

# 网格频域分析法在变形测量中的应用\*

周灿林<sup>1,2</sup> 亢一澜<sup>1</sup>

(1 天津大学力学系, 天津 300072)

(2 山东大学物理与微电子学院, 济南 250061)

**摘要** 将频域分析法与网格法相结合,研究了网格频域分析法对位移的测量问题,该方法可以对网格图象中的位移场等变形信息进行全场、快速、自动处理,同时还可以实现位移场的分离.文中介绍了网格频域分析法原理,最后用计算机进行了数字仿真,并且进行了实验测试,结果表明该方法是可行的.

**关键词** 网格法;自动检测;位移场;频域;图象处理

**中图分类号** O348, O43

**文献标识码** A

## 0 引言

网格法是实验力学的各种测试方法中最具直观性的一种方法,它为测试构件的变形提供了一种有效的实验手段.它的基本思想是:在构件上制备正交的网格栅以后,借助网格点位置的移动来监测整个加载过程中构件的变形发展情况,并研究构件的变形规律.通过测量不同加载时刻的网格特征参量,例如网格节点坐标、节点间距、网格栅线间距以及栅线的方向等,并将后面时刻的网格特征参量与前面时刻的网格特征参量进行比较,就可以获取位移、应变和转角等变形量.由于网格法直观性强,可靠性高,特别是它的量程大,可以连续跟踪试件大的变形过程,从而可用来研究试件的演化过程.因此,在实验力学领域倍受关注,国内外许多学者进行了许多卓有成效的研究<sup>[1-8]</sup>.特别是将网格法配合显微技术,可以将网格法从宏观尺度拓展到细观测量领域.目前的工作主要集中在网格法自动分析方面的研究<sup>[9,10]</sup>.本文介绍了网格频域分析法原理,通过计算机模拟验证了方法的可行性,最后进行了实验测量,所得结果和预期相吻合.

## 1 原理

网格、频域分析法将数字图象处理中的傅里叶分析方法引入网格法的变形数据处理中,其基本原理如下:

对于一幅无初始变形的正交网格图象,其灰度分布函数可以表示为

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp \left\{ j \frac{2\pi m}{T_x} x \right\} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp \left\{ j \frac{2\pi n}{T_y} y \right\} =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_{mn}) \exp \{ j2\pi(m\omega_x x + n\omega_y y) \} \quad (1)$$

式中  $\omega_x = T_x^{-1}$ ,  $\omega_y = T_y^{-1}$  分别是 X 栅(垂直于 X 轴的一组矩形栅线称为 X 栅)和 Y 栅(垂直于 Y 轴的一组矩形栅线称为 Y 栅)的初始空间频率.如图 1 所

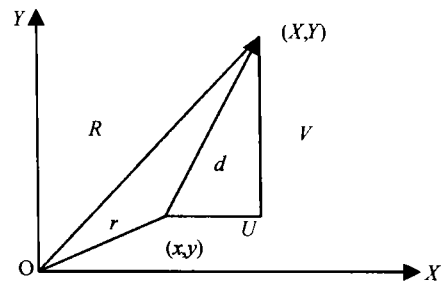


图 1 坐标系

Fig. 1 Coordinate system

示,网格变形前的坐标系中的一点  $(x, y)$  在网格变形后移动到点  $(X, Y)$ , 分别用  $u(X, Y)$ ,  $v(X, Y)$  表示该点的位移,则有

$$\begin{aligned} X &= x + u(X, Y) \\ Y &= y + v(X, Y) \end{aligned} \quad (2)$$

对于所研究的区域而言,变形前网格图象中的任意一点,在变形后的网格图中有且仅有一个点与之对应,也就是说,变形前后网格图灰度分布函数具有一一对应的关系.假设

$R = (X, Y)$  变形后的位置矢量

$r = (x, y)$  变形前的位置矢量

$d = (u(X, Y), v(X, Y))$  位移矢量

$\omega_{mn} = (m\omega_x, n\omega_y)$  频率矢量

则变形前的网格图可用矢量式表示为

$$f(r) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn} \exp \{ j2\pi(\omega_{mn} \cdot r) \} \quad (3)$$

