第 44 卷 第 7 期/2024 年 4 月/光学学报 研究论文

光学学报

单像素压缩成像高质量图像重建特征函数

居世昌，蔡俊杰，龚文林*

苏州大学光电科学与工程学院，江苏 苏州 215006

摘要 通过测量矩阵获取Gram矩阵，梳理了Gram矩阵与系统点扩散函数的关系，进而基于点扩散函数提出最强旁瓣峰值大小、叠加旁瓣峰值大小、空间距离和频谱余弦相似度4个特征参量。在此基础上，构建了一种单像素压缩成像高质量图像重建的特征函数，建立了可重建的目标稀疏度与特征函数的关系，并通过数值模拟和实验验证了所提特征函数的有效性，该工作对于单像素成像系统测量矩阵的优化设计具有重要借鉴意义。

关键词 成像系统；单像素成像；压缩感知；测量矩阵；特征函数

中图分类号 O436 **文献标志码** A **DOI:** 10.3788/AOS231741

1 引 言

单像素成像是近年来发展起来的一种计算成像技术，通过对光场进行空间调控并利用单像素探测器记录调制后的目标信号，采用计算重构的方法在凝视探测条件下获取目标的图像信息[1-7]。该技术具备高探测灵敏度、高图像获取效率等优点，在遥感、三维成像、显微和光通信等领域具有重要的应用前景[8-14]。

单像素成像的图像重建质量主要与光场编码特性和图像重建算法相关[15-33]。目前，单像素成像的图像重建算法主要分为线性重构算法和凸优化迭代重建算法。常用的线性重构算法有DGI、NGI、PGI等[15-18]，具备重建速度快的特点，但是获取较高的图像质量往往需要远大于奈奎斯特采样率的样本数；凸优化迭代重建算法主要有压缩感知图像重建算法和深度学习图像重建算法[19-21]，在样本数远低于奈奎斯特采样率时仍可以获取目标的高质量图像，基于该技术特点发展起来的单像素成像方法通常称为单像素压缩成像，但是其图像重建时间往往较长。为了提升单像素压缩成像的速度，目前主要的方式是对成像系统的光场编码矩阵（也称测量矩阵）进行优化或改进，以尽可能地减少图像重建所需的样本数，如正交编码的排序方式优化[22-26]、基于互相干度的测量矩阵优化[27]和基于字典学习和深度学习的测量矩阵优化[28-29]。然而，上述测量矩阵优化方法往往存在以下问题：1）依赖于数据库，不具备普适性，如基于字典学习和深度学习的测量矩阵优化[28-29]；2）目标优化函数不够完善，往往只能实现局部优化，如基于互相干度的测量矩阵优化[27]；3）难以解释或者预判图像重建质量的好坏，测量矩阵特性与目标特性、图像重建结果之间的定量关系不明确，如不同排序的Hadamard编码矩阵图像重建结果差异较大[22]。因此，结合光学成像系统和压缩感知理论，深入挖掘测量矩阵的物理性能，构建一种可预判图像重建质量好坏的特征函数成为单像素压缩成像亟须解决的课题。

本文从相同采样率条件下不同排序方式的Hadamard编码矩阵所对应的单像素压缩成像结果差异较大这一现象出发进行分析，结合压缩感知理论，通过单像素成像系统的测量矩阵获得了Gram矩阵和系统点扩散函数。基于系统点扩散函数和图像重建特性，提出了最强旁瓣峰值大小、叠加旁瓣峰值大小、空间距离和频谱余弦相似度这4个特征参量，并在此基础上构建了一种单像素压缩成像高质量图像重建特征函数，最后通过设计具备不同统计特性的测量矩阵对所提特征函数进行了有效性实验验证。

2 问题提出与特征函数构建

2.1 单像素压缩成像原理

图1为单像素压缩成像的基本结构图。LED光源发出的光均匀地辐照于待测物体并通过透镜L_1成像于数字微镜器件（DMD）上。接着，DMD以事先设定的编码图案对待测物体的共轭像进行幅度调制，经DMD的反射光由透镜L_2会聚于单像素探测器上。结合压缩感知理论模型[19,34]，假设DMD上的调制图案大小为$m \times n$，将其排成一个$1 \times N$的行向量，经过M次调制后，形成一个$M \times N$测量矩阵$\boldsymbol{A}$，同时

收稿日期：2023-11-06；**修回日期**：2024-01-01；**录用日期**：2024-01-11；**网络首发日期**：2024-02-20

基金项目：江苏省高等学校自然科学研究项目（21KJA140001）、苏州大学引进人才科研启动项目（NH15901123）

通信作者：*wlgong@suda.edu.cn

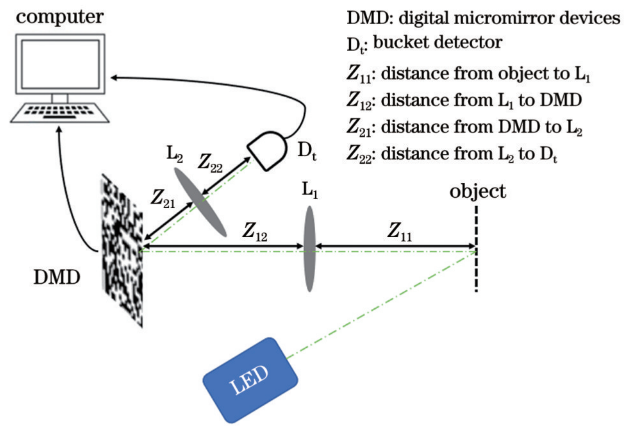


图1　单像素压缩成像基本结构图

Fig. 1　Structure of single-pixel compressive imaging

单像素探测器所记录的强度信息可表示为$M\times1$的列向量$\boldsymbol{Y}$。此外，由于待测目标面与DMD面为共轭像关系，待测目标的图像大小也为$m\times n$，将其排成一个$N\times1$的列向量$\boldsymbol{X}$，如果$\boldsymbol{X}$通过表象变换矩阵$\boldsymbol{\Psi}$（即$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\Psi\alpha}$）后所得到的$\boldsymbol{\alpha}$是稀疏的，则整个采样过程可以表示为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}+\xi=\boldsymbol{A\Psi\alpha}+\xi,\tag{1}$$

式中：ξ为探测噪声，为$M\times1$的列向量。待测目标的图像可以通过求解下面的凸优化问题而重构出来[20,35]，即

$$\min_{\alpha}\left\{\tfrac{1}{2}\left\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{AX}\right\|_2^2+\tau\left\|\boldsymbol{\alpha}\right\|_1\right\},\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{\Psi\alpha},\tag{2}$$

式中：τ为非负参数。

对于单像素压缩成像而言，由于前K个最大值数据可以表征长度为N的目标图像的主要信息，因此该目标的稀疏度可以定义为$S=K/N$。同时，目标图像的重建质量与测量矩阵$\boldsymbol{A}$的特性紧密相关，通常可以通过计算测量矩阵$\boldsymbol{A}$和表象变换矩阵$\boldsymbol{\Psi}$之间的相干度μ来进行评价[34]。比如：当选用笛卡儿基时，表象变换矩阵$\boldsymbol{\Psi}$为单位阵，若测量矩阵$\boldsymbol{A}$选用归一化的Hadamard矩阵，此时相干度$\mu=1$。此外，已有压缩感知理论和单像素压缩成像实验结果表明[20,34]：当随机测量次数M满足$M\geqslant C\mu^2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\Psi})S\log_2 N$（$C$为正常数）时，目标图像可以被稳定重构，而此时的采样率定义为$\eta=M/N$。

2.2　问题的提出

近年来，研究人员在基于Hadamard编码的单像素成像方面开展了较为深入的研究[22-27]，先后提出了不同排序方式的Hadamard编码矩阵，比如：随机序（Random）、自然序（Natural）、切蛋糕序（CC）[24]、俄罗斯套娃序（RD）[25]和渐进序（MP）[26]。然而，对于不同类型的目标，Hadamard编码排序方式对单像素压缩成像质量的影响差异较大[22,30]。图2给出了采样率$\eta=0.366$时，Random、Natural、CC、RD和MP 5种Hadamard编码矩阵下的灰度连续目标、二值缝状目标

