

# Ronchi 光栅 Talbot 效应长焦距测量的 准确度极限研究\*

孙 琛 沈亦兵 白 剑 侯西云 杨国光

(浙江大学现代光学仪器国家重点实验室, 杭州 310027)

**摘 要** 针对基于 Ronchi 光栅 Talbot 效应的长焦距测量方法, 分析了利用傅里叶变换求取莫尔条纹角度的准确度限制, 提出了通过傅里叶变换的多次迭代逼近来提高角度计量准确度, 从而提高长焦距测量准确度的方法, 并在此基础上分析了这种方法的准确度极限。

**关键词** 焦距测量; 傅里叶变换; 莫尔条纹

**中图分类号** TN911.73

**文献标识码**

A

## 0 引言

基于 Ronchi 光栅 Talbot 效应的长焦距测量方法是最新提出的一种测量大口径长焦距透镜焦距的有效方法<sup>[1]</sup>。它通过对 Ronchi 光栅的 Talbot 效应所产生的莫尔条纹角度的计量来测量长焦距。莫尔条纹角度的计量则是采用 CCD 获取图像, 并对图像进行傅里叶变换和滤波等处理, 通过对周期条纹所对应的频谱在频谱面的坐标的测量, 可以得出莫尔条纹与  $y$  轴的夹角。

CCD 获取的莫尔条纹图像是数字图像, 经过傅里叶变换后得到的频谱图也是数字图像。由于数字图像像素数有限, 能分辨的频谱面坐标的最小变化量将受到限制, 从而导致能分辨的莫尔条纹角度的最小变化量受到限制。根据理论推算, 由莫尔条纹角度的测量误差而引起的焦距误差占整个误差的

90%<sup>[1]</sup>。由此可见, 提高莫尔条纹角度计量准确度, 对整个焦距测试系统有关键意义。

本文从改进测算角度算法这个角度出发, 针对傅里叶变换后的频谱图, 利用傅里叶变换的数学公式, 在周期条纹对应的频谱点周围施加一系列迭代运算, 找出频谱点的精确坐标值, 将条纹角度的测算准确度提高了数倍, 从而有效地提高了焦距的测量准确度。

## 1 Ronchi 光栅 Talbot 效应的长焦距测量原理

Talbot 效应理论中指出, 平行光照射和球面波照射(如平行光入射到光栅时在光栅前放入一个透镜)时, Talbot 成像的距离是不一样的<sup>[2-4]</sup>。当透镜焦距很大( $> 10$  m)时, Talbot 成像的距离差别非常小, 对于我们的测量来说可以忽略不计。从这个角度出发, 如图 1, 固定光栅  $G_1$ 、 $G_2$ , 使之间的距离为

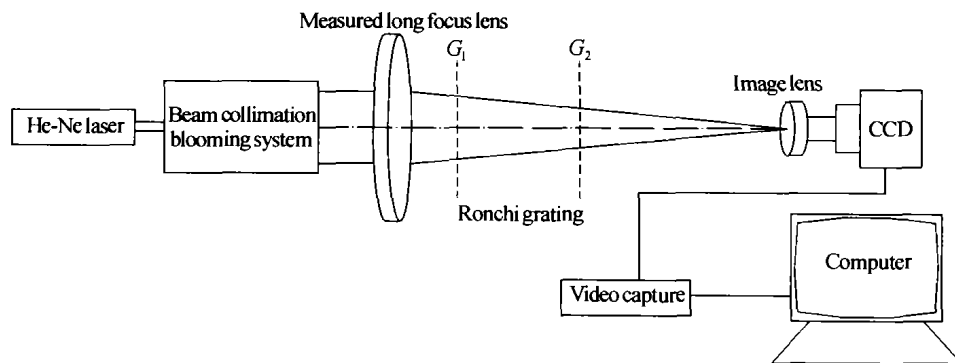


图 1 Ronchi 光栅 Talbot 效应长焦距测量系统原理

Fig. 1 The principle diagram of long focal length testing system based on Talbot effect of Ronchi grating

Talbot 距离, 在放入被测长焦距透镜后, 通过测得  $G_1$  的 Talbot 像与  $G_2$  所形成的莫尔条纹的角度, 就能测得该长焦距透镜的焦距。根据 Talbot 原理及莫尔条纹产生原理, 可以推出焦距的计算公式为<sup>[1]</sup>

$$f = s + k \tan \varphi \quad (1)$$

式中,  $f$  为长焦距透镜的焦距,  $\varphi$  为莫尔条纹的角度,  $k$  为校准系数,  $s$  为透镜到光栅  $G_1$  的距离。