于是得到变形后网格图灰度分布函数为

$$g(R) = f(R - d) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i_{mn}(R) \cdot \exp \{ j2\pi(\omega_{mn} \cdot R) \} \quad (4)$$

式中  $i_{mn}(R) = C_{mn} \exp \{ -j2\pi(\omega_{mn} \cdot d) \}$

对变形后的网格图象作二维傅里叶变换,得到

对应的频谱函数  $G(\Omega)$ , 即

$$G(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(R) \exp \{ -2\pi(\Omega \cdot R) \} dR = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{mn}(\Omega - \omega_{mn}) \quad (5)$$

式中

$$I_{mn} = FT \{ i_{mn}(R) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} i_{mn}(R) \cdot \exp \{ -2\pi(\Omega \cdot R) \} dR \quad (6)$$

$I_{mn}(\Omega - \omega_{mn})$  就是变形网格图灰度分布函数  $g(R)$  的第  $(m, n)$  级频谱, 对于不同的  $m, n$  数值,  $I_{mn}(\Omega - \omega_{mn})$  出现在频率域的不同位置上。

从频谱图  $G(\Omega)$  中裁剪出任意一个频谱成分  $I_{mn}(\Omega - \omega_{mn})$ , 并且对  $I_{mn}(\Omega - \omega_{mn})$  进行逆傅里叶变换, 利用傅里叶变换的位移性质, 逆变换的结果可以表示为

$$i'_{mn}(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{mn}(\Omega - \omega_{mn}) \exp \{ j2\pi(\Omega \cdot R) \} d\Omega = C_{mn} \exp \{ -j2\pi[\omega_{mn} \cdot (d - R)] \} = C_{mn} \exp \{ -j[\theta_x(X, Y) + \theta_y(X, Y)] \} \quad (7)$$

式中  $\theta_x(X, Y) = 2\pi m\omega_x [u(X, Y) - X]$

$\theta_y(X, Y) = 2\pi n\omega_y [v(X, Y) - Y]$

以上从变形网格的灰度分布函数中抽取第  $(m, n)$  项对应的  $i'_{mn}(X, Y)$ , 同时是  $u(X, Y), v(X, Y)$  的函数, 因此需要将它们分离。可以如此实现, 在裁剪频谱时, 分别沿  $\Omega_x$  轴选取  $(m, 0)$  级频谱和沿  $\Omega_y$  轴选取第  $(0, n)$  级频谱, 然后, 分别对它们作逆傅里叶变换, 结果得到的分别只是  $u(X, Y)$  的函数或者只是  $v(X, Y)$  的函数。

以  $u(X, Y)$  场为例, 令  $m \neq 0, n = 0$ , 可得

$$i'_{m0}(X, Y) = C_{m0} \exp \{ -j\theta_x(X, Y) \} \quad (8)$$

$i'_{m0}(X, Y)$  是一个复函数, 其实部和虚部分别为

$$\text{Re} \{ i'_{m0}(X, Y) \} = C_{m0} \cos [\theta_x(X, Y)] \quad (9)$$

$$\text{Im} \{ i'_{m0}(X, Y) \} = -C_{m0} \sin [\theta_x(X, Y)] \quad (10)$$

由以上两式相除可以得到计算式

$$\theta_x(X, Y) = -\arctan \frac{\text{Im} \{ i'_{m0}(X, Y) \}}{\text{Re} \{ i'_{m0}(X, Y) \}} \quad (11)$$

于是可得

$$u(X, Y) = X - \frac{1}{2\pi m\omega_x} \arctan \frac{\text{Im} \{ i'_{m0}(X, Y) \}}{\text{Re} \{ i'_{m0}(X, Y) \}} \quad (12)$$

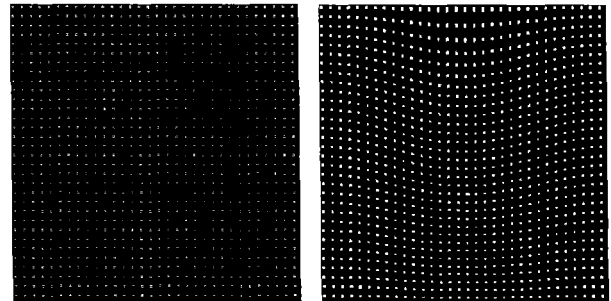
类似可以求得

$$v(X, Y) = Y - \frac{1}{2\pi n\omega_y} \arctan \frac{\text{Im} \{ i'_{0n}(X, Y) \}}{\text{Re} \{ i'_{0n}(X, Y) \}} \quad (13)$$