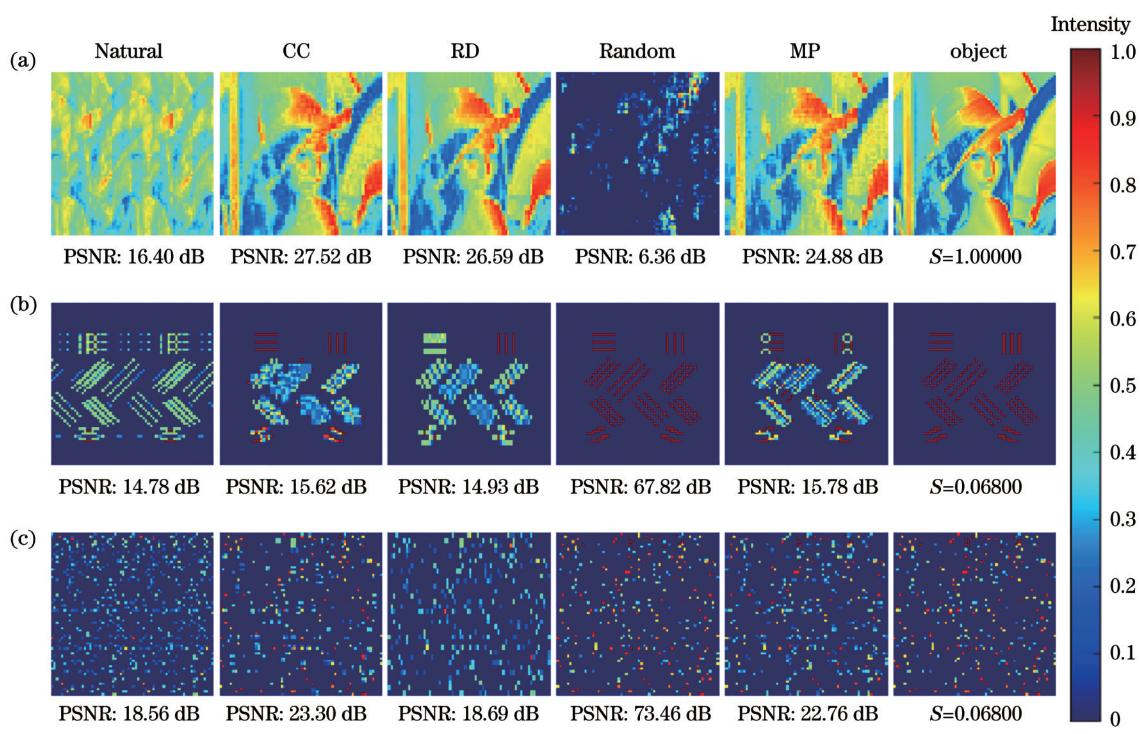


图2　当采样率$\eta=0.366$时，Hadamard编码排序方式对不同类型目标的单像素压缩成像质量的影响差异。(a)Lena目标；(b)二值缝状目标；(c)随机灰度点目标

Fig. 2　Influence differences of single-pixel compressive imaging quality for different objects and different kinds of Hadamard encoding matrices when sampling ratio $\eta=0.366$. (a) Lena target; (b) binary slit shaped target; (c) random grayscale point target

和随机灰度点目标(64 pixel×64 pixel)的单像素成像结果,图中峰值信噪比(PSNR)定义见文献[17]。从图 2 可以清楚地看出:对于较为复杂的 Lena 目标,CC 重构结果最好,Random 重构结果最差;对于稀疏度 S=0.06800 的二值缝状目标和随机灰度点目标,Random 重构结果最好,Natural 重构结果最差;而对于上述 3 种目标,CC 重构结果最佳。经计算可得,当单像素压缩成像图像重建过程中的表达基采用笛卡儿基且采样率 $\eta=0.366$ 时,上述 5 种 Hadamard 编码方式下的相干度相同,即 $\mu(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\Psi})=1$。因此,结合"当随机测量次数 M 满足 $M\geqslant C\mu^2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\Psi})S\log_2 N$ 时,目标图像可以被稳定重构"的压缩感知理论,当目标的稀疏度相同时,上述 5 种 Hadamard 编码矩阵所对应的单像素压缩成像质量应该相同。这与图 2 所示的数值模拟仿真结果不吻合,尤其是稀疏度 S=0.06800 的二值缝状目标情形。这意味着 $M\geqslant C\mu^2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\Psi})S\log_2 N$ 仅仅是单像素压缩成像图像稳定重构的充分条件,需要对测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特性进行进一步的深入挖掘,以解释图 2 所述的此类单像素压缩成像图像重建现象。

2.3 所提出的特征函数与建模

根据以往的单像素压缩成像研究结果[19-20],图像精确重构不仅需要考虑采样的独立性(即测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行向量之间的相关性),还需考虑测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量之间的相关性。对于光学成像系统而言,测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量之间的相关性通常表达了光学成像系统的空间衍射极限分辨率[17]。2006 年,Donoho 等[36]分析了测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量之间的相关性对图像精确重构的影响。通过计算 Gram 矩阵[$\boldsymbol{G}'=(\boldsymbol{D}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}'$,其中,$\boldsymbol{D}'$ 是通过对测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量进行二范数归一化后的结果]的互相干度 $\rho=\max\limits_{1<i,j<N,i\neq j}\left|\boldsymbol{G}(i,j)\right|$,阐述了图像精确重构时互相干度 ρ 与目标非零元数目 K 的关系,即 $K<(1+\rho^{-1})/2$。显然,这一条件极其苛刻,经计算也不能解释图 2 所示的现象。后来,相关研究人员基于 Gram 矩阵,提出了 t-平均互相干度、总互相干度等参数来评判测量矩阵性能的好坏,但是并未建立图像精确重构与互相干度之间的关系[37-38],同时经过计算也不能解释图 2 所示的现象。2016 年,本课题组基于线性关联重建算法和特征矩阵 $\boldsymbol{\Phi}=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}\langle\boldsymbol{A}\rangle\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,提出了以峰值旁瓣比、图像信噪比和灰度保真度为特征参数来预判单像素成像质量的方法,实验证明了所提方法的有效性[23]。为了解释图 2 中所示的单像素压缩成像现象,结合压缩感知理论并借鉴文献[23]所述的相关特征参数,本文提出了最强旁瓣峰值大小、叠加旁瓣峰值大小、空间距离和频谱余弦相似度 4 种特征参量,并构建了基于上述 4 种特征参量的单像素压缩成像图像重建特征函数,初步建立了图像稳定重建时所提特征函数与目标稀疏度的关系。

系统点扩散函数是表征光学成像质量好坏最为主要的物理参量。不同于传统光学成像,单像素成像的点扩散函数是一个统计的结果,其与采样次数和测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特性紧密相关。类似于文献[23],为了保证单像素压缩成像点扩散函数的普适性,根据式(1),将测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和表象变换矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 综合考虑,构建系统的 Gram 矩阵,即 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$($\boldsymbol{D}$ 为对矩阵 $\boldsymbol{A\Psi}$ 的列向量进行二范数归一化后获得的结果)。根据以往的研究结果,Gram 矩阵的第 i 行表示了对应图像像素点位置的点扩散函数,记作 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{PS,G}}^{(i)}$。例如:当测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 1500×4096 的 Natural Hadamard 编码、表达基选用实空间基(即表象变换矩阵 $\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{I}$ 为单位阵)时,图 3(a)为对应的 Gram 矩阵。选取 Gram 矩阵的第 2016 行并将其排成 64 pixel×64 pixel 的图像,则其对应于目标图像像素点(32,32)处的点扩散函数图像,见图 3(b)所示。可以看出:像素点(32,32)处对应

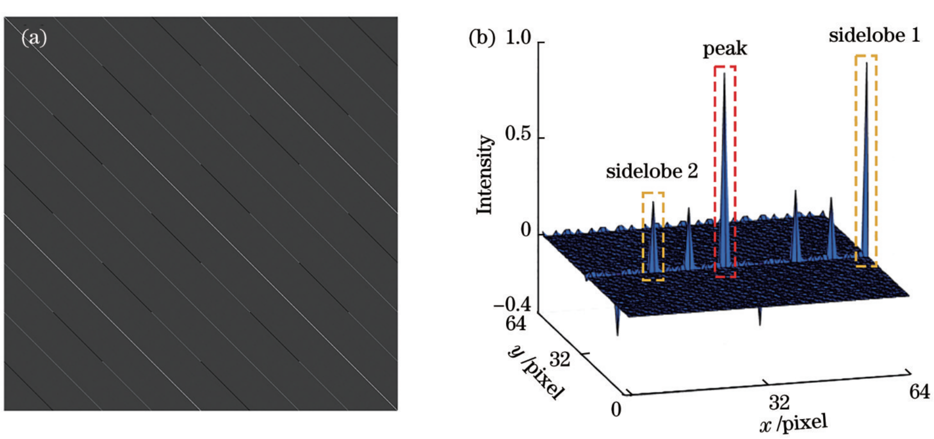


图 3 当采样率 $\eta=0.366$ 时,Natural Hadamard 编码矩阵所构建的 Gram 矩阵和由 Gram 矩阵的第 2016 行所形成的点扩散函数。(a) Gram 矩阵;(b)点扩展函数 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{PS,G}}^{(2016)}$

