

## 分数衍射系统中部分PT对称孤子的对称破缺

翟远博<sup>1</sup>, 李汝江<sup>2</sup>, 李鹏飞<sup>1,3\*</sup><sup>1</sup>太原师范学院物理系, 山西 晋中 030619;<sup>2</sup>西安电子科技大学天线与微波技术重点实验室, 陕西 西安 710071;<sup>3</sup>太原师范学院计算与应用物理研究所, 山西 晋中 030619

**摘要** 基于分数阶非线性薛定谔方程,采用虚时演化的数值方法研究了部分宇称时间(PT)对称的光孤子及其自发对称破缺现象,通过线性稳定性分析并结合数值模拟研究了分数衍射效应对二维光孤子稳定性和传输的影响。结果表明:分数衍射系统中存在部分PT对称的二维光孤子,分数衍射效应随着莱维指数 $\alpha$ 的减小而增强,莱维指数 $\alpha$ 的改变影响光孤子的稳定性。当孤子功率超过特定的临界值 $P_c$ 时,部分PT对称的光孤子发生自发对称破缺,并转变为复传播常数的不对称态。通过分析莱维指数 $\alpha$ 与孤子自发对称破缺临界功率 $P_c$ 之间的关系,发现将莱维指数 $\alpha$ 从2减小至1时,孤子的自发对称破缺临界功率 $P_c$ 由1.6降低为0.4。这表明增强分数衍射效应使得部分PT对称的二维光孤子的稳定性变弱,进而在更小的孤子功率情况下发生自发对称破缺。该研究结果为分数衍射的非厄米非线性光学波导中控制孤子的形态和传输提供了理论依据。

**关键词** 非线性光学; 对称破缺; 分数非线性薛定谔方程; 部分宇称时间对称

中图分类号 O437 文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS231673

## 1 引言

分数效应产生的新奇现象在各个领域中被广泛研究,例如在流体力学<sup>[1]</sup>、水文学<sup>[2]</sup>、材料科学<sup>[3]</sup>、物理<sup>[4]</sup>、化学<sup>[5]</sup>以及生物学<sup>[6]</sup>等领域,通过建立空间或时间的分数阶导数模型描述其复杂的动力学过程<sup>[7-8]</sup>。

在量子力学领域,Laskin<sup>[9-11]</sup>基于对莱维飞行轨迹的费曼路径积分导出分数薛定谔方程,进而提出了分数量子力学。关于分数量子力学的研究,人们首先对分数阶薛定谔方程中的本征态和动力学进行分析,讨论了线性势中的解析解<sup>[12]</sup>、双势阱中的隧穿效应<sup>[13]</sup>、势阱中粒子的运动<sup>[14]</sup>、有限和无限深势阱中本征态<sup>[15]</sup>、局域周期势的传输等问题<sup>[16]</sup>。实验研究分数量子力学的首要问题是设计实验方案来实现分数阶导数对应的物理效应。例如,利用一维莱维晶体模拟分数量子力学<sup>[17]</sup>,但是实验实现莱维晶体仍然存在困难。另一种途径是利用经典光学系统中傍轴近似下光波传输方程与量子力学中薛定谔方程数学模型的类似性,并通过光学系统模拟分数阶薛定谔方程中分数衍射效应。Longhi<sup>[18]</sup>基于法布里-珀罗共振腔提出了相关的实验方案,利用凸透镜和锥形透镜的组合实现空间分数衍射效应。2023年,Liu等<sup>[19]</sup>利用可编程的全

息图和单热测量技术实现分数色散效应,通过重建脉冲的振幅和相位在时域中实现了时域分数阶薛定谔方程,并观测到时间孤子、脉冲分裂等分数色散光学系统的典型现象,为实验研究分数系统中的光孤子奠定了基础。

分数阶薛定谔方程中光束传输展现了丰富的动力学现象,为光波的传输和控制提供新的途径。在分数阶薛定谔方程中,分数衍射效应可以改变一维啁啾高斯光束的传输轨迹,实空间中光束以折线的形式传输,二维环形光束在传输过程中产生了具有呼吸特性的环状结构<sup>[20]</sup>。分数衍射效应对无衍射光束的传输也有显著的影响,艾里光束在分数衍射系统中传输导致光束出现分裂现象<sup>[21-23]</sup>,因此可利用分数衍射效应对艾里光束的反射进行调控<sup>[24]</sup>。此外,超高斯光束在分数衍射效应的作用下分裂为两束子光束,在非线性的作用下进一步演化为单孤子或孤子对<sup>[25]</sup>。在光束传输过程中,通过改变分数衍射效应的强弱来实现对光束传输过程的管理。例如:周期性地改变分数衍射效应,可以使高斯光束形成叉与融合周期性交替的传输现象<sup>[26-27]</sup>;分数衍射效应结合折射率调制对无衍射光束传输进行传输管理,可以实现光束的部分透射、反射和全反射<sup>[28]</sup>。分数衍射效应还会产生其他新奇

收稿日期: 2023-10-18; 修回日期: 2023-12-14; 录用日期: 2023-12-29; 网络首发日期: 2024-01-09

基金项目: 山西省基础研究计划(202303021211185)、国家自然科学基金(11805141, 12104353)、国家重点研发计划(2022YFA1404902)

通信作者: \*lipf@tynu.edu.cn

现象,如光学布洛赫振荡和齐纳隧穿<sup>[29]</sup>、共振模转换和拉比振荡<sup>[30]</sup>等。当分数衍射(色散)效应和非线性效应达到平衡时,分数阶非线性薛定谔方程中存在各种形式的光孤子,包括分数衍射非线性光学耦合器中的亮孤子<sup>[31]</sup>、二次分数孤子<sup>[32]</sup>、随机孤子光束<sup>[33]</sup>、间隙孤子和非线性布洛赫波<sup>[34]</sup>、涡旋孤子<sup>[35]</sup>以及不对称孤子<sup>[36-37]</sup>等。

分数阶薛定谔方程通过引入宇称时间(PT)对称势拓展了光学孤子的存在范围<sup>[38]</sup>,在光束传输控制方面有良好的应用前景<sup>[39-45]</sup>。目前的理论研究工作已经证明含有PT对称势的分数阶非线性薛定谔方程中存在光孤子解,但是很少涉及部分PT对称的孤子及其自发对称破缺现象的研究。本文研究部分PT对称的光孤子及其对称破缺现象,发现分数衍射效应影响部分PT对称的光孤子的稳定性,光孤子功率超过临界值时发生自发对称破缺,破缺之后转变为复传播常数的不对称态。

## 2 理论模型及分析方法

### 2.1 理论模型

光束在非线性光学系统中传输可通过非线性薛定谔方程描述。考虑到分数衍射效应,模型可以改写为分数阶导数非线性薛定谔方程<sup>[38]</sup>,即

$$i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2k_0 n_0} (-\nabla_{\perp}^2)^{\alpha/2} A + k_0(n - n_0)A + k_0 n_{\text{NL}}(I)A = 0, \quad (1)$$

式中: $A(x, y, z)$ 为光场包络; $k_0 = 2\pi/\lambda$ 表示波数; $n_0$ 和 $\lambda$ 分别表示线性折射率系数和入射光的波长; $n(x, y)$ 为复函数,表示线性折射率调制和增益损耗效应, $x$ 和 $y$ 表示横向坐标; $z$ 表示光束的传输方向; $n_{\text{NL}}$ 表示非线性光学效应诱导的折射率; $I = |A|^2$

表示光场强度。分数阶导数的拉普拉斯算符 $-(\nabla_{\perp}^2)^{\alpha/2} = -(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^{\alpha/2}$ 表示分数衍射效应,其中 $\alpha$ 为莱维指数,取值范围为 $1 \leq \alpha \leq 2$ 。当莱维指数 $\alpha = 2$ 时,分数阶导数拉普拉斯算符退化为一般形式的拉普拉斯算符,此时,该算符的物理意义为传统的衍射效应。分数阶导数的拉普拉斯算符可以通过傅里叶变换定义为

$$\mathcal{F}\left[(-\nabla_{\perp}^2)^{\alpha/2} A(x, y)\right] = (k_x^2 + k_y^2)^{\alpha/2} \mathcal{F}\left[A(x, y)\right], \quad (2)$$