## 2 常规算法的准确度极限

通过对莫尔条纹的数字图像进行快速傅里叶变换(FFT), 得到条纹的频谱图。在动态范围压缩和

\* 中国工程物理院合同项目

Tel: 0571-87951186 Email: suenchan@tom.com

收稿日期: 2003-12-11

滤波的基础上,求频谱点坐标的常用方法是找出象素值最大的象素点,其序列值就是所求坐标. 这样频谱点的坐标就只可能是整数,造成一定的误差.

以莫尔条纹的垂直方向为坐标,设条纹宽度为  $a$ ,条纹中心间隔为  $\tau$ ,则莫尔条纹的数学表达式可写为

$$g(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\tau) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) * \frac{1}{\tau} \text{comb}\left(\frac{x}{\tau}\right) \quad (2)$$

经傅里叶变换,莫尔条纹的频谱表达式为

$$G(f) = a \text{sinc}(af) \text{comb}(\tau f) = a \text{sinc}(af) \frac{1}{\tau} \cdot$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{\tau}\right) = \frac{a}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(a \frac{n}{\tau}\right) \delta\left(f - \frac{n}{\tau}\right) \quad (3)$$

由式(3)知,  $\pm 1$  级频谱点间隔  $2/\tau$ .

设空域采样单位(即条纹数字图像的一个象素)代表的实际(空域)长度为  $\Delta x$ ,则频域采样单位(即频谱数字图像的一个象素)代表的实际(频域)长度  $\Delta f$  为<sup>[5]</sup>

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta x} = \frac{1}{N \frac{L}{N}} = \frac{1}{L} \quad (4)$$

式中,  $N$  为条纹垂直方向的象素数(即采样点数),  $L$  为图像在条纹垂直方向的长度. 这样  $\pm 1$  级频谱点在频谱图上相隔的象素数  $s$  为

$$s = \frac{2}{\tau} / \Delta f = \frac{2L}{\tau} \quad (5)$$

数字图像的最小位置变化量为一个象素,所以能分辨的最小角度变化量为

$$\Delta\varphi = \frac{1/\sqrt{2}}{s/2} = \frac{\tau}{\sqrt{2}L} \quad (6)$$

由式(6)知,常规算法的准确度取决于条纹周期与条纹图像尺寸的比例,这个比例最小一般能到  $10^{-2}$  量级. 根据由角度测量误差  $\Delta\varphi$  引起的焦距误差公式<sup>[1]</sup>(见式(7)),对 20 m 左右的长焦距透镜,其引入的焦距误差将在  $10^{-1}$  m 量级(式(7)中,  $k$  由实测时定标决定,  $\varphi$  由实测焦距决定,这里采用的是参考文献[1]所提供的测试条件). 并且从式(6)可以看出,仅仅提高 CCD 象素数,并不能减小准确度限制. 为了进一步提高角度计量的准确度,必须在傅里叶变换的基础上,采用更有效的角度算法.

$$\Delta f = k(\sec \varphi)^2 \Delta\varphi \quad (7)$$

### 3 改进算法的原理

常规角度算法引入误差的关键在于,只能得到莫尔条纹对应频谱点坐标的整数值. 如果能够算出

频谱点的精确坐标值,我们就能有效地提高角度测量准确度,从而进一步提高焦距的测量准确度.

如图 2,横坐标上每个格子代表一个象素,  $n, n-1, n+1$  为象素的序列值,  $x_1, x_2$  为频谱点的实际坐标,这两个频谱点的坐标应该是不同的,但用常规算法得到的结果却都为  $n$ . 为了得到频谱点的真实坐标,必须知道频谱点周围一定区域内频谱值的连续分布情况. 由于 FFT 得到的频谱图是数字图像,不是连续分布的,对求取频谱点的实际坐标没有帮助. 但如果从莫尔条纹图像出发,利用离散傅里叶变换式<sup>[5]</sup>(式(8)),就可以求出频谱面上任意坐标的频谱值.