Fig. 3 Diagram of Gram matrix for Natural Hadamard encoding matrix when sampling ratio $\eta=0.366$ and point spread function derived from 2016th row of Gram matrix. (a) Gram matrix; (b) point spread function $\boldsymbol{F}_{\mathrm{PS,G}}^{(2016)}$

于点扩散函数的主峰位置，其数值为1且该主峰的半峰全宽为1 pixel，这说明该系统对应的空间分辨率为1 pixel。然而，与具有相同空间分辨率的传统光学成像系统的点扩散函数图像相比，除了主峰之外，图3(b)还存在一些旁瓣峰，尤其还存在一个数值为1的旁瓣峰。主峰和最强旁瓣峰的数值相同，在单像素压缩成像图像重建时主峰位置和最强旁瓣峰位置将无法区分，从而出现图像信息混叠或者分辨率退化的现象，类似于图2(b)。基于上述现象，最强旁瓣峰值大小可以作为图像重建质量的特征参数之一。同时，为了保证相同的图像分辨率，主峰值的半峰全宽也是重要的特征参数之一，本文将采用空间频域下与理想点扩散函数频谱的余弦相似度来表征。所提出的最强旁瓣峰值大小、叠加旁瓣峰值大小、空间距离和频谱余弦相似度这4个特征参量描述如下。

2.3.1　最强旁瓣峰值大小

如图3(b)所示，最强旁瓣峰值大小指点扩散函数图像中除主峰外的第一个次强峰的数值大小，即sidelobe 1对应的数值，记作$\mu_{\max}$：

$$\mu_{\max}=\max\left\{\left|\boldsymbol{G}^{(i)}-\boldsymbol{I}^{(i)}\right|\right\},\tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{G}^{(i)}$和$\boldsymbol{I}^{(i)}$分别为Gram矩阵和单位矩阵的第i行元素。由于点扩散函数图像中的主峰位置数值为1，因此最强旁瓣峰值大小$\mu_{\max}\leqslant 1$。$\mu_{\max}$越小则越有利于单像素压缩成像的图像重建。正如图2中的Natural Hadamard编码重建结果所示，$\mu_{\max}=1$时会产生伪影，从而导致无法精确重建目标图像。

2.3.2　叠加旁瓣峰值大小

对于单像素压缩成像而言，目标图像中的某些特殊位置点也会导致图像重建的失败。例如：即使目标图像只有两个像素点有数值，如图4所示，不同排序方式的Hadamard编码矩阵均存在不能精确重构的特殊点位置。结合图3(b)所示的点扩散函数图像，分析发现致使上述图像无法精确重构的原因是：最强旁瓣峰值位置和次强旁瓣峰值位置的数值叠加结果与点扩散函数图像中的主峰数值大小相等。因此，定义“叠加旁瓣峰值大小”这个特征参数μ_{overlay}，该参数指最强旁瓣峰值大小和次强旁瓣峰值大小之和，即

$$\mu_{\text{overlay}}=\max\left\{\left|\boldsymbol{G}^{(i)}-\boldsymbol{I}^{(i)}\right|\right\}+\max2\left\{\left|\boldsymbol{G}^{(i)}-\boldsymbol{I}^{(i)}\right|\right\},\tag{4}$$

式中：max2{·}代表求解某函数的第2个最大值。

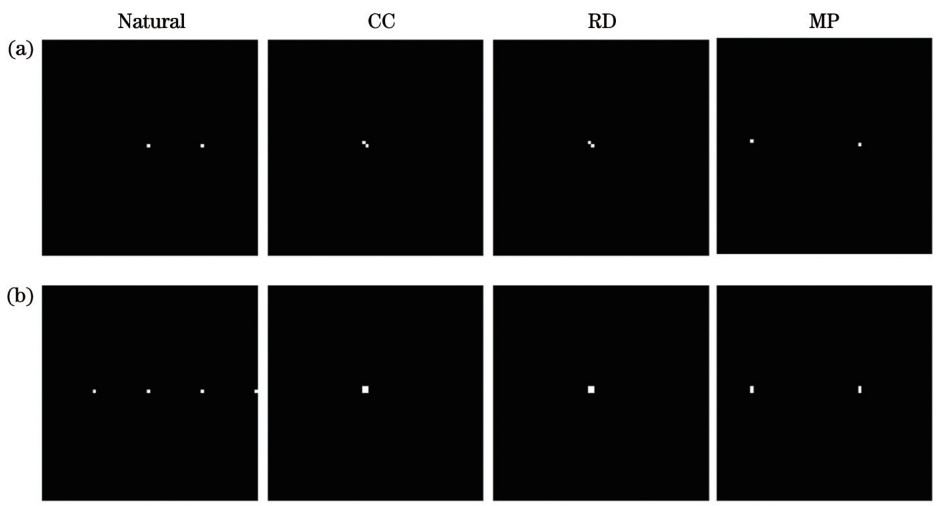


图4　当采样率$\eta=0.562$时，Natural、CC、RD和MP Hadamard编码矩阵所对应的特殊位置点及其重建结果。(a)特殊位置点；(b)重建结果

Fig. 4　Special positions and reconstruction results for Natural, CC, RD and MP Hadamard encoding matrices when sampling ratio $\eta=0.562$. (a) Special positions; (b) reconstruction results

2.3.3　空间距离

对于理想光学成像系统而言，通常点扩散函数图像中仅主峰位置的数值为1，其他位置的数值均为0。为了实现图像的精确重建，$\boldsymbol{G}^{(i)}$应该尽可能接近于$\boldsymbol{I}^{(i)}$，通常可以通过计算$\left\|\boldsymbol{G}^{(i)}-\boldsymbol{I}^{(i)}\right\|_2$来衡量点扩散函数的偏离程度。然而，在欠采样($M<N$)的情况下，Gram矩阵$\boldsymbol{G}$的秩不会超过$M$。因此，通过对行向量$\left|\boldsymbol{G}^{(i)}-\boldsymbol{I}^{(i)}\right|$按照元素数值从大到小进行排序，并通过计算前$M$个元素的均方和的1/2次方来定义空间距离$\mu_{\text{part_sum}}$，即

$$\mu_{\text{part\_sum}}=\sqrt{\frac{\sum L^{(M)}\left[\operatorname{sort}\left(\left|\boldsymbol{G}^{(i)}-\boldsymbol{I}^{(i)}\right|^2\right)\right]}{M}},\tag{5}$$

式中：sort($\boldsymbol{X}$)表示对行向量$\boldsymbol{X}$的元素数值从大到小进行排序；$L^{(M)}[\boldsymbol{X}]$表示取向量$\boldsymbol{X}$的前M个元素。

2.3.4　频谱余弦相似度

对于光学成像而言，为了准确并定量地测量系统的空间分辨率，通常采用系统点扩散函数的傅里叶变换来获取系统的截止频率，进而得到系统的空间分辨

率。因此，为了衡量测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的空间分辨率与设计系统空间分辨率的差异，可以通过计算测量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应点扩散函数 $\boldsymbol{F}^{(i)}_{\mathrm{PS,G}}$ 的频谱与设计系统点扩散函数 $\boldsymbol{F}^{(i)}_{\mathrm{PS,ideal}}$ 的频谱之间的余弦相似度来进行评价[39]。为了保证计算精度，本文将采用以下方法计算点扩散函数的频谱余弦相似度。例如，对于图 3(b)所示的点扩散函数 $\boldsymbol{F}^{(2016)}_{\mathrm{PS,G}}$(64 pixel×64 pixel)，傅里叶变换后的频谱面为 128 pixel×128 pixel；此外，采用直径为 128 pixel 的圆形区域进行余弦相似度计算。频谱余弦相似度 $s_{\mathrm{spectrum,cos}}$ 计算公式如下：

$$s_{\mathrm{spectrum,cos}}=\frac{\left\{\mathrm{abs}\left\{\mathrm{cricle}\left\{\mathscr{F}\left[\boldsymbol{F}^{(i)}_{\mathrm{PS,ieal}}\right]\right\}\right\}\right\}^{2}\times\left\{\mathrm{abs}\left\{\mathrm{cricle}\left\{\mathscr{F}\left[\boldsymbol{F}^{(i)}_{\mathrm{PS,G}}\right]\right\}\right\}\right\}^{2}}{\left\|\left\{\mathrm{abs}\left\{\mathrm{cricle}\left\{\mathscr{F}\left[\boldsymbol{F}^{(i)}_{\mathrm{PS,ieal}}\right]\right\}\right\}\right\}^{2}\right\|_{2}\times\left\|\left\{\mathrm{abs}\left\{\mathrm{cricle}\left\{\mathscr{F}\left[\boldsymbol{F}^{(i)}_{\mathrm{PS,G}}\right]\right\}\right\}\right\}^{2}\right\|_{2}},\tag{6}$$