式中: $\mathcal{F}$ 表示傅里叶变换; $k_x$ 和 $k_y$ 表示波矢空间中的横向坐标。

本文将考虑自聚焦的饱和非线性效应,则式(1)中的非线性项可表示为 $n_{\text{NL}} = n_2 |A|^2 / (1 + s |A|^2)$ ,其中 $n_2$ 和 $s$ 分别表示非线性系数和饱和强度。对式(1)进行无量纲处理之后,可得

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} - (-\nabla_{\perp}^2)^{\alpha/2} \Psi + V(\xi, \eta) \Psi + \frac{|\Psi|^2 \Psi}{1 + S |\Psi|^2} = 0, \quad (3)$$

式中: $\Psi(\xi, \eta, \zeta) = (k_0 |n_2| L_D)^{1/2} A(x, y, z)$ ,  $L_D = 2k_0 n_0 \omega_0^2$ 表示衍射长度,其中 $\omega_0$ 表示入射光束的宽度; $\xi = x/\omega_0$ ,  $\eta = y/\omega_0$ ,  $\zeta = z/L_D$ 表示无量纲的横向坐标和传输方向; $S = s(k_0 |n_2| L_D)^{-1}$ 表示无量纲的饱和强度; $V(\xi, \eta) = 2k_0^2 n_0 \omega_0^2 [n(x, y) - n_0]$ 为无量纲的部分PT对称的势。

在式(3)中,考虑二维复数势为部分PT对称的形式<sup>[46]</sup>, $V(\xi, \eta)$ 关于横坐标 $\xi$ 满足PT对称性,而沿着 $\eta$ 方向是不对称的,即 $V^*(\xi, \eta) = V(-\xi, \eta)$ ,其具体形式为

$$V(\xi, \eta) = 3 \left[ \exp\left(-\frac{\xi - \xi_0}{W_0} - \frac{\eta - \eta_0}{W_0}\right) + \exp\left(-\frac{\xi + \xi_0}{W_0} - \frac{\eta - \eta_0}{W_0}\right) \right] + 2 \left[ \exp\left(-\frac{\xi - \xi_0}{W_0} - \frac{\eta + \eta_0}{W_0}\right) + \exp\left(-\frac{\xi + \xi_0}{W_0} - \frac{\eta + \eta_0}{W_0}\right) \right] + i2A_0 \left[ \exp\left(-\frac{\xi - \xi_0}{W_0} - \frac{\eta - \eta_0}{W_0}\right) - \exp\left(-\frac{\xi + \xi_0}{W_0} - \frac{\eta - \eta_0}{W_0}\right) \right] + iA_0 \left[ \exp\left(-\frac{\xi - \xi_0}{W_0} - \frac{\eta + \eta_0}{W_0}\right) - \exp\left(-\frac{\xi + \xi_0}{W_0} - \frac{\eta + \eta_0}{W_0}\right) \right]. \quad (4)$$

当式(4)的参数分别取值为 $\xi_0 = 2$ ,  $\eta_0 = 2$ ,  $W_0 = 2$ 和 $A_0 = 0.01$ 时,部分PT对称的势函数如图1所示。

式(3)中的分数衍射效应可通过法布里-珀罗谐振腔实现,其中插入两个透镜和两个相位掩模。第一个透镜将输入光束转换到傅里叶空间,再利用中心相位掩模将其置于傅里叶平面的位置;第二个透镜将输出的光束从傅里叶空间转换到实空间。

另外,在法布里-珀罗谐振腔中插入块状的饱和非线性介质,其中PT对称势的损耗效应通过饱和非线性介质吸收产生,增益效应通过光泵浦实现,进而可能观测到分数衍射的二维空间孤子和不对称解。

### 2.2 分析方法

为了寻求式(3)中的孤子解,将解的形式设为

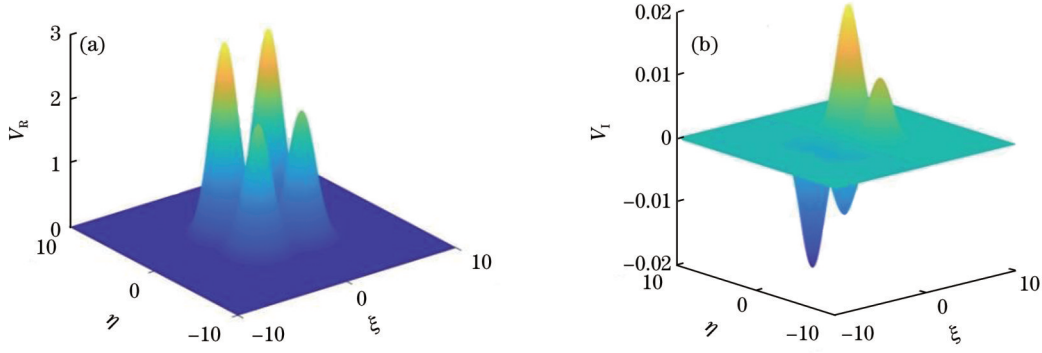


图1 部分PT对称势的图示。(a)势的实部;(b)势的虚部

Fig. 1 Illustration of partially PT-symmetric potential. (a) Real part of potential; (b) imaginary part of potential

$$\Psi(\xi, \eta, \zeta) = \psi(\xi, \eta) e^{i\beta\zeta}, \quad (5)$$

式中: $\beta$ 为传播常数。考虑一般的情况,传播常数为复数 $\beta = \beta_R + i\beta_I$ ,其中 $\beta_R$ 和 $\beta_I$ 分别表示实部和虚部。传播常数为实数时, $\psi(\xi, \eta)$ 满足

$$L_{00}\psi = \beta\psi; \quad (6)$$

传播常数为复数,且 $\beta_I$ 数量级达到 $10^{-2}$ 时,式(6)近似成立,其中

$$L_{00} = -(-\nabla_{\perp}^2)^{\alpha/2} + V(\xi, \eta) + \frac{|\psi|^2}{1 + S|\psi|^2}. \quad (7)$$

采用加速虚时演化算法<sup>[47]</sup>,数值求解式(6)并得到孤子解。将式(3)改写为

$$\psi_{\zeta} = M^{-1}[L_{00}\psi - \beta\psi], \quad (8)$$

式中: $M$ 为正定的自伴算符,选择合适的形式可以加快数值迭代的收敛速度,本文中选取 $M = 2 - \partial^2/\partial\xi^2 - \partial^2/\partial\eta^2$ 。加速虚时演化算法的迭代格式为

$$\hat{\psi}_{n+1} = \psi_n + M^{-1}(L_{00}\psi_n - \beta_n\psi_n)\Delta\zeta, \quad (9)$$

$$\beta_n = \frac{\langle L_{00}\psi_n, M^{-1}\psi_n \rangle}{\langle \psi_n, M^{-1}\psi_n \rangle}, \quad (10)$$

$$\psi_{n+1} = \hat{\psi}_{n+1} \sqrt{\frac{P_0}{\langle \hat{\psi}_{n+1}, \hat{\psi}_{n+1} \rangle}}, \quad (11)$$

式中: $P_0$ 表示预设的孤子功率。

为了判断虚时演化方法得到的孤子解是否稳定,需要对解进行稳定性分析。设式(3)的扰动解为

$$\Psi(\xi, \eta, \zeta) = e^{i\beta\zeta}[\psi(\xi, \eta) + u(\xi, \eta)e^{\delta\zeta} + v^*(\xi, \eta)e^{\delta^*\zeta}], \quad (12)$$