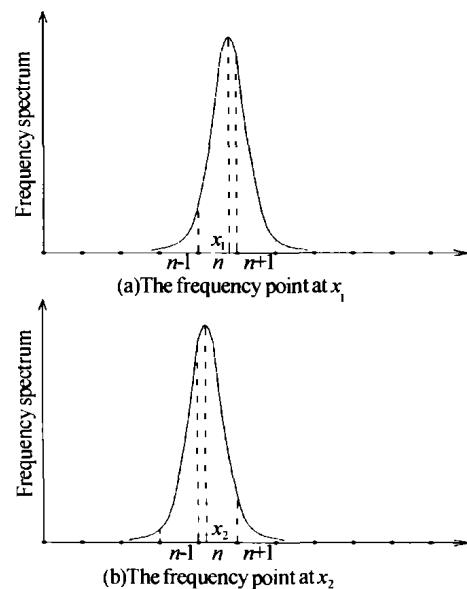


图 2 常规算法引入的位置误差

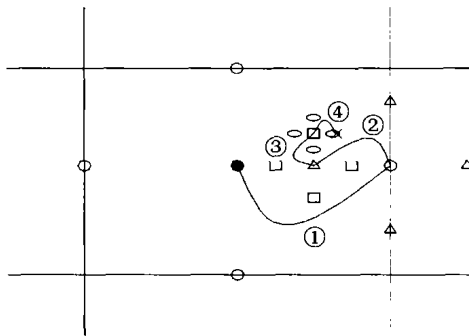
Fig. 2 Coordinates error caused by conventional algorithm

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp \left[ -j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] \quad (8)$$

式中  $f(x, y)$  相当于条纹图像,  $F(u, v)$  相当于频谱图像. 任意取定一组  $(u, v)$  代入式(8),就可以求得频谱面上坐标  $(u, v)$  处的频谱值. 利用式(8)提供的频谱值,就可以逐步逼近频谱点的真实坐标.

以常规算法获得的频谱点整数坐标为起点(图 3 中的实心圆点),通过式(8)求出该起点坐标横纵四个方向相距  $1/2$  象素单位处(图 3 中的空心圆点)的频谱值. 将这四个频谱值及起点坐标的频谱值相比较,取其中最大的频谱值所对应的位置为新的起点(图 3 中最右边的空心圆点),再求出新起点横纵四个方向相距  $(1/2)^2$  象素单位处(图 3 中的三角形点)的频谱值. 将这四个值及新起点的频谱值比较,取最大值对应的位置为下一轮比较的起点(图 3 中最左边的三角形点),再求其周围相距  $(1/2)^3$  象素单位处(图 3 中的正方形点)的频谱值……就这样不断缩小比较范围. 经过一定轮数的比较,最终得到的起点位置(图 3 中最右边的椭圆形点)

就是莫尔条纹对应频谱点的精确坐标. 从图 3 中可见, 利用改进算法求得的谱点坐标与频谱点的真实坐标(图 3 中的交叉点)已基本重合.



●The discrete frequency point ×The actual frequency point  
○The first reference points △The second reference points  
□The third reference points ◊The fourth reference points

图 3 改进算法求取频谱点精确坐标的过程  
Fig. 3 The progress of approximating the actual frequency point

### 4 改进算法的准确度极限

实际测试过程中, 分别以不同的迭代次数, 测了 12 组数据(见图 4). 可以看出, 随着迭代比较次数的增多, 求得的角度值逐步逼近真实值. 当迭代比较 12 次以后, 莫尔条纹的角度  $\varphi$  就基本上不变了.

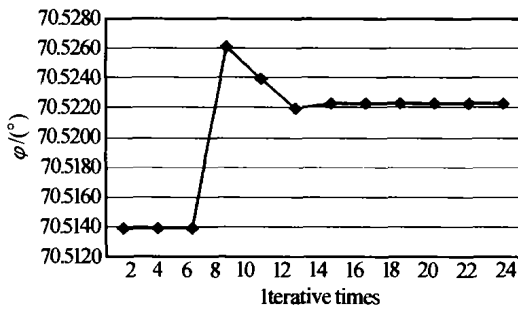


图 4 不同迭代次数得到的莫尔条纹角度  
Fig. 4 The angles of Moire fringe for different iterative time  
其实这个最终的  $\varphi$  值与莫尔条纹的真实角度还是有微小差别的. 这个误差是因为 CCD 获取的莫尔条纹图像也是数字图像.

