

基于网格梯度和形状因子的自由曲面透镜设计

陆建东^{1,2**}, 陈嘉文¹, 刘锐¹, 马佩服^{1*}, 李纲¹¹浙江工业大学理学院, 浙江 杭州 310023;²杭州心海光联科技有限公司, 浙江 杭州 310005

摘要 采用基于梯度和形状因子的网格优化方法适配能量分布并提升映射关系的可积性,在光源投影单位圆和目标面内分别进行等量初始四边形网格划分,使节点一一对应,并构建网格面积和映射关系可积性的权重评价函数。在保证所有节点位置拓扑关系不变的条件下,通过面积差场梯度和形状因子迭代调整网格分布,使映射关系满足能量分布要求同时优化可积性。基于网格优化的映射关系求解自由曲面并生成透镜,仿真所得非均匀光斑满足设计要求。该方法简化了平滑映射关系的求解过程,可以作为一种高效设计方法用于非均匀自由曲面透镜设计。

关键词 光学设计; 非成像光学; 可积映射关系; 拓扑守恒; 等面保形

中图分类号 O435

文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS231601

1 引言

随着定制化需求的涌现,光学设计要求也逐步从点光源到拓展光源,从二维转变为三维,从均匀转变为非均匀,使用范围更广的同时自由曲面设计难度也不断变大^[1-3]。光学设计方法众多,部分方法可以很好地解决任意照度分布的三维设计问题。目前,主要的自由曲面设计方法为优化法、几何法、数学法^[4-6]。优化法作为一种最常用的自由曲面设计方法,通过定义优化变量来表征自由曲面,再利用评价函数作为变量优化的评判标准,多次迭代进而满足最终设计要求。几何法主要借助曲面的几何性质来实现,以该类设计方法最具代表性的支撑二次曲面法(SQM)^[7-9]为例,SQM借助二次曲面如抛物面、椭球面和笛卡儿卵形面等曲面的光学特性,极大简化了映射关系的建立过程,根据能量守恒定律将预定照明问题转化为利用冒泡法求解由一组子面组成的包络面的问题^[10]。需要注意的是,该包络面虽然保证了离散点的目标效果,但得到的自由曲面本身是不光滑的。后续可以通过代入正交多项式插值作平滑优化处理,但引入了插值工作,导致计算量较大的问题^[11]。数学法主要从能量守恒和斯涅尔定律出发,通常通过联立数学方程的形式来构建光源与目标面的映射关系,通过求解数学方程得到自由曲面参数。吴仍茂团队基于Monge-Ampère(MA)类椭圆型偏微分方程,将满足照明设计要求的自由曲面转变成求解MA方程并给出具体求解过程,2023年该团队实现了三维空间中不同维度的3个目标面的特定照

明分布^[12]。近年来,有学者将深度学习用于非成像设计^[4,13-14],通过神经网络模型训练获得较好的初始结构,减轻了设计者的重复劳动。

常见的三维设计方法的难点在于构建映射关系,如网格划分方法通过人为构建映射关系来求解光学曲面,设计算法简单、计算量小,是常用的设计方法之一。网格划分方法用于二维设计时效果较好,但是三维情况下由于映射关系不可积,曲面存在不连续部分,所得光斑与理想光斑偏差较大^[15-16]。不少人提出了各自的优化方法,这些方法通常需要获得仿真结果,通过分析仿真结果与理想分布的偏差,通过调整能量分布或者移动焦点的方式进行迭代优化^[17-18]。

朱正波等^[19-20]提出了基于最优传输理论的映射关系求解方法。基于能量守恒关系和边界条件,同样将问题转化为构建MA方程,并构建能量传输代价函数,使得映射关系的最优解满足MA方程并使代价函数最小,但此方法的模型也偏复杂。本文提出一种基于等面保形思想的网格优化方法,在保证节点位置拓扑关系不变的情况下通过面积差场梯度和形状因子优化网格分布,使映射满足能量关系并提升其可积性。所提优化算法可以获得接近理想的映射关系分布,设计过程简单,效果良好,适用于非均匀矩形光斑透镜设计。