式中: $u(\xi, \eta)$ 和 $v(\xi, \eta)$ 表示微扰,且满足 $|u|, |v| \ll |\psi|$ 。将扰动解[式(12)]代入式(3)并进行线性化处理,可得以下本征问题

$$i \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (13)$$

其中矩阵元的具体形式为

$$l_{11} = -(-\nabla_{\perp}^2)^{\alpha/2} + V - \beta + \frac{2|\psi|^2}{1 + S|\psi|^2} - \frac{S|\psi|^4}{(1 + S|\psi|^2)^2}, \quad (14)$$

$$l_{12} = +\frac{\psi^2}{1 + S|\psi|^2} - \frac{S|\psi|^2\psi^2}{(1 + S|\psi|^2)^2}, \quad (15)$$

$$l_{21} = -\frac{\psi^2}{1 + S|\psi|^2} + \frac{S|\psi|^2\psi^2}{(1 + S|\psi|^2)^2}, \quad (16)$$

$$l_{22} = -(-\nabla_{\perp}^2)^{\alpha/2} - V + \beta - \frac{2|\psi|^2}{1 + S|\psi|^2} + \frac{S|\psi|^4}{(1 + S|\psi|^2)^2}. \quad (17)$$

式(13)的本征问题可以利用傅里叶配点法进行数值求解<sup>[48]</sup>,通常情况下 $\delta = \delta_R + i\delta_I$ 为复数的本征值,其中 $\delta_R$ 表示孤子解的线性不稳定增长率。若 $\delta_R = 0$ ,表明孤子解是线性稳定的。

### 3 数值结果分析

#### 3.1 部分PT对称孤子的对称破缺

图1所示的二维复势在 $\xi$ 方向满足PT对称性,而在 $\eta$ 方向为非对称的形式,通过虚时演化方法求解式(4)可以得到两类解。第一类解为孤子解,其传播常数 $\beta$ 为实数,解的形式在 $\xi$ 方向满足PT对称性,在 $\eta$ 方向为不对称的分布,所以称为部分PT对称孤子解。这类孤子解的传播常数随着孤子功率的增加,以离散的线性本征值为基点逐渐增大,进而形成连续的孤子族,其中孤子功率定义为 $P = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 d\xi d\eta$ 。第二类解为不对称形式的解,即解的形式即使在 $\xi$ 方向也不满足PT对称性。当孤子功率达到临界功率 $P_c$ 时,不对称的解出现,此时解对应的传播常数不再是实数而是复数的形式。

为了分析分数衍射效应对孤子解的影响,取不同的莱维指数分别研究孤子解的功率曲线。图2(a)、(b)

给出了传统衍射( $\alpha = 2$ )情况下, 孤子解和不对称解的功率曲线。图 2(c)~(f) 分别展示了两种不同分数衍射效应下孤子解和不对称解的功率曲线。图 2(c)、(d) 表示莱维指数  $\alpha = 1.5$  时, 即莱维指数大小为传统衍射和分数衍射极限值的中间值的情况下, 孤子解和不对称解的功率曲线的实部和虚部。图 2(e)、(f) 表示莱维指数取值为分数衍射极限值, 即  $\alpha = 1.0$  时, 孤子解和不对称解的功率曲线的实部和虚部。图 2(a)、(c)、(e) 中蓝色实线代表稳定的部分 PT 对称孤子 (SS2), 蓝色点线表示不稳定的部分 PT 对称孤子 (SS1), 红色虚线表示不对称的解 (AS)。

图 2(a)、(c)、(e) 中, 孤子的临界功率分别为  $P_c \approx 1.626$ 、 $P_c \approx 0.998$  和  $P_c \approx 0.409$ , 不对称解传播常数的虚部与孤子功率之间的关系如图 2(b)、(d)、(f) 所示,

可以看到, 不对称解的复传播常数具有共轭关系。当孤子功率小于临界功率时, 仅存在稳定的部分 PT 对称孤子; 当孤子功率大于临界功率时, 稳定的部分 PT 对称孤子转变为不稳定的部分 PT 对称孤子和不对称解。不对称解的功率曲线逐渐分离, 并与不稳定的部分 PT 对称孤子的功率曲线形成功率曲线分叉。类似于传统的孤子对称破缺, 图 2(a)、(c)、(e) 中功率曲线分叉说明部分 PT 对称孤子发生了自发对称破缺, 不同的是传统孤子对称破缺之后转化为稳定的不对称孤子, 而部分 PT 对称孤子发生对称破缺之后所产生的不对称解不稳定。通过比较图 2(a)、(c)、(e) 中部分 PT 对称孤子发生对称破缺的临界功率, 发现临界功率随着莱维指数的减小而降低, 当莱维指数减小为  $\alpha = 1.0$  时, 临界功率降为  $P_c \approx 0.409$ 。

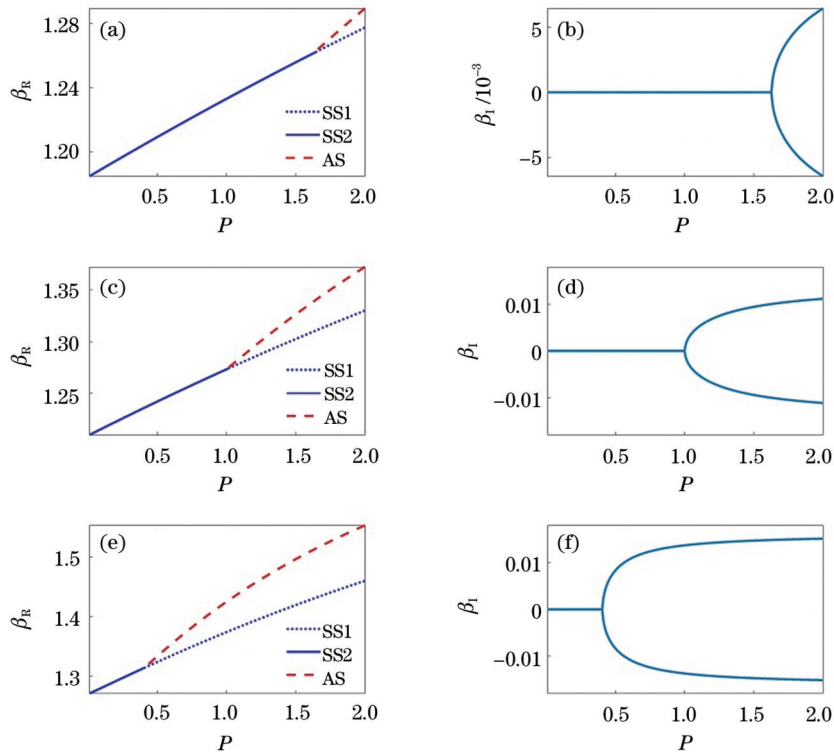


图 2 不同莱维指数下部分 PT 对称孤子的对称破缺分叉图。(a)(b) 莱维指数  $\alpha = 2.0$  时传播常数的实部和虚部; (c)(d)  $\alpha = 1.5$  时传播常数的实部和虚部; (e)(f)  $\alpha = 1.0$  时传播常数的实部和虚部

Fig. 2 Symmetry breaking bifurcation diagrams of partially PT-symmetric solitons with different values of Lévy indexes. (a)(b) Real and imaginary parts of propagation constant for  $\alpha = 2.0$ ; (c)(d) real and imaginary parts of propagation constant for  $\alpha = 1.5$ ; (e)(f) real and imaginary parts of propagation constant for  $\alpha = 1.0$