设条纹图像是  $N \times N$  的, 那么能分辨的最小角度变化量为

$$\Delta\varphi = \frac{1/\sqrt{2}}{N/\sqrt{2}} = \frac{1}{N} \quad (9)$$

由式(9)可知, 提高 CCD 象素数能减小这一准确度限制. 如果条纹图像为  $512 \times 512$ ,  $\Delta\varphi$  也就  $10^{-3}$  量级; 如果条纹图像可以取到  $1024 \times 1024$ ,  $\Delta\varphi$  就能减小到  $10^{-4}$  量级.

### 5 实验测试结果

取条纹图像为  $512 \times 512$ , 在测试系统中放入一

标称值为  $f = 18438 \text{ mm}$  的长焦距透镜, 利用改进算法求取该透镜的焦距值. 图 5 为该透镜近轴区域的测试结果.

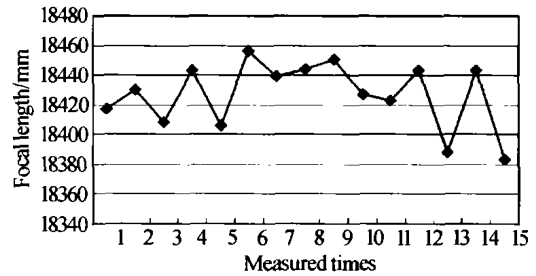


图 5 透镜近轴区域的测试数据  
Fig. 5 The testing data in the paraxial domain of the lens

从上述数据, 可以得出

$$\bar{f} = 18427 \text{ mm} \quad \sigma = 0.12\%$$

由此可见, 改进算法能有效的提高基于 Ronchi 光栅 Talbot 效应的长焦距测量方法的测量准确度.

### 6 结论

本文提出的算法能有效地弥补数字图像本身的离散性所带来的误差. 该算法采用了特定点循环比较的方法, 来不断逼近频谱点的真实坐标, 具有原理简单、计算量少、处理快速的特点, 比较适合在实时检测系统中应用. 虽然该算法是针对长焦距测量提出的, 但它也可以用在许多同样需要测定条纹角度或目标点位置的其它应用中.

#### 参考文献

- 侯昌伦, 白剑, 侯西云, 等. 基于龙基光栅塔尔博特效应的长焦距测量. 光学学报, 2002, 22(11): 1328 ~ 1330  
Hou C L, Bai J, Hou X Y, et al. Acta Optica Sinica, 2002, 22(11): 1328 ~ 1330
- Yokozeki S, Suzuki T. Shearing interferometer using the grating as beam splitter. Appl Opt, 1971, 10(7): 1575 ~ 1579
- Silva D E. Talbot interferometer for radial and lateral derivatives. Appl Opt, 1972, 11(11): 2613 ~ 2624
- 廖江红, 顾去吾. 光学系统中的光栅衍射自成像现象: 广义的 Talbot 效应. 光学学报, 1985, 5(4): 331 ~ 335  
Liao J H, Gu Q W. Acta Optica Sinica, 1985, 5(4): 331 ~ 335
- 余飞鸿, 岑兆丰. 现代光学信息处理技术. 杭州: 浙江大学出版社, 2001. 35 ~ 36  
Yu F H, Cen Z F. Modern Optical Information Processing Technology. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2001. 35 ~ 36

## The Precision Limit Analysis of Long Focal Length Testing Based on Talbot Effect of Ronchi Grating

Sun Chen, Shen Yibing, Bai Jian, Hou Xiyun, Yang Guoguang

*State Key Laboratory of Modern Optical Instrumentation, Zhejiang University, Hangzhou 310027*

Received date: 2003-12-11

**Abstract** Based on the long focal length testing method which applies the Talbot effect of Ronchi grating, the precision limit resulted from the cross angle of Moire fringes obtained by Fourier transform is analyzed. A method is presented to improve the precision of angle testing, which is carried out by multi-calculation of Fourier transform to approximate the target angle, it can greatly improve the precision of long focal length measurement. In the presentation, the precision limit is detailed analyzed.

**Keywords** Focal length measurement; Fourier transform; Moire fringe



**Sun Chen** was born in 1979 in Jiangsu Province, China. He graduated from Optical Engineer Department of Zhejiang University in 2002. Now he is working towards the M. S. degree in Zhejiang University. His research interests include computer information processing and micro-optics.