2 基本原理

2.1 映射及可积性评价

非成像光学设计的三大要素为:光源、目标分布、映射关系。在光源选定且目标分布确定的情况下,需

收稿日期: 2023-09-25; 修回日期: 2023-11-27; 录用日期: 2023-12-13; 网络首发日期: 2023-12-23

通信作者: *mpf208@163.com; **lujdzjut@163.com

要通过映射关系来计算器件的光学曲面,使得光源发出的光线经器件后在目标面上形成所需的特定照度分布。映射关系可表示为

$$E_s(\theta, \phi) \xrightarrow{f} E_t(x, y), \quad (1)$$

式中: f 为映射函数;光源 s 发出的角度为 (θ, ϕ) 的光线与目标面 t 的 (x, y) 位置对应; E 表示光线能量。在求解 MA 方程的过程中,映射关系隐含在能量守恒关系中并且该映射关系自动满足可积性条件。但在网格划分方法中,需要人为给定映射函数或者离散的对应关系。矩形光斑的映射关系^[21]通常在对角或顶点处存在分界,其可积性被破坏,所求的曲面并不连续光滑,实际照度分布与预期结果明显偏离。

为了避免常见映射关系的分界,后续采用图 1 所示的网格划分方式。将光源发光半球投影至 u - v 平面并作横纵划分与矩形目标面对应。

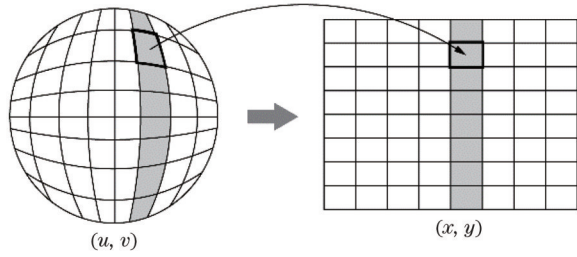


图 1 横纵网格划分

Fig. 1 Horizontal and vertical grid division

横纵划分方法需要对能量分布和可积性进行优化。可积性条件是指根据映射关系求解的自由曲面,其法向量场 N 与自身旋度的乘积为 0, 曲面连续光滑^[22]可以表示为

$$N \cdot (\nabla \times N) = 0. \quad (2)$$

式(2)需要求解曲面法向量场后才可判定可积性,效率较低。为了通过映射函数直接判断可积性,根据连续可导是函数可积的充分条件,将映射函数可积性问题引申为映射函数沿任意方向连续可导的问题,则在映射关系定义域 $\{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 1\}$ 内任意一点 (u, v) , 可通过式(3)判断:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_x}{\partial l^+} \Big|_{(u,v)} + \frac{\partial f_x}{\partial l^-} \Big|_{(u,v)} = 0 \\ \frac{\partial f_y}{\partial l^+} \Big|_{(u,v)} + \frac{\partial f_y}{\partial l^-} \Big|_{(u,v)} = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

式中: f_x, f_y 表示目标面坐标 (x, y) 分别关于变量 (u, v) 的二元映射函数。式(3)表示沿任意方向 l 的双向方向导数均存在且互为相反数。通常网格划分给定的映射关系是离散且变量不分离的,为了评估映射关系的可积性,根据式(3)可定义可积性评价函数 G 为

$$G = \sum [\delta_{i,j}(x) + \delta_{i,j}(y)], \quad (4)$$

式中: i, j 表示网格节点序号; $\delta(x)$ 和 $\delta(y)$ 分别表示 f_x 和 f_y 在该点的方向导数双向残值。对于光源投影面上一点 $(u_{i,j}, v_{i,j})$, 有

$$\begin{cases} \delta_{i,j}^{\text{row}}(x) = \frac{f_x(u_{i+1,j}, v_{i+1,j}) - f_x(u_{i,j}, v_{i,j})}{\sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (v_{i+1,j} - v_{i,j})^2}} + \frac{f_x(u_{i-1,j}, v_{i-1,j}) - f_x(u_{i,j}, v_{i,j})}{\sqrt{(u_{i-1,j} - u_{i,j})^2 + (v_{i-1,j} - v_{i,j})^2}} \\ \delta_{i,j}^{\text{col}}(x) = \frac{f_x(u_{i,j+1}, v_{i,j+1}) - f_x(u_{i,j}, v_{i,j})}{\sqrt{(u_{i,j+1} - u_{i,j})^2 + (v_{i,j+1} - v_{i,j})^2}} + \frac{f_x(u_{i,j-1}, v_{i,j-1}) - f_x(u_{i,j}, v_{i,j})}{\sqrt{(u_{i,j-1} - u_{i,j})^2 + (v_{i,j-1} - v_{i,j})^2}} \\ \delta_{i,j}(x) = |\delta_{i,j}^{\text{row}}(x)| + |\delta_{i,j}^{\text{col}}(x)| \end{cases}, \quad (5)$$