式中：$\mathscr{F}(\boldsymbol{x})$ 表示对 $\boldsymbol{x}$ 作傅里叶变换操作；$\mathrm{cricle}(\boldsymbol{x})$ 表示对 $\boldsymbol{x}$ 进行圆形区域滤波操作；$\mathrm{abs}(\boldsymbol{x})$ 表示对 $\boldsymbol{x}$ 进行取模操作。与上述所提的其他 3 种特征参数不同，频谱余弦相似度表征了成像系统的固有特性，体现了图像重建结果空间分辨率、各向同性等参量与设计系统的一致性。

基于上述定义的 4 个特征参量，对图 2 所示的 5 种不同排序 Hadamard 编码矩阵进行了计算与分析。选用 Gram 矩阵第 2016 行所对应的点扩散函数 $\boldsymbol{F}^{(2016)}_{\mathrm{PS,G}}$ 作为分析对象，图 5 分别给出了采样率 η 与 $\mu_{\max}$、$\mu_{\mathrm{part\_sum}}$、μ_{overlay} 和 $s_{\mathrm{spectrum,cos}}$ 的变化关系。可以清楚地看出：随着采样率 η 的增加，$\mu_{\max}$、$\mu_{\mathrm{part\_sum}}$ 和 μ_{overlay} 均减小，$s_{\mathrm{spectrum,cos}}$ 变大，说明 $\boldsymbol{F}^{(i)}_{\mathrm{PS,G}}$ 朝着理想点扩散函数逼近，这与理论趋势相符合。然而，对于不同排序方式的 Hadamard 编码矩阵，在相同采样率 η 下，它们所对应的 $\mu_{\max}$、$\mu_{\mathrm{part\_sum}}$、μ_{overlay} 和 $s_{\mathrm{spectrum,cos}}$ 差异较大。比如：当采样率 $\eta\leqslant 0.1$ 时，Random Hadamard 编码矩阵的 $\mu_{\max}$、$\mu_{\mathrm{part\_sum}}$、μ_{overlay} 远小于其他 4 种 Hadamard 编码矩阵，而 $s_{\mathrm{spectrum,cos}}$ 大于其他 4 种 Hadamard 编码矩阵。仅用上述所提出的单一特征参量无法解释图 2 中的单像素压缩成像图像重构现象，因此尝试构建一个综合考虑上述 4 个特征参量的特征函数。通过分析图 5 所示的 4 个特征参量与采样率 η 的关系，所构建的特征函数 $F(\eta)$ 可表示为

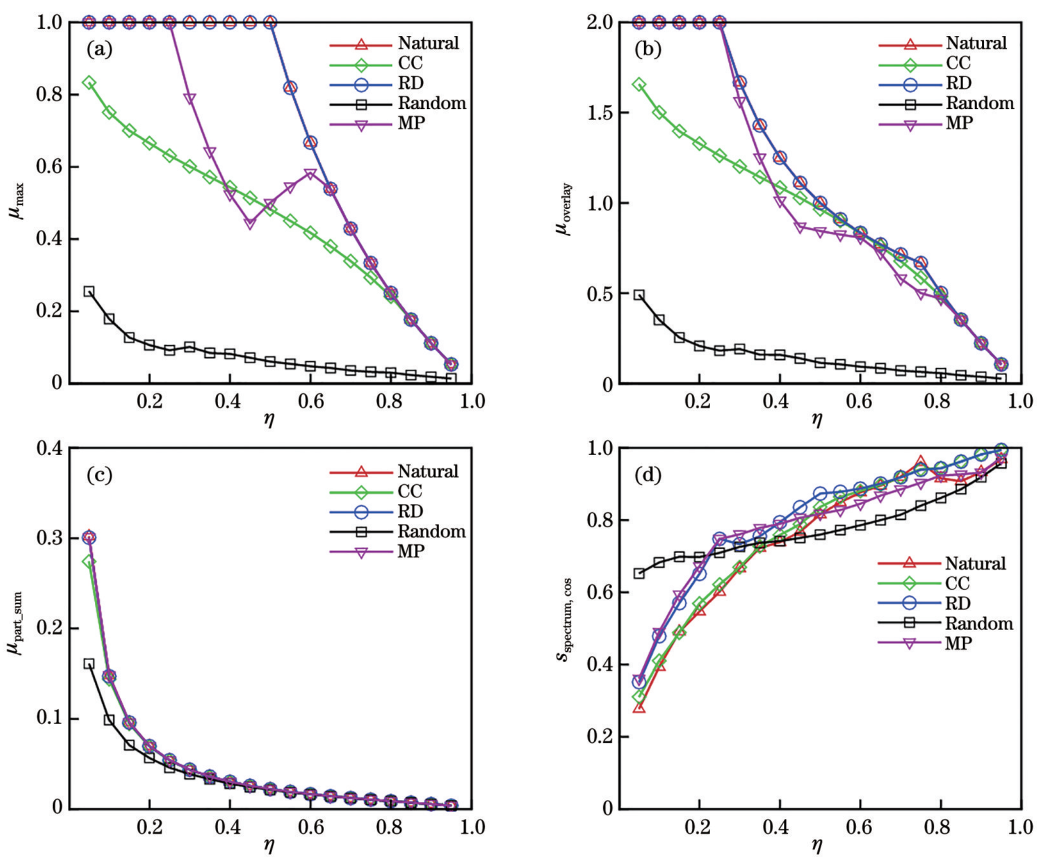


图 5 5 种不同排序方式 Hadamard 编码矩阵所对应的特征参量与采样率 η 的关系。(a) $\mu_{\max}$-η 曲线；(b) μ_{overlay}-η 曲线；(c) $\mu_{\mathrm{part\_sum}}$-η 曲线；(d) $s_{\mathrm{spectrum,cos}}$-$\eta$ 曲线

Fig. 5 Relationship between four characteristic parameters and sampling ratio η for five kinds of Hadamard encoding matrices. (a) Curves of $\mu_{\max}$-η; (b) curves of μ_{overlay}-η; (c) curves of $\mu_{\mathrm{part\_sum}}$-η; (d) curves of $s_{\mathrm{spectrum,cos}}$-$\eta$

$$F(\eta)=s_{\text{spectrum, cos}}^{\alpha}\left(1-\mu_{\max}\right)^{\beta}\left(1-\mu_{\text{part\_sum}}\right)^{\gamma}\left(1-\frac{\mu_{\text{overlay}}}{2}\right)^{\delta},\tag{7}$$

式中：α、β、γ、δ为待求系数。根据式(7)，当测量矩阵$\boldsymbol{A}$和采样率η确定时，$\mu_{\max}$、$\mu_{\text{part\_sum}}$、μ_{overlay}和$s_{\text{spectrum, cos}}$均可以被计算出来，因此$F(\eta)$原则上也将确定下来。

根据图 2 所示的 Random Hadamard 编码矩阵重建结果，待测物体的稀疏度S较小时可以精确重构目标图像(如二值缝状目标)，而当待测物体的稀疏度S较大时图像重构质量较差(如 Lena 目标)。因此，将存在一个稀疏度阈值S_{ε}，若目标的稀疏度小于该阈值S_{ε}，则目标图像可以被精确重构，下文将试图建立特征函数$F(\eta)$与阈值S_{ε}的线性关系，即$S_{\varepsilon}=CF(\eta)$。

首先，需要确定特征函数$F(\eta)$的待求系数。以 Random Hadamard 编码方式为例，设定某一采样率值η，待测物体采用随机灰度点目标，由于同一稀疏度的随机灰度点目标有很多组合，因此，对于相同稀疏度的随机灰度点目标，进行 10 次随机生成并进行对应的图像重建，若每次图像重建结果的 PSNR 均在 70 dB 左右，则认为该稀疏度下待测目标图像可以被精确重构。根据上述过程，表 1 给出了采样率$\eta=0.05\sim0.95$条件下对应的$\mu_{\max}$、$\mu_{\text{part_sum}}$、μ_{overlay}、$s_{\text{spectrum, cos}}$和S_{ε}。结合式(7)和$S_{\varepsilon}=CF(\eta)$，通过对表 1 的数据进行拟合，计算得到：$\alpha=6$，$\beta=3$，$\gamma=2$，$\delta=4$，$C=1$，因此特征函数$F(\eta)$与阈值S_{ε}的关系可以表示为

$$S_{\varepsilon}=F(\eta)=s_{\text{spectrum, cos}}^{6}\left(1-\mu_{\max}\right)^{3}\left(1-\mu_{\text{part\_sum}}\right)\times\left(1-\frac{\mu_{\text{overlay}}}{2}\right)^{4}。\tag{8}$$