图 3 所示为部分 PT 对称孤子和不对称解的场分布。图 3(a1)~(a3) 分别为孤子功率  $P = 0.5$  时部分 PT 对称孤子的实部、虚部和振幅分布, 图 3(b1)~(b3) 分别为孤子功率  $P = 1.5$  时部分 PT 对称孤子的实部、虚部和振幅分布。部分 PT 对称孤子完全遵循式 (4) 中势函数的对称性, 即  $\xi$  方向满足 PT 对称性, 而  $\eta$  方向为不对称的分布。图 3(c1)~(c3) 分别为孤子功率  $P = 1.5$  时不对称解的实部、虚部和振幅分布, 其形式在  $\xi$  方向和  $\eta$  方向均为不对称分布。

### 3.2 分数衍射效应对自发对称破缺的影响

为了分析分数衍射效应对自发对称破缺的影响, 以 0.1 为间隔逐渐改变莱维指数, 计算部分 PT 对称孤子和不对称解的功率曲线。图 4(a)、(b) 分别给出了功率曲线的实部和虚部, 临界功率  $P_c$  随莱维指数的变化如图 4(c) 所示, 其中圆圈表示竖直虚线所示的莱维指数对应的临界功率。由图 4(c) 可知, 部分 PT 对称孤子发生自发对称破缺的临界功率  $P_c$  随着莱维指数  $\alpha$  的减小而线性地减小, 这表明分数衍射效应的增强导

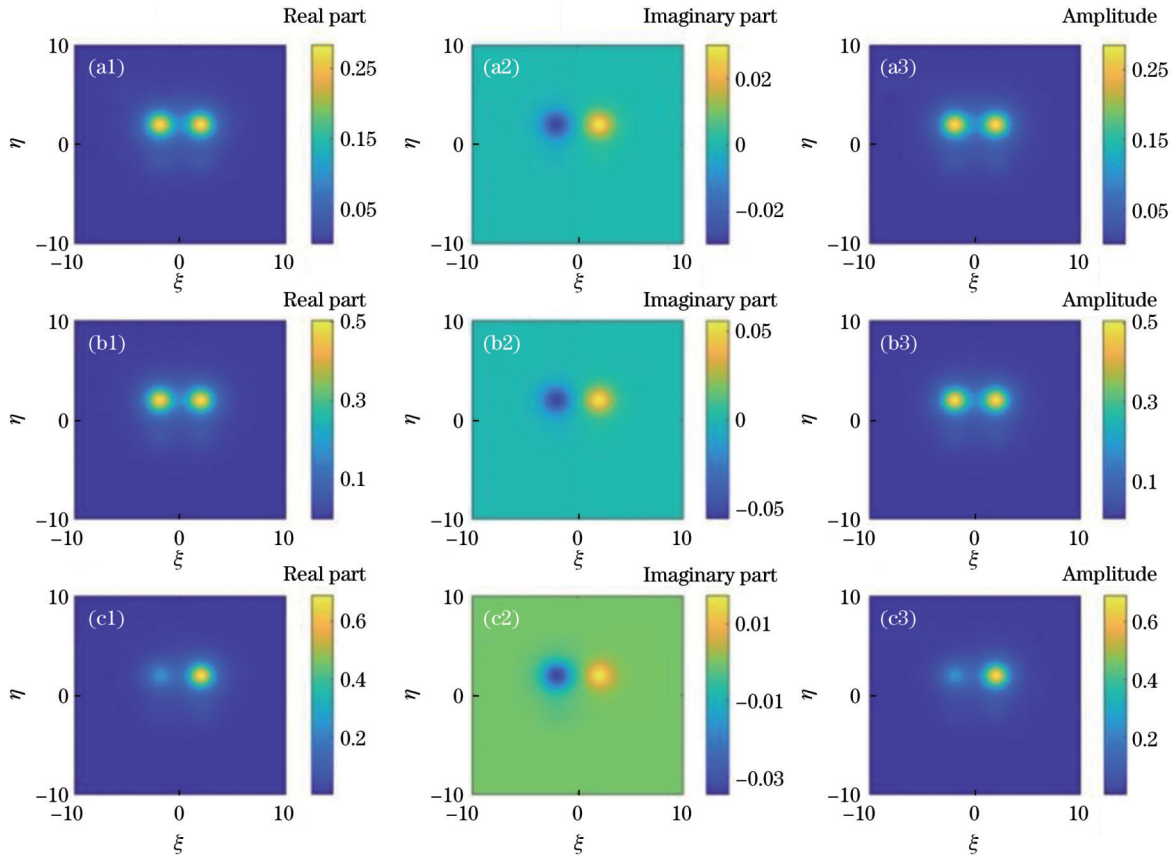


图 3 莱维指数  $\alpha = 1.5$ , 不同孤子功率的部分 PT 对称孤子及对称破缺解。(a1)~(a3) 孤子功率  $P = 0.5$  的部分 PT 对称孤子实部、虚部和振幅;(b1)~(b3) 孤子功率  $P = 1.5$  的部分 PT 对称孤子实部、虚部和振幅;(c1)~(c3) 孤子功率  $P = 1.5$  的对称破缺解实部、虚部和振幅

Fig. 3 Partially PT-symmetric solitons and symmetry breaking solutions corresponding to different values of soliton powers with  $\alpha = 1.5$ . (a1)–(a3) Real part, imaginary part, and amplitude profiles of partially PT-symmetric solitons at  $P = 0.5$ ; (b1)–(b3) real part, imaginary part, and amplitude profiles of partially PT-symmetric solitons at  $P = 1.5$ ; (c1)–(c3) real part, imaginary part, and amplitude profiles of symmetry breaking solution at  $P = 1.5$

致部分 PT 对称孤子在更低的孤子功率情况下就可以发生对称破缺。

由图 4(a)、(b)可知,部分 PT 对称孤子发生自发对称破缺现象与一维模型不同<sup>[49-50]</sup>,一维 PT 对称孤子发生对称破缺时所产生的复传播常数的不对称解只在分数衍射中存在,而二维部分 PT 对称孤子发生对称破缺之后产生的不对称解在传统衍射情况下传播常数仍然是复数。

对称孤子的自发对称破缺与自身的稳定性转变紧密相关,接下来利用线性稳定性分析方法研究部分 PT 对称孤子的稳定性。通过傅里叶配点法对式(13)进行数值求解,进而得到部分 PT 对称孤子的线性稳定性本征谱  $\delta$ 。线性稳定性谱的实部  $\delta_R$  表征孤子解的线性不稳定增长率,因此线性不稳定增长率的最大值表示最大不稳定增长率,即  $\text{Max}(\delta_R)$ 。部分 PT 对称孤子的最大不稳定增长率随莱维指数和孤子功率变化的关系如图 5(a)所示,可以看到,部分 PT 对称孤子的稳定范围随着莱维指数减小而缩小。为了进一步分析部分 PT 对称孤子发生对称破缺的临界功率与稳定性之间

的关系,在图 5(b)中给出了参数  $(\alpha, P)$  平面上临界功率  $P_c$  与部分 PT 对称孤子不稳定边界之间的关系。由图 5(b)可知,在  $\alpha$ - $P$  组成的参数平面内,部分 PT 对称孤子的不稳定边界与临界功率  $P_c$  完全重合,这说明不对称解的出现是由部分 PT 对称孤子的稳定性发生转变所导致的。此外,由于不对称解的传播常数为复数,因此不对称解均不稳定。

### 3.3 部分 PT 对称孤子和不对称解的传输特性

为了进一步分析部分 PT 对称孤子和不对称解的传输特性,利用分步傅里叶算法对光束的传输过程进行数值模拟。初始输入光束的形式为

$$\Psi(\xi, \eta, \zeta = 0) = \psi(\xi, \eta) [1 + \varepsilon \varphi(\xi, \eta)], \quad (18)$$

式中:  $\varphi(\xi, \eta)$  表示幅值小于 1 的均匀分布随机函数,用于模拟传输过程中的噪声;参数  $\varepsilon$  表示扰动的强度。

首先,选取最大不稳定增长率为 0 的部分 PT 对称孤子,其线性稳定性谱如图 6(a)所示。根据式(18)的扰动形式,对初始输入孤子施加一定大小的随机扰动来模拟传输过程中的噪声干扰。施加过大的随机扰动