式中: 上标 row 和 col 表示横向和纵向。双向残值为方向倒数的横纵绝对值之和,同理可得 $\delta_{i,j}(y)$ 。 G 越小,表示映射函数整体可积性越好。

2.2 能量分布与梯度优化

如前所述,需要对光源和目标面分别进行等量横纵网格划分,使二者节点一一对应,则可确定光线和目标面之间的位置关系。光源和目标分布之间的通量对应关系可由网格的面积确定。根据能量守恒定律和边界条件,能量传输关系可表示为

$$\left\{ \begin{aligned} \iint_s I(\theta, \phi) d\Omega &= \iint_t E(x, y) dA \\ \partial s &\rightarrow \partial t \end{aligned} \right. \quad (6)$$

如图 2 所示,基于朗伯点光源,在单位半球内,立体角所围区域 dA_1 对应的通量占比等于立体角在 u - v 平面的投影 dA_2 面积与单位圆面积之比^[10]。

一般情况下,对光源作等面积划分,目标面根据预期照度分布按照面积反比关系进行划分。假设预期面积分布为 \bar{A} , 当前面积分布为 A , 对于凸四边形网格,其中

$$A_{i,j} = \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin \alpha, \quad (7)$$

式中: l_1, l_2 为两对角线长度; α 为对角线锐夹角。式(7)表示序号为 i, j 的网格的面积。定义面积差场 D 为

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \cdots & D_{1,M} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & \cdots & D_{2,M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{N,1} & D_{N,2} & \cdots & D_{N,M} \end{bmatrix}, \\ D = A - \bar{A} \end{array} \right. \quad (8)$$

式中: N, M 表示网格规格。根据式(8), 定义面积评价函数为

$$H = \sum |D_{i,j}| \quad (9)$$

结合式(4), 定义综合评价函数为

$$Q = a_1 H + a_2 G, \quad (10)$$

式中: a_1 为面积权重因子; a_2 为可积性权重因子。本文令 $a_1 + a_2 = 1$ 。当 $Q \rightarrow 0$ 时, 映射关系既满足通量分布, 又满足可积性条件。

初始网格分布通常不符合预期, 对于网格节点 P , 其面积优化后的点位 P' 为

$$\begin{cases} P' = P + \sigma \cdot \eta \\ \eta = \nabla D \end{cases}, \quad (11)$$

式中: η 表示面积差场 D 的梯度场; σ 为优化步长。对于离散场 D 内部节点的梯度, 可用中心差分表示为

$$\eta_{i,j} = \left(\frac{D_{i+1,j} - D_{i-1,j}}{2} \right) e_i + \left(\frac{D_{i,j+1} - D_{i,j-1}}{2} \right) e_j \quad (12)$$

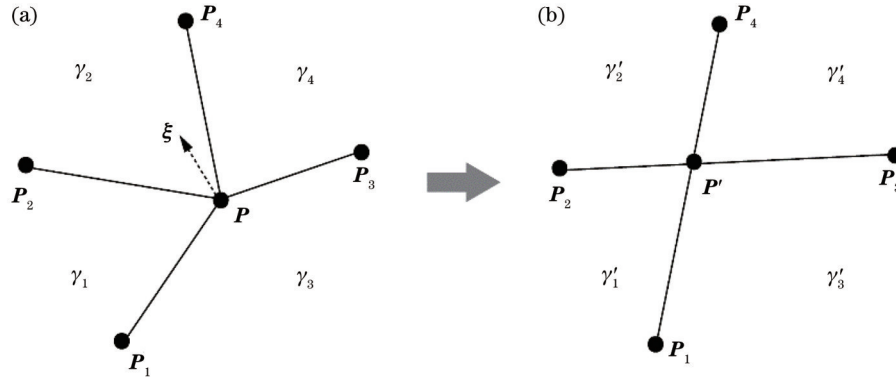


图 3 网格节点形状调整。(a) 调整前; (b) 调整后

Fig. 3 Shape adjustment of grid nodes. (a) Before adjustment; (b) after adjustment