根据式(8)，对于不同排序方式的 Hadamard 编码矩阵，在α、β、γ、δ、C均相同的情况下，所得到的S_{ε}-η关系如图 6 所示。可以看出：在相同采样率下，Random Hadamard 编码矩阵所能重建的稀疏度阈值S_{ε}一直大于其余 4 种 Hadamard 编码矩阵，并且随着采样率的增加，5 种 Hadamard 编码矩阵所能重建的稀疏度阈值S_{ε}均逐渐增加至 1。因此，可以通过S_{ε}-η曲线图预判 5 种 Hadamard 编码矩阵的单像素压缩成像结果。

表 1 Random Hadamard 编码矩阵在不同采样率η下对应的特征参数和稀疏度阈值

Table 1 Characteristic parameters and sparsity threshold values at different sampling ratio η for Random Hadamard encoding matrix

η	$\mu_{\max}$	μ_{overlay}	$\mu_{\text{part\_sum}}$	$s_{\text{spectrum, cos}}$	S_{ε}
0.05	0.2549	0.4902	0.1610	0.6527	0.00587
0.10	0.1785	0.3521	0.0983	0.6831	0.01220
0.15	0.1270	0.2541	0.0709	0.6989	0.01950
0.20	0.1062	0.2076	0.0562	0.6978	0.02930
0.25	0.0918	0.1816	0.0462	0.7097	0.03910
0.30	0.1010	0.1906	0.0385	0.7262	0.04880
0.35	0.0844	0.1591	0.0328	0.7373	0.06100
0.40	0.0818	0.1587	0.0282	0.7421	0.07570
0.45	0.0711	0.1389	0.0245	0.7509	0.09030
0.50	0.0605	0.1143	0.0213	0.7601	0.11200
0.55	0.0542	0.1057	0.0186	0.7727	0.12900
0.60	0.0476	0.0928	0.0161	0.7860	0.15300
0.65	0.0428	0.0841	0.0141	0.8001	0.17200
0.70	0.0359	0.0712	0.0121	0.8151	0.20000
0.75	0.0319	0.0638	0.0104	0.8402	0.24200
0.80	0.0299	0.0568	0.0087	0.8617	0.27600
0.85	0.0233	0.0448	0.0071	0.8858	0.39100
0.90	0.0184	0.0369	0.0055	0.9190	0.51300
0.95	0.0136	0.0267	0.0037	0.9574	0.69600

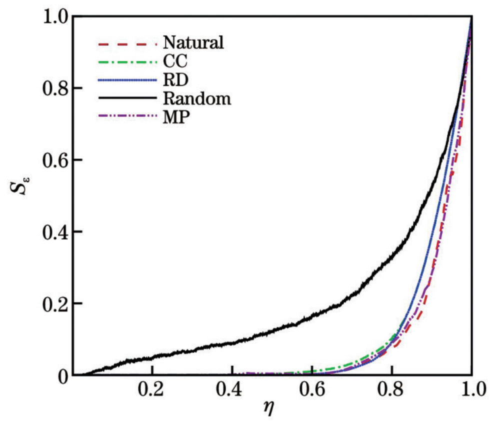


图6 5种不同排序方式Hadamard编码矩阵对应的S_ε-η曲线

Fig. 6 S_ε-η curves for five kinds of Hadamard encoding matrices

3 数值模拟与实验验证

为了验证上述所提特征函数的有效性，基于图1所示的系统结构，设置数值模拟和实验验证的参数如下：辐照光源的中心波长为532 nm，z_{11}=1000 mm，z_{12}=250 mm，z_{21}=z_{22}=200 mm，透镜L_1的焦距f_1=200 mm，透镜L_2的焦距f_2=100 mm。DMD上的编码图案大小为64 pixel×64 pixel，每个像素大小为54.6 μm×54.6 μm。此外，数值模拟过程中的探测信噪比（DSNR，可用R_{DSN}表示）为50 dB（$R_{DSN}=10\lg\left[\mathrm{std}(\boldsymbol{Y})/\mathrm{std}(\boldsymbol{\xi})\right]$，std($\boldsymbol{x}$)表示求向量$\boldsymbol{x}$的标准差），图像重建时采用GPSR算法[30]。

基于图6的S_ε-η曲线关系，当采样率η=0.6固定不变时，5种不同排序方式Hadamard编码矩阵所对应的稀疏度阈值S_ε分别为：S_ε=0.00189（Natural）、S_ε=0.01040（CC）、S_ε=0.00204（RD）、S_ε=0.16400（Random）、S_ε=0.00324（MP）。图7（a）给出了对应稀疏度条件下，利用上述5种不同排序方式Hadamard编码矩阵对随机灰度点目标进行单像素成像的数值模拟验证结果，而图7（b）和图7（c）分别给出了对稀疏度S=0.16400的缝状目标进行单像素成像的数值模拟和实验验证结果。可以看出：在待测目标的稀疏度S不大于对应的稀疏度阈值S_ε的条件下，5种不同排序方式Hadamard编码矩阵均能对随机灰度点目标进行完美重构[图7（a）]；而当$S>S_\varepsilon$时，Natural、CC、RD和MP的Hadamard编码矩阵均不能重建缝状目标的图

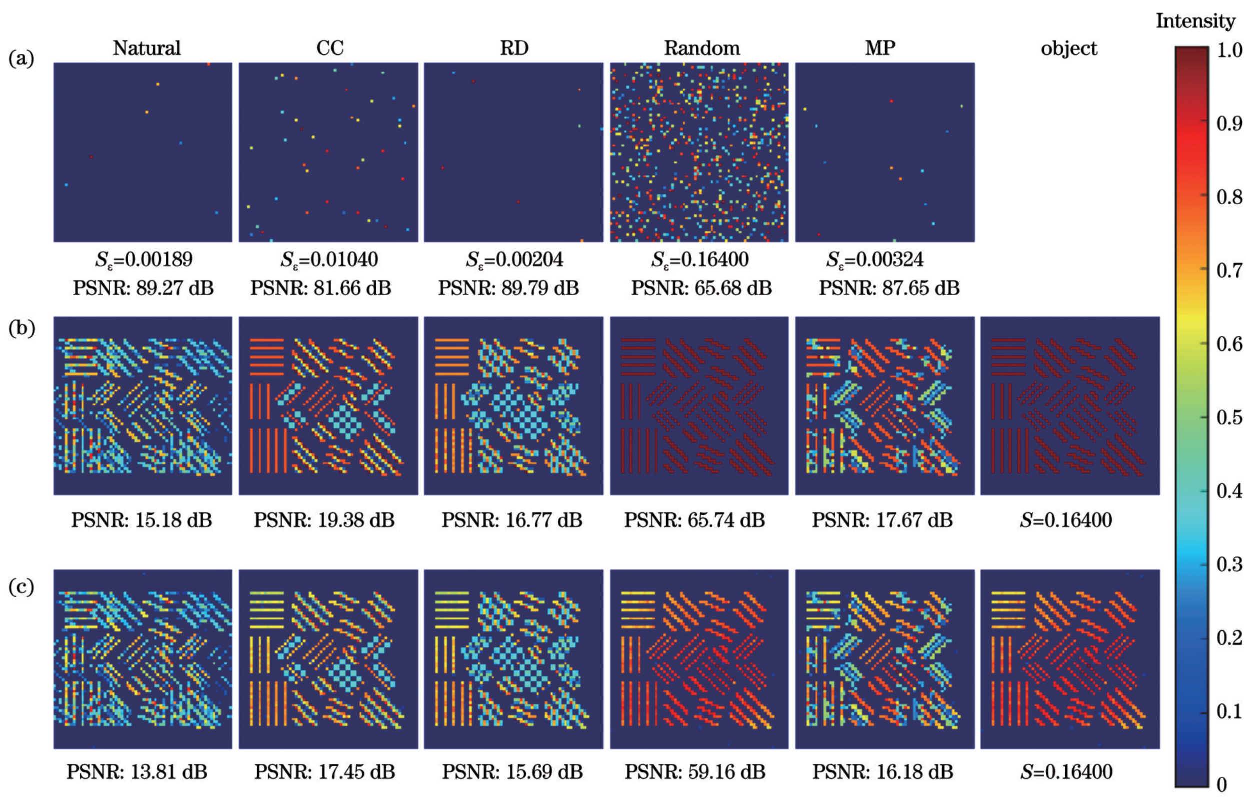


图7 采样率η=0.6时5种不同排序Hadamard编码矩阵所对应图像重建的数值模拟与实验验证结果。（a）所对应稀疏度阈值S_ε下的随机灰度点目标数值模拟验证结果；（b）稀疏度S=0.16400的缝状目标数值模拟验证结果；（c）稀疏度S=0.16400的缝状目标实验验证结果