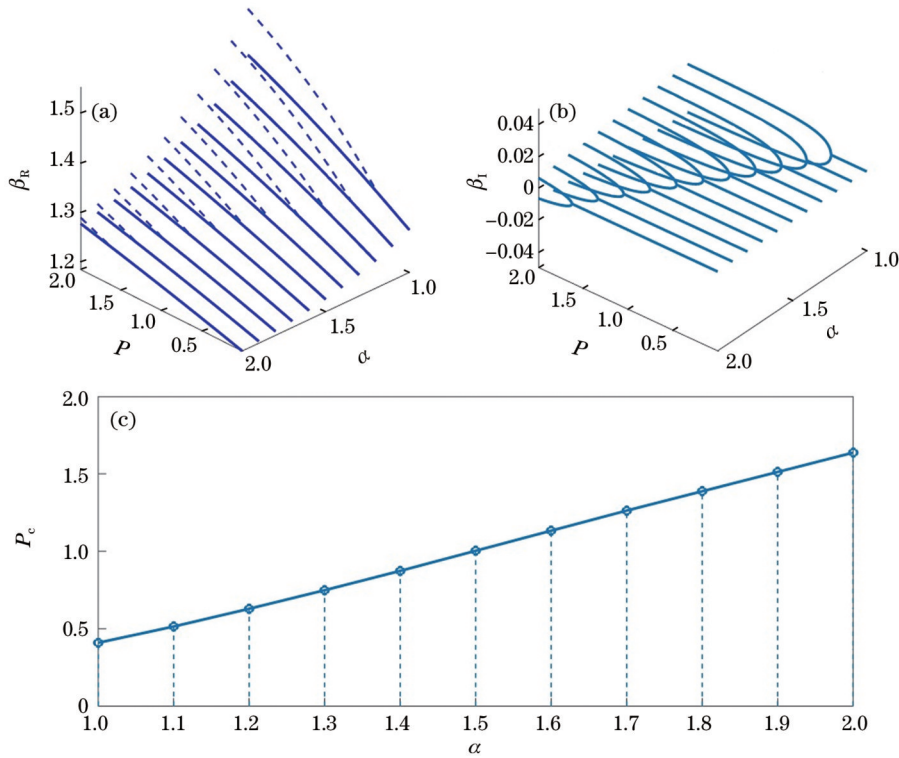


图 4 不同莱维指数下的功率曲线。(a)功率曲线的实部随莱维指数的变化;(b)功率曲线的虚部随莱维指数的变化;(c)临界功率随莱维指数的变化,其中圆圈表示竖直虚线所示莱维指数对应的临界功率

Fig. 4 Power curves at different Lévy indexes. (a) Real part of power curve changes with Lévy index; (b) imaginary part of power curve changes with Lévy index; (c) critical power changes with Lévy index, where the circles represent critical power corresponding to Lévy index shown by vertical dotted line

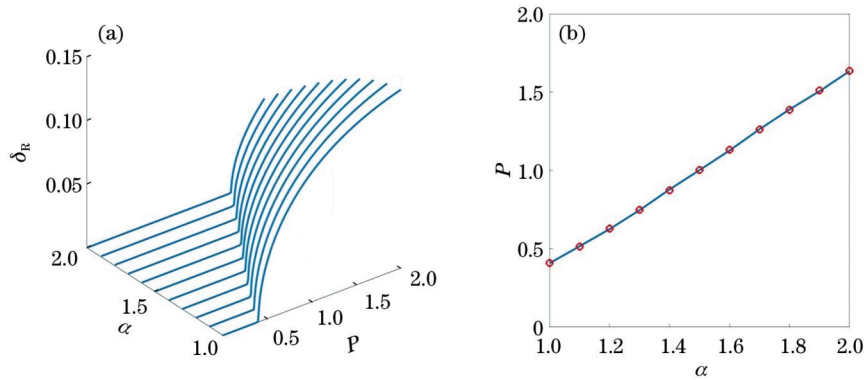


图 5 不稳定增长率和不稳定边界。(a)部分 PT 对称孤子的最大不稳定增长率随莱维指数和孤子功率的变化;(b)在  $\alpha$ - $P$  参数平面内部分 PT 对称孤子的不稳定边界,圆圈表示孤子对称破缺的临界功率

Fig. 5 Unstable growth rates and unstable boundary. (a) Maximum unstable growth rate of partially PT-symmetric soliton changes with Lévy index and soliton power; (b) unstable boundary of partially PT-symmetric solitons in the parameter plane of  $\alpha$ - $P$ , the circles represent critical power of symmetry breaking of the partially PT-symmetric solitons

可能导致孤子的振幅在传输过程中发生明显的振荡,进而难以判断孤子传输不稳定的具体影响因素,而随机扰动的强度太小则难以证实孤子稳定性,因此本文选取中等强度的随机扰动,即扰动强度为输入孤子最大振幅的 5%。图 6(b)~(d)分别给出了部分 PT 对称孤子初始输入以及传输距离  $\zeta = 500$  和  $\zeta = 1000$  时的输出结果。图 6(e)展示了光场强度随传输距离的变化情况,图 6(f)通过强度等值面的形式展示了部分

PT 对称孤子的稳定传输。图 6(e)、(f)的结果进一步验证了线性稳定性分析的有效性,同时证实了孤子在传输过程中能够抗干扰,且具有一定的鲁棒性。

接下来,分析不稳定增长率大于 0 的部分 PT 对称孤子,其线性稳定性谱如图 7(a)所示。类似地,对初始输入的孤子施加强度为 5% 的扰动,并模拟其传输过程。图 7(b)~(d)表明,部分 PT 对称孤子在传输过程中形态发生了变化。通过分析图 7(e)发现,光场强

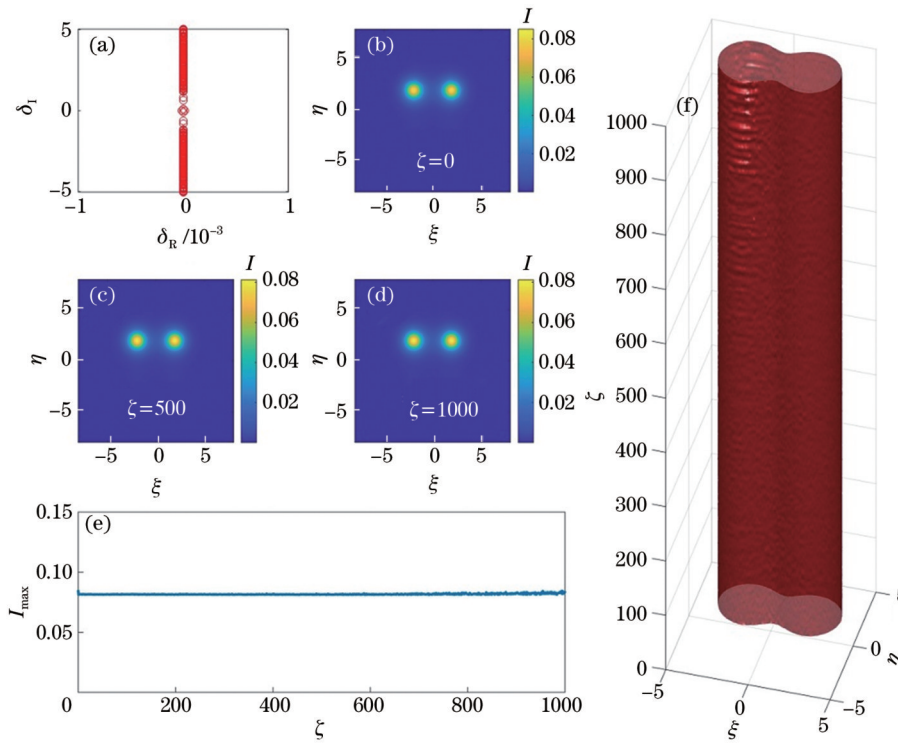


图 6 稳定的部分 PT 对称孤子传输图, 参数取值为  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.24$  和  $P = 0.5$ 。(a) 线性稳定谱; (b)~(d) 不同传输距离时孤子的光场强度; (e) 光场强度随传输距离的变化; (f) 孤子稳定传输的等值面图 (等值面的光场强度为 0.06)