根据可积性评价条件, $P_{i,j}$ 点的横纵双向导数差越小, $P_{i,j}$ 点的可积性越好, 表示 $P_{i,j}$ 点附近映射函数沿两个方向都是连续光滑的。由式(5)可知, 当 $P_{i,j}$ 与边缘点近似在同一直线且距离较小时, 可积性较好, 如图 3(b) 所示。

$P_{i,j}$ 与相邻 4 点的连线所成夹角分别为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, 当可积性最佳时, 有

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = \pi \\ \gamma_1 + \gamma_3 = \pi \end{cases}, \quad (13)$$

表示任意相邻两角互补。根据式(13), 定义形状因子矢量为

$$\xi_{i,j} = \sin(\gamma_1 - \gamma_2) e_i + \sin(\gamma_1 - \gamma_3) e_j, \quad (14)$$

其可扩展为形状因子矢量场 ξ 。结合式(11), 优化后

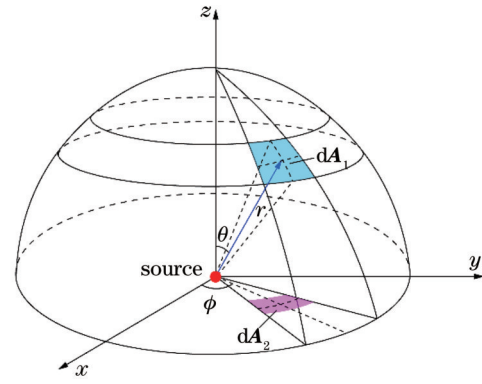


图 2 网格面积与通量占比

Fig. 2 Grid area and flux ratio

对于边界节点, 根据其位置使用前向或后向差分替代。

2.3 位置拓扑与形状控制

为了在网格优化过程中提升映射关系的可积性, 在优化面积的同时还兼顾网格形状。根据流线定理, 结合 2.1 节的讨论, 对网格内任意节点 $P_{i,j}$ 进行讨论, 假设其与边缘相邻 4 点的关系如图 3(a) 所示。

的点 P' 为

$$P' = P + \sigma(a_1 \eta + a_2 \xi). \quad (15)$$

另外, 应附加如下限制条件: 1) P' 与相邻点的位置拓扑关系不变; 2) 任意相邻 4 点连线所围四边形为凸四边形; 3) 对于边界点, P' 位置应仍在边界上。

3 分析与讨论

为了验证以上方法的有效性, 设计了一个非均匀矩形光斑透镜, 适配朗伯光源能够在目标面上显示出斜体“ZJUT”字样, 字体部分照度是背景部分照度的 2 倍, 光学系统中光源、自由曲面透镜及目标面中心位置处于同一光轴上, 具体参数如表 1 所示。需要注意的是, 该自由曲面透镜材料为 PMMA 材质。

表 1 非均匀矩形光斑设计参数

Table 1 Design parameters for non-uniform rectangular spot

Source		Target			Other		
Size / (mm×mm)	Angle / (°)	Length /mm	Width /mm	Distance /mm	Number of grids	Refractive index n	Given height /mm
1×1	45	1000	500	500	100×50	1.4935	15

首先,在光源圆区域内划分等能量网格,初始网格采用 elliptical grid mapping 公式划分,经调试优化,步长选择为 10,可积性权重取 0.001,经过迭代生成的网格如图 4(a)所示。基于光源网格,在目标面上按照照度反比划分,初始网格采用横纵均匀划分,在综合评价函数指导下,通过当前网格面积与理想面积之差的梯度场和形状因子矢量场作用优化网格分布,经调试优化,步长选择 0.02,可积性权重取 0.5,经过迭代生成的网格如图 4(b)所示。