Fig. 7 Simulated and experimental demonstration results for five kinds of Hadamard encoding matrices when sampling ratio η is 0.6. (a) Simulated reconstruction results for random grayscale point targets for corresponding sparsity threshold value S_ε; (b) simulated reconstruction results for the same slit shaped target with sparsity S=0.16400; (c) experimental reconstruction results for the same slit shaped target with sparsity S=0.16400

像；同时，类似于图 4 所示的 4 种不同排序方式 Hadamard 编码矩阵的点扩散函数特征，Natural Hadamard 编码矩阵重建的图像结果出现混叠现象，CC 和 RD Hadamard 编码矩阵重建的图像分辨率有所降低，MP Hadamard 编码矩阵重构的图像出现两端混叠现象；而 Random Hadamard 编码矩阵可以对缝状目标进行精确重建，该实验结果与图 2 所示的数值模拟结果基本一致，这也说明了对于 CC、RD 和 MP 的 Hadamard 编码矩阵而言，图 2 中 Lena 目标重建的 PSNR 高于随机序 Hadamard 编码矩阵的本质原因是低分辨图像的平滑作用和目标图像自身的连贯性。

另一方面，基于图 6 的 S_{ε}-η 曲线关系，当稀疏度阈值 S_{ε}=0.25000 时，Natural、CC、RD、Random 和 MP Hadamard 编码矩阵所对应的采样率 η 分别为 0.89100、0.88600、0.86600、0.72800 和 0.89100。图 8(a)和图 8(b)展示了 5 种不同排序方式 Hadamard 编码矩阵在各自采样率 η 条件下对稀疏度 S=0.25000 的随机灰度点目标和放射状目标进行单像素成像的数值模拟验证结果，而图 8(c)给出了放射状目标对应的实验验证结果。可以看出：5 种不同排序方式 Hadamard 编码矩阵均能在对应的采样率 η 下对稀疏度 S=0.25000 的随机灰度点目标实现完美重建；而当采样率 η=0.728 时，仅 Random Hadamard 编码矩阵能够对稀疏度 S=0.25000 的放射状目标进行精确重构，其他排序方式 Hadamard 编码矩阵对放射状目标进行图像重建的结果与图 7(b)和图 7(c)所示的现象类似。图 7 和图 8 所示的数值模拟和实验结果表明本文所提出的特征函数能够较为准确地预判单像素压缩成像质量的好坏。

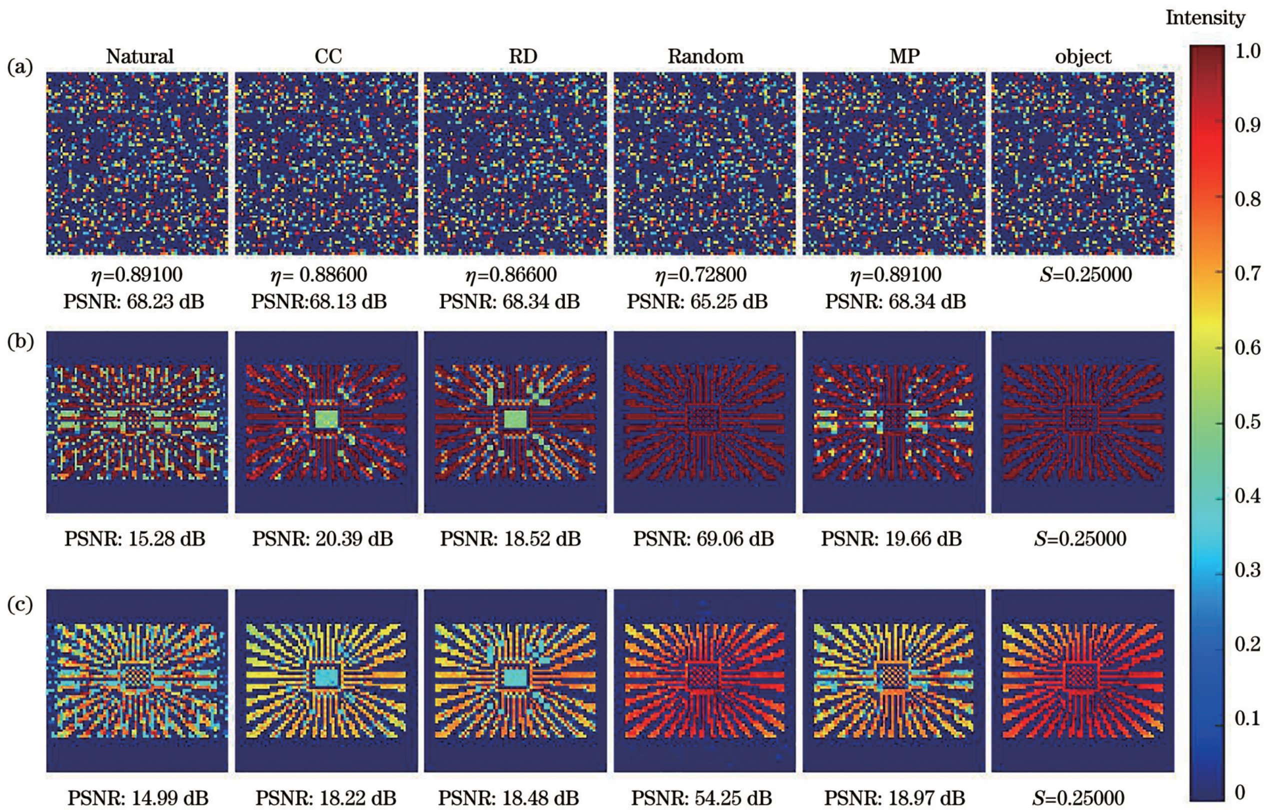


图 8 当稀疏度 S=0.25000 时，5 种不同排序 Hadamard 编码矩阵所对应图像重建的数值模拟与实验验证结果。(a)所对应采样率 η 下的随机灰度点目标数值模拟验证结果；(b)采样率 $\eta=0.728$ 的放射状目标数值模拟验证结果；(c)采样率 $\eta=0.728$ 的放射状目标实验验证结果

Fig. 8 Simulated and experimental demonstration results for five kinds of Hadamard encoding matrices when sparsity S is 0.25000. (a) Simulated reconstruction results for random grayscale point targets for corresponding sampling ratio value η; (b) simulated reconstruction results for the same radial-type target with sampling ratio $\eta=0.728$; (c) experimental reconstruction results for the same radial-type target with sampling ratio $\eta=0.728$

为了进一步验证所提特征函数的普适性，基于式(8)，表 2 列出了采样率 $\eta=0.5$、无噪声条件下 Random Hadamard 编码矩阵(Random Hadamard)、伯努利随机编码矩阵(Bernoulli)、高斯随机编码矩阵(Gaussian)和高斯正交编码矩阵(Orthogonal)所对应的稀疏度阈值 S_{ε} 以及不同目标稀疏度 S 下单像素压缩成像图像重建的 PSNR 值，图 9 给出了 $\eta=0.5$ 和 $\eta=0.7$ 的情况下，上述 4 种编码矩阵所对应的稀疏度阈

表2 当采样率 $\eta=0.5$ 时,4种编码矩阵对应的稀疏度阈值 S_ε 和不同稀疏度 S 下的PSNR值

Table 2 Sparsity threshold value S_ε and PSNR at different sparsity S for four types of encoding matrices when sampling ratio $\eta=0.5$

Encoding matrix	S_ε	PSNR /dB		
		$S=0.07660$	$S=0.09880$	$S=0.12100$
Random Hadamard	0.12100	84.33	75.05	69.21
Bernoulli	0.08250	70.03	65.18	61.18
Orthogonal	0.11500	80.61	72.80	68.24
Gaussian	0.07660	69.53	64.38	60.92

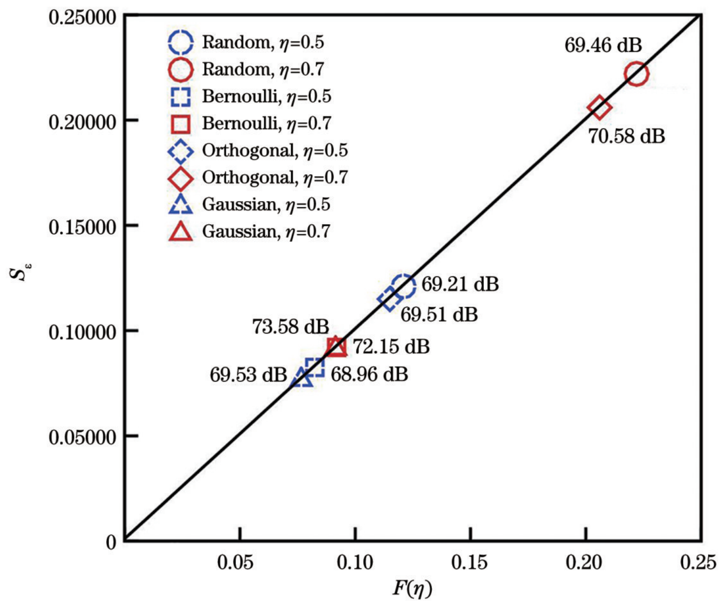


图9 当采样率 $\eta=0.5$ 和 $\eta=0.7$ 时,4种编码矩阵对应的稀疏度阈值 S_ε 及其所对应的PSNR值

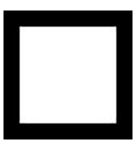
Fig. 9 Sparsity threshold value S_ε and PSNR for four types of encoding matrices when sampling ratio is $\eta=0.5$ and $\eta=0.7$