由于计算机程序中反正切函数的特点, 所求取的相位范围为  $[-\pi, \pi]$ , 所以必须对取得的相位进行去包裹, 此处相位“去包裹”, 除了要处理由于噪声等因素而导致的去包裹的难题外, 还有一个求取位移与求取相位的先后问题。

## 2 数字仿真

为了检验网格频域分析法的可靠性, 我们进行了数字仿真实验, 由已知变形信息, 利用灰度插值理论, 生成变形网格图样, 然后利用本文的频域网格法方法处理, 进行计算机仿真实验。变形前、后网格场如图 2, 位移解析表达式如下。变形公式为



(a) Before deformation (b) Deformation

图 2 变形前后的网格图

Fig. 2 Grid chart before deformation

$$u(X, Y) = 0 \quad v(X, Y) = \frac{1}{4}q, \left( 1 - \cos \frac{\pi X}{L} \right) \quad (14)$$

$$\text{式中 } q = \begin{cases} -\frac{2}{3L}Y^2 + Y, & 0 \leq Y \leq \frac{L}{3} \\ -\frac{3}{8L}Y^2 + \frac{1}{4}Y + 32, & \frac{L}{3} \leq Y \leq L \end{cases}$$

图 3 为  $Y$  方向位移理论值的三维显示, 图 4 为对变形后网格图用频域网格法技术处理后得到的结果。可以看出, 仿真实验的结果与理论数据是相符合的。

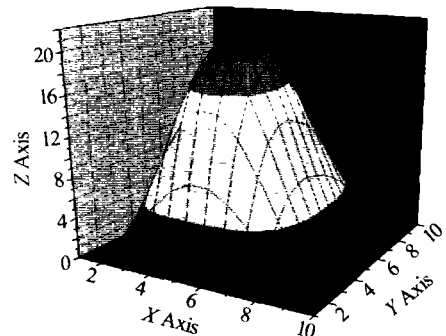


图 3  $y$  方向位移分量的理论值

Fig. 3 Theoretical displacement component in  $y$  direction

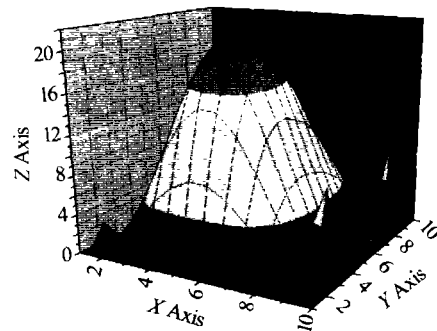


图 4 频域网格法处理的结果

Fig. 4 Result obtained with grid analysis by spectrum

### 3 实验

为验证方法的可行性,用如图 5 所示的实验装置进行了实验测试. 网格密度 20 L/mm. 先用计算机生成不同密度的网格图,然后用专用打印机转印到不干胶上,再将网格点转贴到试件上. 由此来记录试件的变形. 我们做了一个一端固定的带裂纹的橡胶带拉伸试件,在它表面贴上网格点,在给试件加载前后分别记录一幅图象,冻结在帧存体内,然后存储到计算机中,用自编网格频域分析法处理软件进行处理,得到试件各点的位移. 用绘图软件绘制试件的位移图. 图 6 给出了橡胶带在  $F = 2.5 \text{ kg}$  拉伸载荷作用下的位移图.