Fig. 6 Evolution of stable partially PT-symmetric soliton with  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.24$ , and  $P = 0.5$ . (a) Spectrum of linear stability analysis; (b)~(d) intensity of soliton at different transmission distances; (e) dependence of intensity of the soliton on transmission distances; (f) stable evolution is displayed by iso-intensity surface (value of iso-intensity is 0.06)

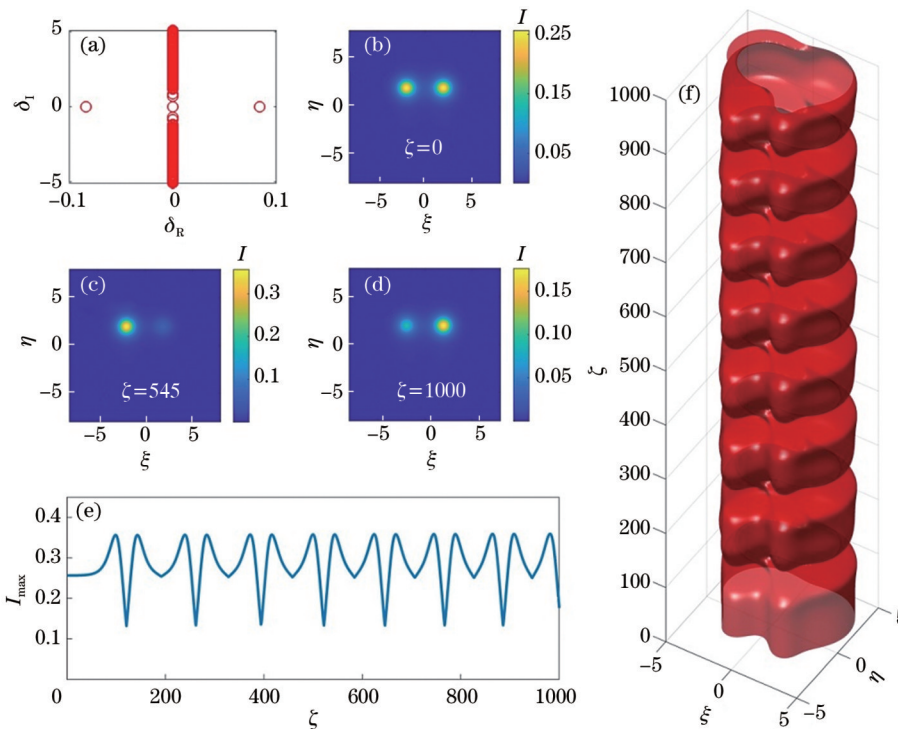


图 7 不稳定的部分 PT 对称孤子传输图, 参数取值为  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.3$  和  $P = 1.5$ 。(a) 线性稳定谱; (b)~(d) 不同传输距离时部分 PT 对称孤子的光场强度; (e) 孤子的光场强度随传输距离的变化; (f) 孤子不稳定传输的等值面图 (等值面的光场强度为 0.03)

Fig. 7 Evolution of the unstable partially PT-symmetric soliton with  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.3$ , and  $P = 1.5$ . (a) Spectrum of linear stability analysis; (b)~(d) intensity of soliton at different transmission distances; (e) dependence of intensity of the soliton on transmission distances; (f) unstable evolution is displayed by iso-intensity surface (the value of iso-intensity is 0.03)

度随传输距离周期性振荡,近似的振荡周期长度为  $T_\zeta \approx 130$ 。图 7(f)所示的强度等值面表明该孤子在传输过程中不稳定,并形成了呼吸结构。

最后,讨论不对称解的传输特性,其线性稳定性谱如图 8(a)所示。在传输过程中未施加扰动,图 8(b)~(d)表明不对称解在传输过程中形态发生明显变化。

进一步分析图 8(e),发现随着传输距离的增加,不对称解的光场强度先逐渐增大,经过一次振荡后光场强度逐渐减小。图 8(f)直观地表明不对称解在传输过程中完全不稳定,这是因为不对称解的传播常数为复数,因此光场强度和光场分布在传输过程中随着传输距离的增加而不断变化。

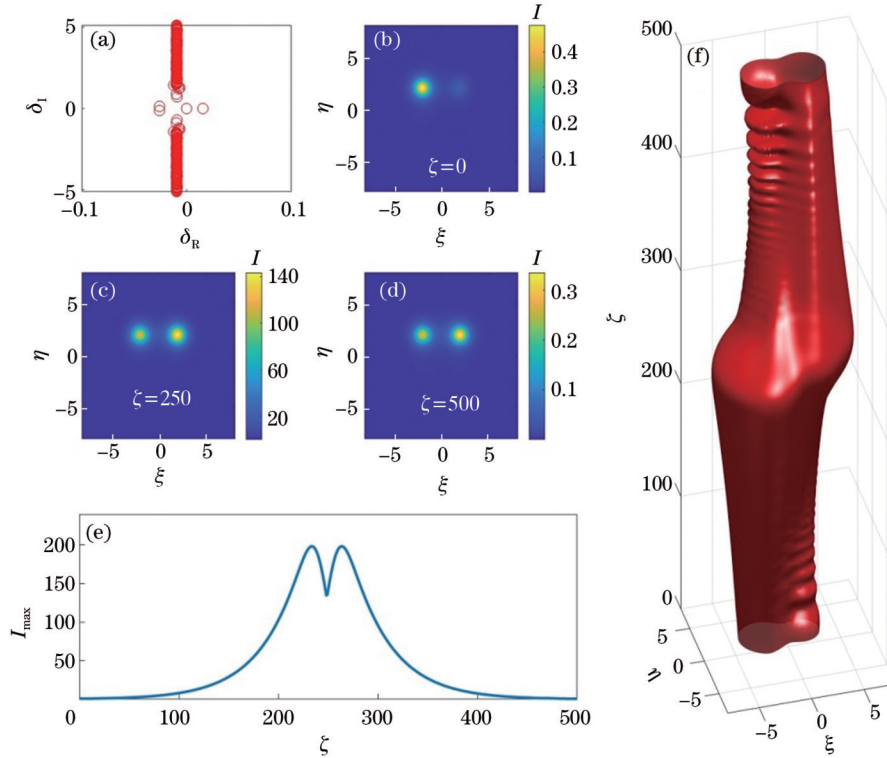


图 8 对称破缺解的传输图,参数取值为  $\alpha = 1.5$ 、 $\beta = 1.33 - i0.009$  和  $P = 1.5$ 。(a)对称破缺解的线性稳定谱;(b)~(d)不同传输距离时对称破缺解的光场强度;(e)对称破缺解的光场强度随传输距离的变化;(f)对称破缺解不稳定传输的等值面图(等值面的光场强度为 0.07)

Fig. 8 Evolution of symmetry breaking solution with  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.33 - i0.009$ , and  $P = 1.5$ . (a) Spectrum of linear stability analysis of symmetry breaking solution; (b)~(d) intensity of symmetry breaking solution at different transmission distances; (e) dependence of intensity of symmetry breaking solution on transmission distances; (f) unstable evolution is displayed by iso-intensity surface (the value of iso-intensity is 0.07)