值和随机灰度点目标多次测试的PSNR平均值。此外,表3给出了采样率 $\eta=0.7$ 时,表达基依次为实空间(Space)基、离散余弦变换(DCT)基和离散小波变换(DWT)基下的上述4种编码矩阵所对应的稀疏度阈值、目标稀疏度值和图像重建PSNR值。可以看出:在实空间表达基下,Random Hadamard具备最佳的成像性能,Orthogonal次之,而Gaussian和Bernoulli只能对更为稀疏的目标进行精确重构。同时,对于某些编码矩阵,通过表象变换后其对应的稀疏度阈值变化不大而目标的稀疏度值可以得到大幅度的降低(如空域不稀疏的矩形目标、Orthogonal+DCT),此时可以大幅度提升目标的重建质量,但是也存在某些编码矩阵经表象变换后其对应的稀疏度阈值不仅大幅度降低而且目标的稀疏度值也增加的情形(如空域稀疏的随机离散点目标、Random Hadamard+DCT),此时将会导致成像质量的大幅度下降,因此需要结合编码矩阵和目标自身特性,选择合适的表象变换矩阵。表2和表3的数据进一步表明本文所提的特征函数可以有效评判不同编码矩阵的好坏。此外,图9所示的4种编码矩阵在对应的目标稀疏度阈值下重建结果的PSNR值也均在70 dB左右,这表明了式(8)所示的线性关系对其他形式的编码矩阵仍然有效,从而进一步验证了该特征函数可以作为单像素压缩成像系统测量矩阵优化时的目标函数,以获取更优的编码矩阵。

最后,值得说明的是,本文所构建的特征函数是以目标图像重建结果PSNR不小于70 dB作为精确重构的判据,工程应用中可以根据实际情况进行调整。此外,基于表1所示的数据所构建的特征函数 $F(\eta)$ 与4个特征参量的关系以及 S_ε-η 关系不可避免地存在一些误差,这主要来源于有限的仿真数据统计。同时,若对于图7(c)和图8(c)的实验结果仍采用PSNR来评价其图像重构质量,也会存在一定误差;对于更加复杂的场景,探索无参考图像的评价方法是进一步检验所提特征函数的有效性和单像素成像方向下一步的研究重点之一。值得强调的是,本文所述的特征函数虽然是基于压缩感知算法而构建的,但是其同样可应用于常用的线性重建算法。总的来说,本文所提出的特征参数和特征函数为预判单像素压缩成像的好坏提供了一种分析思路,在后期的研究工作中还需要对所述的数学模型进行进一步的探讨和完善。

表3　当采样率 $\eta=0.7$ 时，不同表象变换下4种编码矩阵对应的稀疏度阈值 S_ε、目标稀疏度 S 和对应的图像重建PSNR值

Table 3　Sparsity threshold value S_ε, target sparsity S, and PSNR for four types of encoding matrices when sampling ratio $\eta=0.7$

Object		Random Hadamard	Bernoulli	Orthogonal	Gaussian
Object 1	 space $S=0.16400$	PSNR: 78.24 dB $S_\varepsilon=0.22200$	PSNR: 63.54 dB $S_\varepsilon=0.09200$	PSNR: 76.47 dB $S_\varepsilon=0.20600$	PSNR: 62.64 dB $S_\varepsilon=0.09150$
	 DCT $S=0.98300$	PSNR: 14.78 dB $S_\varepsilon=0.07110$	PSNR: 16.21 dB $S_\varepsilon=0.10700$	PSNR: 16.04 dB $S_\varepsilon=0.21100$	PSNR: 16.47 dB $S_\varepsilon=0.09850$
	 DWT $S=0.89300$	PSNR: 17.67 dB $S_\varepsilon=0.18100$	PSNR: 18.14 dB $S_\varepsilon=0.09180$	PSNR: 18.64 dB $S_\varepsilon=0.21800$	PSNR: 18.62 dB $S_\varepsilon=0.09650$
Object 2	 space $S=0.56300$	PSNR: 9.46 dB $S_\varepsilon=0.22200$	PSNR: 4.71 dB $S_\varepsilon=0.09200$	PSNR: 8.24 dB $S_\varepsilon=0.20600$	PSNR: 5.72 dB $S_\varepsilon=0.09150$
	 DCT $S=0.15300$	PSNR: 9.56 dB $S_\varepsilon=0.07110$	PSNR: 84.57 dB $S_\varepsilon=0.10700$	PSNR: 90.78 dB $S_\varepsilon=0.21100$	PSNR: 81.36 dB $S_\varepsilon=0.09850$
	 DWT $S=0.37400$	PSNR: 18.73 dB $S_\varepsilon=0.18100$	PSNR: 64.27 dB $S_\varepsilon=0.09180$	PSNR: 75.24 dB $S_\varepsilon=0.21800$	PSNR: 64.18 dB $S_\varepsilon=0.09650$

4　结　　论

结合压缩感知理论，提出了基于点扩散函数的最强旁瓣峰值大小、叠加旁瓣峰值大小、空间距离和频谱余弦相似度4个特征参量，构建了一种单像素压缩成像高质量图像重建特征函数并通过数值模拟和实验验

证了其有效性。数值模拟和实验结果表明:所提出的特征函数不但可以解释不同排序方式的Hadamard编码矩阵所对应单像素压缩成像结果的差异问题,而且可以预判给定测量矩阵所对应的图像重建结果的好坏。同时,建立了单像素压缩成像高质量图像重建时所提特征函数和目标稀疏度的关系,该特征函数可以作为单像素成像测量矩阵优化过程中的判据,以实现更低采样率条件下的高质量图像重建。

参 考 文 献

[1] Cheng J, Han S S. Incoherent coincidence imaging and its applicability in X-ray diffraction[J]. Physical Review Letters, 2004, 92(9): 093903.

[2] Bennink R S, Bentley S J, Boyd R W, et al. Quantum and classical coincidence imaging[J]. Physical Review Letters, 2004, 92(3): 033601.

[3] Shapiro J H, Boyd R W. The physics of ghost imaging[J]. Quantum Information Processing, 2012, 11(4): 949-993.

[4] Graham-Rowe D. Pixel power[J]. Nature Photonics, 2007, 1: 211-212.

[5] Duarte M F, Davenport M A, Takhar D, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 83-91.

[6] Gibson G M, Johnson S D, Padgett M J. Single-pixel imaging 12 years on: a review[J]. Optics Express, 2020, 28(19): 28190-28208.

[7] Edgar M P, Gibson G M, Padgett M J. Principles and prospects for single-pixel imaging[J]. Nature Photonics, 2019, 13: 13-20.

[8] Zhao C Q, Gong W L, Chen M L, et al. Ghost imaging lidar via sparsity constraints[J]. Applied Physics Letters, 2012, 101(14): 141123.

[9] Erkmen B I. Computational ghost imaging for remote sensing[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2012, 29(5): 782-789.

[10] Sun B, Edgar M P, Bowman R, et al. 3D computational imaging with single-pixel detectors[J]. Science, 2013, 340(6134): 844-847.

[11] Gong W L, Zhao C Q, Yu H, et al. Three-dimensional ghost imaging lidar via sparsity constraint[J]. Scientific Reports, 2016, 6: 26133.

[12] Yu H, Lu R H, Han S S, et al. Fourier-transform ghost imaging with hard X rays[J]. Physical Review Letters, 2016, 117(11): 113901.

[13] Pelliccia D, Rack A, Scheel M, et al. Experimental X-ray ghost imaging[J]. Physical Review Letters, 2016, 117(11): 113902.

[14] Clemente P, Durán V, Torres-Company V, et al. Optical encryption based on computational ghost imaging[J]. Optics Letters, 2010, 35(14): 2391-2393.

[15] Gong W L, Han S S. A method to improve the visibility of ghost images obtained by thermal light[J]. Physics Letters A, 2010, 374(8): 1005-1008.

[16] Ferri F, Magatti D, Lugiato L A, et al. Differential ghost imaging[J]. Physical Review Letters, 2010, 104(25): 253603.

[17] Gong W L. High-resolution pseudo-inverse ghost imaging[J]. Photonics Research, 2015, 3(5): 234-237.

