对一组标准镜头记录的历史数据.将所有历史数据合为一组,标准化处理后的统计直方图如图4,计算所得Beta分布参数: $a = 1.3938, b = 1.4451$. 因为横短轴

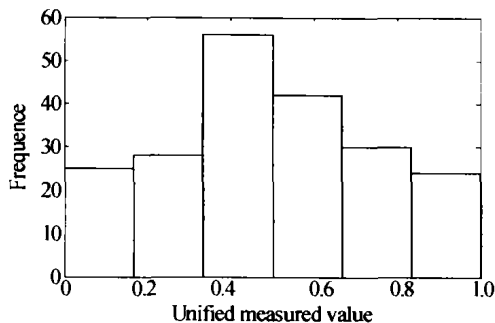


图4 标准化曲率半径测量数据直方图

Fig. 4 Histogram of uniform radius of curvature data from different persons and different lens

椭圆分布对应的Beta分布参数为 $a = 1.5, b = 1.5$, 得出结论目视曲率半径测量数据为近似椭圆分布.

3 结论

通过对光学测量中最常用的对准、焦距测量和曲率半径测量数据的分析得出:目视叉线对准数据接近正态分布;目视放大率法测量焦距数据接近正态分布;自准直法测量曲率半径数据初步判定为近似椭圆分布,还需要对同一块标准镜头进行大样本测量来验证.

在一般光学测量中都是小样本数据,为了在小样本量下能获得较好的参数估计,最好能够利用专家经验、历史资料或先验知识.经典统计学只使用样本信息,而贝叶斯方法把先验信息与样本信息结合起来用于推断.如果对目前已有的属于高度精密检测的光学仪器建立数据库,将不同检测人员的历史数据与经验信息归档,利用Beta分布统计,确定分布类型,作为贝叶斯方法评定测量不确定度的先验分布,那么在以后的测量工作中就可以利用贝叶斯推断快速得到准确的测量结果.

参考文献

- 姜萍萍,颜国正,丁国清,等.用Jackknife法对回归分析中非正态分布参数精度的估计.计量技术,2002,(10):45~47
Jiang P P, Yan G Zh, Ding G Q, et al. Measurement Technique, 2002, (10): 45~47
- 林洪桦,吴春增.折线分布及其在精度分析中的应用.北京理工大学学报,1994,14(2):145~152
Lin H H, Wu C Z. Journal of Beijing Institute of Technology, 1994, 14(2): 145~152
- 林洪桦.再荐误差分布的统计法.第八次全国误差理论及应用学术与教学研讨会论文集,2003.9~13
Lin H H. Recommendation of unified denotation about error distribution. The 8th national error theory and application on

academic and instruction. 2003. 9 ~ 13

- 4 苏大图,沈海龙,陈进榜,等. 光学测量与像质鉴定. 北京:北京工业学院出版社,1988. 21 ~ 50

Su D T, Shen H L, Chen J B, *et al.* Optical Measurement and Image Quality Identification. Beijing: Publishing House of Beijing Institute of Technology, 1988. 21 ~ 50

Denotation of Unified Distribution about Optical Measurement Data

Liu Mengxia¹, Wang Lin^{2,3}, Zhou Taogeng¹, Sha Dingguo¹

¹ Beijing Institute of Technology, Beijing 100081

² Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710068

³ Graduate School of The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039

Received date: 2004-05-19

Abstract Large sample data of alignment, focus measurement and radius of curvature measurement are acquired and analyzed. They are common optical measurement and their distributions are obtained from the large sample data. Beta distribution is used as a unified distribution to simplify the research of optical measurement distribution. The research result could be used as prior distribution in Bayes approach to evaluate uncertainty in optical measurement with practical prospect.

Keywords Beta distribution; Unified distribution; Optical measurement; Alignment; Focus; Radius of curvature



Liu Mengxia was born in August 1976. She graduated from Zhengzhou Institute of Technology in 1998, and then got her master degree at Xi'an Institute of Technology in 2001. Currently she is a Ph. D. student at Beijing Institute of Technology. Her major research area lies in photoelectric measurement.