## 4 结 论

研究了二维部分 PT 势中孤子的存在性、稳定性、自发对称破缺现象及其传输特性。通过数值求解得到两类解:第一类解为孤子解,传播常数为实数,解的对称性与二维的部分 PT 势一致;第二类解为不对称解,传播常数为复数。部分 PT 对称孤子发生自发对称破缺的临界功率  $P_c$  随着莱维指数  $\alpha$  的减小而减小,莱维指数  $\alpha$  从 2 减小至 1,导致部分 PT 对称孤子发生自发对称破缺的临界功率  $P_c$  由 1.6 降低至 0.4,因此分数衍射效应的增强导致部分 PT 对称孤子在更低的孤子功率情况下发生自发对称破缺。孤子功率大小和分数衍射效应的强弱都会改变部分 PT 对称孤子的稳定性,孤子功率超过临界功率,导致部分 PT 对称孤子由稳定转为不稳定。此外,由于不对称解的传播常数为复

数,因此不对称解全部不稳定。部分 PT 对称孤子发生自发对称破缺现象不同于二维 PT 对称孤子,二维部分 PT 对称孤子发生对称破缺之后,二维的不对称解即使在传统衍射情况下传播常数仍然为复数。通过对部分 PT 对称孤子传输过程的数值模拟,发现线性稳定性分析所得到的稳定部分 PT 对称孤子具有鲁棒性,而线性稳定性分析结果为不稳定的部分 PT 对称孤子的振幅在传输过程中周期性振荡。在传输过程中不对称解的振幅和形态随着传输距离的增加而发生明显的变化。

本文的研究结果一方面阐明了具有分数衍射效应的非厄米非线性光波导中孤子的存在形式和自发对称破缺机制,另一方面在光孤子传输和调控方面有潜在的应用价值。此外,相关结果对分数阶 Gross-Pitaevskii 方程的研究有一定的启发意义。



## 参 考 文 献

- [1] Lazopoulos K A, Lazopoulos A K. Fractional vector calculus and fluid mechanics[J]. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 2017, 26(38): 43-54.
- [2] Benson D A, Meerschaert M M, Revieille J. Fractional calculus in hydrologic modeling: a numerical perspective[J]. *Advances in Water Resources*, 2013, 51: 479-497.
- [3] Hobiny A, Abbas I. The effect of a nonlocal thermoelastic model on a thermoelastic material under fractional time derivatives[J]. *Fractal and Fractional*, 2022, 6(11): 639.
- [4] Jalil-Abadi F S, Habibiyan H, Khavasi A. Tunable spatial fractional derivatives with graphene-based transmit arrays[J]. *Optics Express*, 2023, 31(8): 12572-12584.
- [5] Sehra, Sadia H, Haq S U, et al. Time fractional Yang-Abdel-Cattani derivative in generalized MHD Casson fluid flow with heat source and chemical reaction[J]. *Scientific Reports*, 2023, 13: 16494.
- [6] Ionescu C, Lopes A, Copot D, et al. The role of fractional calculus in modeling biological phenomena: a review[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, 51: 141-159.
- [7] Herrmann R. Fractional calculus: an introduction for physicists [M]. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2014.
- [8] Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics[M]. Singapore: World Scientific, 2000.
- [9] Laskin N. Fractional Schrödinger equation[J]. *Physical Review E*, 2002, 66(5): 056108.
- [10] Laskin N. Fractional quantum mechanics[J]. *Physical Review E*, 2000, 62(3): 3135-3145.
- [11] Laskin N. Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals [J]. *Physics Letters A*, 2000, 268(4/5/6): 298-305.
- [12] Dong J P, Xu M Y. Some solutions to the space fractional Schrödinger equation using momentum representation method [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2007, 48(7): 072105.
- [13] de Oliveira E C, Vaz J, Jr. Tunneling in fractional quantum mechanics[J]. *Journal of Physics A*, 44(18): 185303.
- [14] Luchko Y. Fractional Schrödinger equation for a particle moving in a potential well[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2013, 54(1): 012111.
- [15] Żaba M, Garbaczewski P. Solving fractional Schrödinger-type spectral problems: Cauchy oscillator and Cauchy well[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2014, 55(9): 092103.
- [16] Tare J D, Esguerra J P H. Transmission through locally periodic potentials in space-fractional quantum mechanics[J]. *Physica A*, 2014, 407: 43-53.
- [17] Stickler B A. Potential condensed-matter realization of space-fractional quantum mechanics: the one-dimensional Lévy crystal [J]. *Physical Review E*, 2013, 88(1): 012120.
- [18] Longhi S. Fractional Schrödinger equation in optics[J]. *Optics Letters*, 2015, 40(6): 1117-1120.
- [19] Liu S L, Zhang Y W, Malomed B A, et al. Experimental realisations of the fractional Schrödinger equation in the temporal domain[J]. *Nature Communications*, 2023, 14: 222.
- [20] Zhang Y Q, Liu X, Belić M R, et al. Propagation dynamics of a light beam in a fractional Schrödinger equation[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(18): 180403.
- [21] Zhang Y Q, Zhong H, Belić M R, et al. Diffraction-free beams in fractional Schrödinger equation[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 23645.
- [22] Zhang D, Zhang Y Q, Zhang Z Y, et al. Unveiling the link between fractional Schrödinger equation and light propagation in honeycomb lattice[J]. *Annalen Der Physik*, 2017, 529(9): 1700149.
- [23] 肖燕, 王鹏翔, 郭腾, 等. 分数效应下双艾里-高斯光束在高斯势中的传输[J]. *中国激光*, 2021, 48(20): 2005002.
- Xiao Y, Wang P X, Guo T, et al. Propagation of dual Airy-Gaussian beams in Gaussian potential under fractional effect[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2021, 48(20): 2005002.
- [24] Huang X W, Shi X H, Deng Z X, et al. Potential barrier-induced dynamics of finite energy Airy beams in fractional Schrödinger equation[J]. *Optics Express*, 2017, 25(26): 32560-32569.
- [25] Zhang L F, Li C X, Zhong H Z, et al. Propagation dynamics of super-Gaussian beams in fractional Schrödinger equation: from linear to nonlinear regimes[J]. *Optics Express*, 2016, 24(13): 14406-14418.
- [26] Zhang F, Wang Y, Li L. Dynamics of Gaussian beam modeled by fractional Schrödinger equation with a variable coefficient[J]. *Optics Express*, 2018, 26(18): 23740-23750.
- [27] 房立芝, 宋丽军, 陈胜杰. 分数系统中势垒对啁啾高斯光束的影响[J]. *光学学报*, 2022, 42(13): 1319001.
- Fang L Z, Song L J, Chen S J. Influence of potential barriers on chirped Gaussian beams in fractional system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2022, 42(13): 1319001.
- [28] Huang C M, Dong L W. Beam propagation management in a fractional Schrödinger equation[J]. *Scientific Reports*, 2017, 7: 5442.
- [29] Zhang Y Q, Wang R, Zhong H, et al. Optical Bloch oscillation and Zener tunneling in the fractional Schrödinger equation[J]. *Scientific Reports*, 2017, 7: 17872.
- [30] Zhang Y Q, Wang R, Zhong H, et al. Resonant mode conversions and Rabi oscillations in a fractional Schrödinger equation[J]. *Optics Express*, 2017, 25(26): 32401-32410.
- [31] Li S R, Bao Y Y, Liu Y H, et al. Bright solitons in fractional coupler with spatially periodical modulated nonlinearity[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, 162: 112484.
- [32] Zeng L W, Zhu Y L, Malomed B A, et al. Quadratic fractional solitons[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, 154: 111586.
- [33] Wang J F, Jin Y, Gong X G, et al. Generation of random soliton-like beams in a nonlinear fractional Schrödinger equation [J]. *Optics Express*, 2022, 30(5): 8199-8211.
- [34] Bao Y Y, Li S R, Liu Y H, et al. Gap solitons and nonlinear Bloch waves in fractional quantum coupler with periodic potential [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, 156: 111853.
- [35] Wang Q, Zhang L L, Malomed B A, et al. Transformation of multipole and vortex solitons in the nonlocal nonlinear fractional Schrödinger equation by means of Lévy-index management[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, 157: 111995.
- [36] Li P F, Malomed B A, Mihalache D. Symmetry breaking of spatial Kerr solitons in fractional dimension[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, 132: 109602.
- [37] Zhou S, Zeng J H, Qin Y L. Asymmetric localized states at a nonlinear interface of fractional systems with optical lattices[J]. *Frontiers in Physics*, 2023, 10: 1116344.
- [38] Yao X K, Liu X M. Solitons in the fractional Schrödinger equation with parity-time-symmetric lattice potential[J]. *Photonics Research*, 2018, 6(9): 875-879.
- [39] Konotop V V, Yang J K, Zezyulin D A. Nonlinear waves in PT-symmetric systems[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2016, 88(3): 035002.
- [40] 党婷婷, 王娟芬. 高斯型 PT 对称波导中高斯光波的控制[J]. *光学学报*, 2020, 40(3): 0319001.
- Dang T T, Wang J F. Control of Gaussian optical waves in Gaussian parity-time symmetric waveguide[J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(3): 0319001.
- [41] 傅廷, 王宇飞, 王学友, 等. 基于 PT 对称和超对称的微结构激光器件[J]. *中国激光*, 2021, 48(12): 1201005.
- Fu T, Wang Y F, Wang X Y, et al. Microstructure lasers based on parity-time symmetry and supersymmetry[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2021, 48(12): 1201005.
- [42] 易凌俊, 李长红. 基于宇称-时间对称结构的磁光调制器[J]. *光学学报*, 2022, 42(2): 0223001.