[18] Sun B Q, Welsh S S, Edgar M P, et al. Normalized ghost imaging[J]. Optics Express, 2012, 20(15): 16892-16901.

[19] Katz O, Bromberg Y, Silberberg Y. Compressive ghost imaging[J]. Applied Physics Letters, 2009, 95(13): 131110.

[20] Du J, Gong W L, Han S S. The influence of sparsity property of images on ghost imaging with thermal light[J]. Optics Letters, 2012, 37(6): 1067-1069.

[21] Lyu M, Wang W, Wang H, et al. Deep-learning-based ghost imaging[J]. Scientific Reports, 2017, 7(1): 17865.

[22] Vaz P G, Amaral D, Ferreira L F R, et al. Image quality of compressive single-pixel imaging using different Hadamard orderings[J]. Optics Express, 2020, 28(8): 11666-11681.

[23] Wang C L, Gong W L, Shao X H, et al. The influence of the property of random coded patterns on fluctuation-correlation ghost imaging[J]. Journal of Optics, 2016, 18(6): 065703.

[24] Yu W K. Super sub-Nyquist single-pixel imaging by means of cake-cutting Hadamard basis sort[J]. Sensors, 2019, 19(19): 4122.

[25] Sun M J, Meng L T, Edgar M P, et al. A Russian Dolls ordering of the Hadamard basis for compressive single-pixel imaging[J]. Scientific Reports, 2017, 7(1): 3464.

[26] Zhou C, Tian T, Gao C, et al. Multi-resolution progressive computational ghost imaging[J]. Journal of Optics, 2019, 21(5): 055702.

[27] Xu X Y, Li E R, Shen X, et al. Optimization of speckle patterns in ghost imaging via sparse constraints by mutual coherence minimization[J]. Chinese Optics Letters, 2015, 13(7): 071101.

[28] Hu C Y, Tong Z S, Liu Z T, et al. Optimization of light fields in ghost imaging using dictionary learning[J]. Optics Express, 2019, 27(20): 28734-28749.

[29] Higham C F, Murray-Smith R, Padgett M J, et al. Deep learning for real-time single-pixel video[J]. Scientific Reports, 2018, 8(1): 2369.

[30] 赵梓栋, 杨照华, 余远金. 单像素成像技术研究进展[J]. 中国激光, 2022, 49(19): 1917001.
Zhao Z D, Yang Z H, Yu Y J. Research progress of single pixel imaging[J]. Chinese Journal of Lasers, 2022, 49(19): 1917001.

[31] 孙鸣捷, 闫崧明, 王思源. 鬼成像和单像素成像技术中的重建算法[J]. 激光与光电子学进展, 2022, 59(2): 0200001.
Sun M J, Yan S M, Wang S Y. Reconstruction algorithms for ghost imaging and single-pixel imaging[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2022, 59(2): 0200001.

[32] Zhao H, Wang X Q, Gao C, et al. Second-order cumulants ghost imaging[J]. Chinese Optics Letters, 2022, 20(11): 112602.

[33] 孙宇松, 黄见, 时东锋, 等. 余弦编码复用多光谱关联成像技术研究[J]. 中国激光, 2023, 50(13): 1317001.
Sun Y S, Huang J, Shi D F, et al. Cosinusoidal encoding multiplexed multispectral ghost imaging[J]. Chinese Journal of Lasers, 2023, 50(13): 1317001.

[34] Candes E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21-30.

[35] Figueiredo M A T, Nowak R D, Wright S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 586-597.

[36] Donoho D L, Elad M, Temlyakov V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(1): 6-18.

[37] Elad M. Optimized projections for compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(12): 5695-5702.

[38] Yi R J, Cui C, Wu B, et al. A new method of measurement matrix optimization for compressed sensing based on alternating minimization[J]. Mathematics, 2021, 9(4): 329.

[39] Li Z J, Zhao Q, Gong W L. Distorted point spread function and image reconstruction for ghost imaging[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2021, 139: 106486.

High-Quality Image Reconstruction Characteristic Function for Single-Pixel Compressive Imaging

Ju Shichang, Cai Junjie, Gong Wenlin*

School of Optoelectronic Science and Engineering, Soochow University, Suzhou 215006, *Jiangsu, China*

Abstract

Objective The property of the measurement matrix has a great influence on the image reconstruction quality of single-pixel compressive imaging. Optimizing the measurement matrices is a core and crucial technology for single-pixel imaging. However, current optimization methods for measurement matrices often face the problems of local optimization and limited applicability. Additionally, existing analytical theories and methods based on the measurement matrix often fail to explain or predict the image reconstruction quality in many scenarios, and the quantitative relationship among measurement matrix characteristics, target properties, and image reconstruction results is unclear. For example, the reconstruction results vary obviously among different kinds of Hadamard encoding measurement matrices. Therefore, after combining optical imaging systems with compressive sensing theory, it has become an urgent issue for single-pixel compressive imaging to construct a characteristic function that can predict image reconstruction quality. We propose a characteristic function of high-quality image reconstruction for single-pixel compressive imaging to predict the imaging quality of targets with different sparsity, which is helpful for the optimal design of measurement matrices in single-pixel imaging systems.

Methods Under the same sampling rate, the image reconstruction quality is significantly different for various kinds of Hadamard encoding measurement matrices, which can not be explained by existing compressive sensing theories. By combining compressive sensing theory with the characteristic parameters described in Ref. [23], the Gram matrix is obtained from the measurement matrix and then the relationship between the Gram matrix and the system's point spread function is clarified. Next, according to the point spread function and compressive sensing theory, four characteristic parameters are proposed, including the peak value of the strongest sidelobe, overlapped sidelobe peak value, spatial distance, and spectral cosine similarity. Based on these parameters, an image reconstruction characteristic function $F(\eta)$ adopted for high-quality single-pixel compressive imaging is constructed. Meanwhile, by calculating the $F(\eta)$ values of the random Hadamard encoding matrix in different sampling rates η and conducting data fitting, the relationship between the target's sparsity and the characteristic function is established. Furthermore, by changing the target's sparsity, sampling rate, and the type of encoding measurement matrices, the validity of the proposed characteristic function is verified by numerical simulations and experiments.

Results and Discussions To demonstrate the validity of the proposed characteristic function, we conduct both numerical simulations and experiments based on the scheme in Fig. 1. Firstly, when the sampling rate η=0.6 is fixed, the sparsity thresholds for Natural, CC, RD, Random, and MP Hadamard encoding matrices are obtained and random grayscale point targets can be stably reconstructed at their respective sparsity thresholds S_ε [Fig. 7(a)]. However, the sparsity threshold S_ε for the Random Hadamard encoding matrix is much larger than that of the other four Hadamard encoding matrices. What's more, under $S>S_\varepsilon$, Natural, CC, RD, and MP Hadamard encoding matrices can not recover the image of the slit shaped target [Figs. 7(b) and 7(c)]. Secondly, according to Fig. 6, under S_ε=0.25000, the corresponding sampling rates η for the five kinds of Hadamard encoding matrices above are 0.89100, 0.88600, 0.86600, 0.72800, and 0.89100 respectively. Numerical simulations and experimental results demonstrate that random grayscale point targets can be perfectly reconstructed by all the five kinds of Hadamard encoding matrices when the target's sparsity S=0.25000 (Fig. 8). Additionally, when the sampling rate is η=0.728, only the random sequence Hadamard encoding matrix can accurately restore the radial target with the sparsity S=0.25000. Finally, the universality of the proposed characteristic function is further verified by Bernoulli random encoding matrices, Gaussian random encoding matrices, and Gaussian orthogonal encoding matrices in different representation bases (Tables 2 and 3, and Fig. 9). Meanwhile, Fig. 9 demonstrates that the relationship described by Equation (8) is valid for other common random encoding matrices, which means that the characteristic function can be employed as the objective function in optimizing measurement matrices for single-pixel compressive imaging systems.

Conclusions Combined with the compressed sensing theory, four characteristic parameters based on the point spread function are proposed, including the peak value of the strongest sidelobe, overlapped sidelobe peak value, spatial distance, and spectral cosine similarity. A high-quality image reconstruction characteristic function of single-pixel compressive imaging is constructed and its validity is verified by numerical simulations and experiments. Both numerical simulation and experimental results demonstrate that the proposed characteristic function can not only explain the differences in single-pixel compressive imaging quality for Hadamard coding matrices with different sorting methods but also predict the image reconstruction results of a given measurement matrix. Additionally, the relationship between the proposed characteristic function and the target sparsity in high-quality image reconstruction is established. The characteristic function can serve as a criterion during the optimization of measurement matrices for single-pixel imaging.

Key words imaging systems; single-pixel imaging; compressive sensing; measurement matrix; characteristic function