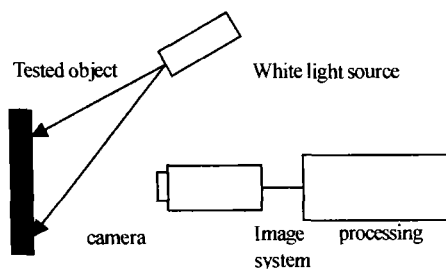


图 5 实验装置图

Fig. 5 Experimental setup

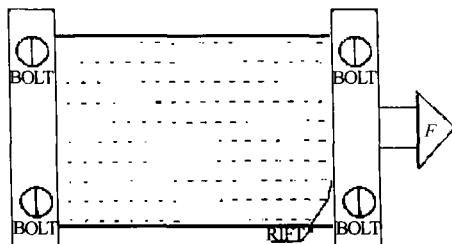


图 6 橡胶带在拉伸载荷作用下的位移图

Fig. 6 Displacement of reuberband drawn by loading

### 4 结论

将傅里叶频域分析法与网格法相结合,对网络频域法进行了研究,该方法特别适应于变形范围大的力学问题,从而可研究材料等试件的演化过程.

该方法具有变形信息提取快速、准确、全场等优点,在力学测试中具有较大应用前景.

### 参考文献

- 1 Sirks J S. System response to automated grid method. *Opt Eng*, 1990, **29**(12): 1485 ~ 1493
- 2 Takahashi S A, Yokota A. Fundamental study on rupture by low cycle fatigue of polymers applying fine grid method. *Exp Mech*, 1991, **3**: 65 ~ 69
- 3 Fail R W, Taylor C E. An application of pattern mapping to plane motion. *Exp Mech*, 1990, **12**: 404 ~ 410
- 4 Parks V J. Strain measurement using grids. *Opt Eng*, 1982, **21**(4): 663 ~ 669
- 5 Bremard D J, Lagarde A. Numerical spectral analysis of a grid: application to strain measurements. *Opt and Laser in Eng*, 1993, **18**: 650 ~ 656
- 6 Bremard F, Dupre J C, Lagarde A. Non-contact and non-disturbing local strain measurement methods. *Eur J Mech A/ Solids*, 1992, **11**(3): 349 ~ 366
- 7 Andresen K. Strain tensor for large three-dimensional surface deformation of sheet metal from an object grating. *Exp Mech*, 1999, **39**(1): 30 ~ 35
- 8 石铃. 细观光测力学研究中的高频全息光栅及精细网格技术. 北京: 清华大学博士论文, 1994. 90 ~ 100  
Si L. High frequency holographic grating and fine grid in fine-scope optical measurement mechanics. [Beijing: Tsinghua University Doctor dissertation], 1994. 90 ~ 100
- 9 关锴, 何世平, 伍小平, 等. 网格法的自动检测技术研究. *固体力学学报*, 1996, **17**(4): 290 ~ 295  
Guan E, He S P, Wu X P, et al. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1996, **17**(4): 290 ~ 295
- 10 周忠良, 顾家琳. 采用显微网格法研究韧性材料平面应力状态下裂尖附近的应变场. *实验力学*, 1994, **9**(3): 214 ~ 218  
Zhou Z L, Gu J L. *Experimental Mechanics*, 1994, **9**(3): 214 ~ 218

## The Application of Grid Analysis by Spectrum in Deformation measurement

Zhou Canlin<sup>1,2</sup>, Kang Yilan<sup>1</sup>

*1 Department of Mechanics of Tianjin University, Tianjin 300072*

*2 School of Physics and Microelectronics, Shandong University, Jinan 250061*

Received date: 2003-02-25

**Abstract** The technique, which is the combination of spectrum analysis algorithm and grid method, is studied for measuring displacement field. The deformation data such as displacement is extracted from grid image automatically, whole-fieldly and with fast processing speed. Meanwhile, the separation of displacement fields have been realized simply. The principle and procedure of grid analysis in spectrum domain are discussed in detail. Computational simulation and experiment on typical object have been processed, which confirms the reliability of the method.

**Keywords** Grid method; Auto-inspection; Displacement field; Frequency domain; Image processing



**Zhou Canlin** was born on June 12, 1966, in Yuanjiang Country Hunan Province, P. R. C. . He took his M. S. degree in solid mechanics from Department of Material Shandong University of Technology in 1994. Since 2000, he has been an associate professor and a tutor of postgraduate in Shandong University. Currently, he is a Ph. D. candidate in Department of Mechanics, Tianjin University. Now he has published over 20 papers. His main research fields include optical non-destructive measurement, digital image processing, mechanics measurement technique.