- Yi L J, Li C H. Mag-optical modulator based on parity-time symmetric structure[J]. *Acta Optica Sinica*, 2022, 42(2): 0223001.
- [43] 赵政春, 文兵, 邓杨保, 等. 艾里-高斯光束在高斯型PT对称介质中的传输与控制[J]. *激光与光电子学进展*, 2023, 60(15): 1519001.
- Zhao Z C, Wen B, Deng Y B, et al. Propagation and control of Airy-gaussian beams in Gaussian parity-time symmetric media [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2023, 60(15): 1519001.
- [44] 宋益飞, 舒叶滔, 唐鹏, 等. 一维四元周期性PT对称结构中的光学简并点调控研究[J]. *中国激光*, 2023, 50(22): 2213001.
- Song Y F, Shu Y T, Tang P, et al. Optical degenerate points regulation in one-dimensional quaternary periodic PT symmetric structure[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2023, 50(22): 2213001.
- [45] 刘承浩, 曹怡青, 唐霞辉, 等. 耗散孤子共振脉冲光纤激光器研究现状及进展[J]. *中国激光*, 2022, 49(21): 2100002.
- Liu C H, Cao Y Q, Tang X H, et al. Research status and progress of dissipative soliton resonance pulsed fiber lasers[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2022, 49(21): 2100002.
- [46] Yang J K. Partially PT symmetric optical potentials with all-real spectra and soliton families in multidimensions[J]. *Optics Letters*, 2014, 39(5): 1133-1136.
- [47] Yang J K, Lakoba T I. Accelerated imaginary-time evolution methods for the computation of solitary waves[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 2008, 120(3): 265-292.
- [48] Yang J K. *Nonlinear waves in integrable and nonintegrable systems*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.
- [49] Li P F, Malomed B A, Mihalache D. Symmetry-breaking bifurcations and ghost states in the fractional nonlinear Schrödinger equation with a PT-symmetric potential[J]. *Optics Letters*, 2021, 46(13): 3267-3270.
- [50] Zhong M, Wang L, Li P F, et al. Spontaneous symmetry breaking and ghost states supported by the fractional PT-symmetric saturable nonlinear Schrödinger equation[J]. *Chaos*, 2023, 33(1): 013106.

## Symmetry Breaking of Partially PT-Symmetric Solitons in Fractional Diffraction Systems

Zhai Yuanbo<sup>1</sup>, Li Rujiang<sup>2</sup>, Li Pengfei<sup>1,3\*</sup>

<sup>1</sup>*Department of Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, Shanxi, China;*

<sup>2</sup>*Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology, Xidian University, Xi'an 710071, Shaanxi, China;*

<sup>3</sup>*Institute of Computational and Applied Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, Shanxi, China*

### Abstract

**Objective** Fractional diffraction effects and various novel phenomena produced by parity-time (PT) symmetric optics systems have become research hotspots in the field of optics. A large amount of theoretical research has proven the existence of the optical soliton in the fractional nonlinear Schrödinger equation containing PT-symmetric potentials. However, the existence, stability, and dynamics of partially PT-symmetric solitons in non-Hermitian nonlinear optical waveguides with fractional diffraction effect have not been explored yet. The phenomenon and mechanism of spontaneous symmetry breaking of the partially PT-symmetric solitons are still unclear. Meanwhile, the obtained research results provide new insights into the propagation and controlling of the partially PT-symmetric solitons in the non-Hermitian nonlinear optical waveguides with fractional diffraction.

**Methods** We numerically solve partially PT-symmetric soliton solutions and asymmetric solutions. Specifically, the accelerated imaginary time evolution method is used to solve the stationary fractional nonlinear Schrödinger equation. Two types of solutions are obtained. The first type is the partially PT-symmetric solitons with real propagation constants, and the second is the asymmetric solutions with complex propagation constants. Then, the solutions of the perturbation are linearized through linear stability analysis, and the eigenvalue problem of the perturbation modes is transformed into the spectral space by using the Fourier collocation method. The spectrum of the eigenvalue problem of the perturbation modes is numerically solved. The propagations of the partially PT-symmetric solitons and the asymmetric solutions are numerically simulated using the split-step Fourier method. Finally, the obtained results are compared with the results of linear stability analysis.

**Results and Discussions** First, two types of solutions are confirmed to exist in the fractional nonlinear Schrödinger equation with the partially PT-symmetric potential. The first type of solution is the partially PT-symmetric solitons with real propagation constants, and the second type of solution is the asymmetric solutions with complex propagation constants. The results are shown in Fig. 2 and Fig. 3, respectively. Then, the critical power of the symmetry breaking bifurcation point of the partially PT-symmetric solitons is numerically determined and verified with the linear stability

analysis, and the results are shown in Fig. 4(c) and Fig. 5(b), respectively. The reduction of the Lévy index from 2 to 1 causes the critical power of the spontaneous symmetry breaking for the partially PT-symmetric solitons to decrease from 1.6 to 0.4. The numerical simulations of the transmissions of the partially PT-symmetric solitons and the asymmetric solutions are shown in Fig. 6, Fig. 7, and Fig. 8, respectively. It is found that the stable partially PT-symmetric solitons obtained by linear stability analysis are robust, as shown in Fig. 6. The amplitude oscillates periodically during the propagations for the unstable partially PT-symmetric solitons in Fig. 7. In Fig. 8, the amplitude and light field distribution of the asymmetric solution change significantly.

**Conclusions** In summary, the partially PT-symmetric optical solitons and spontaneous symmetry breaking phenomenon in the fractional nonlinear Schrödinger equation are numerically studied. The research results show that there exist partially PT-symmetric solitons. The soliton power exceeds the critical value, and the partially PT-symmetric solitons turn into the asymmetric state. The enhanced fractional diffraction effect weakens the stability of the partially PT-symmetric solitons, and then spontaneous symmetry breaking occurs under the smaller soliton power. The critical power of the partially PT-symmetric soliton decreases to 0.409, when the Lévy index decreases to 1. The stable partially PT-symmetric solitons are robust and can be transmitted stably up to 1000 times the diffraction length, even in the presence of the perturbation. The research results of this work may be used to control optical solitons in the non-Hermitian nonlinear optical waveguides with fractional diffraction.

**Key words** nonlinear optics; symmetry breaking; fractional nonlinear Schrödinger equation; partially parity-time symmetry