对迭代过程中光源和目标面的能量分布、可积性、

综合评价函数进行归一化处理,结果如图 5 所示。在迭代过程中,随着迭代次数的增加,面积评价函数明显下降,光源可积性逐渐优化但下降较缓慢。结合图 4 可注意到边缘特别是四角部分网格形状不佳,是由圆区域限制导致的,预期光斑边缘部分会有轻微偏差。由于目标网格为适配能量分布不再均匀,目标可积性评价函数随着迭代次数的增加先上升后趋于稳定,相比于初始网格,其可积性变差。综合评价函数的变化趋势与面积评价函数基本一致,三者最终均趋于稳定,这是能量分布和可积性达成基于权重的均衡。

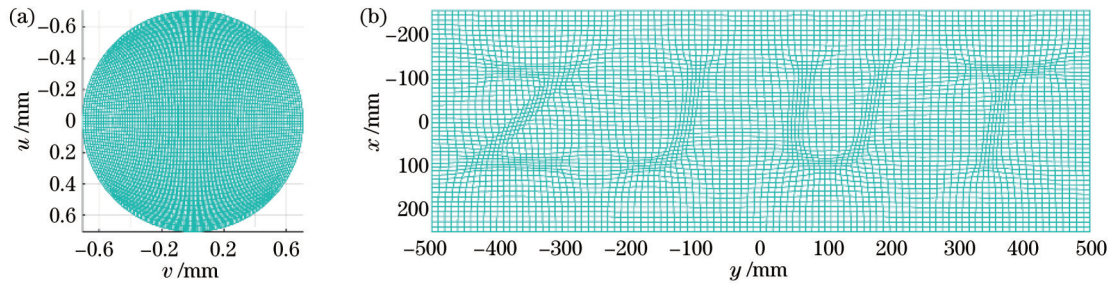


图 4 光源和目标面网格。(a)光源网格;(b)目标网格

Fig. 4 Source grids and target grids. (a) Source grid; (b) target grid

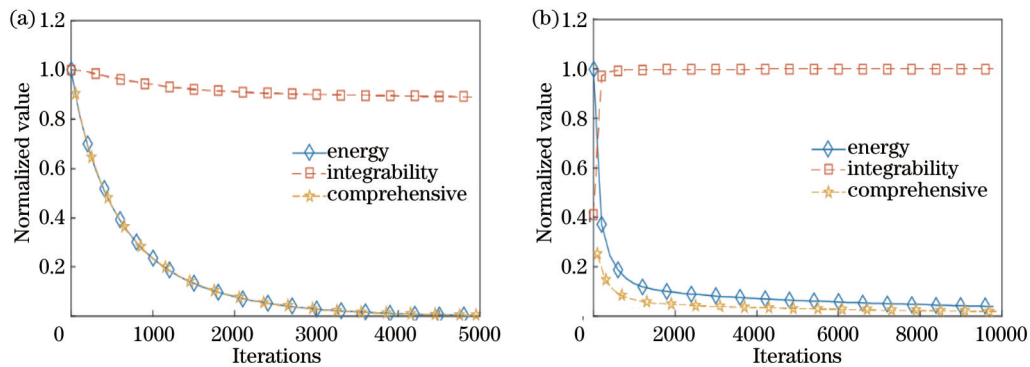


图 5 评价函数变化。(a)光源评价函数变化;(b)目标评价函数变化

Fig. 5 Changes of evaluation function. (a) Change of source evaluation function; (b) change of target evaluation function

使用表 1 所示参数搭建的光学系统如图 6(a)所示;基于此映射关系,可通过最小二乘法求解自由曲面至曲面收敛^[23],如图 6(b)所示。

将自由曲面导入 3D 软件,底部以光源位置为圆心、半径为 7.5 mm 进行旋转切除得到进光孔,生成透镜,在光学仿真软件 TracePro 中按表 1 参数设置光源、透镜和目标面,追迹光线在目标面上的辐照图像如图 7 所示。

从图 7 可以看出,基于网格优化方法生成的映射关系设计透镜,其仿真效果符合预期。矩形光斑整体

形状保持良好,边缘及四角部分有轻微缺陷,内部字体与背景部分边界清晰,字体照度与背景照度近似保持 2:1 的比例。当前规格映射关系的整体计算时间约 8 min,实际优化步长控制较小,还有一定提升空间。

4 结 论

在网格划分方法的基础上,提出一种基于等面保形的映射关系优化方法,该方法将能量分布和可积性的综合评价函数作为依据,并在面积差场梯度和形状因子矢量场的共同作用下通过迭代逐步优化,使映射

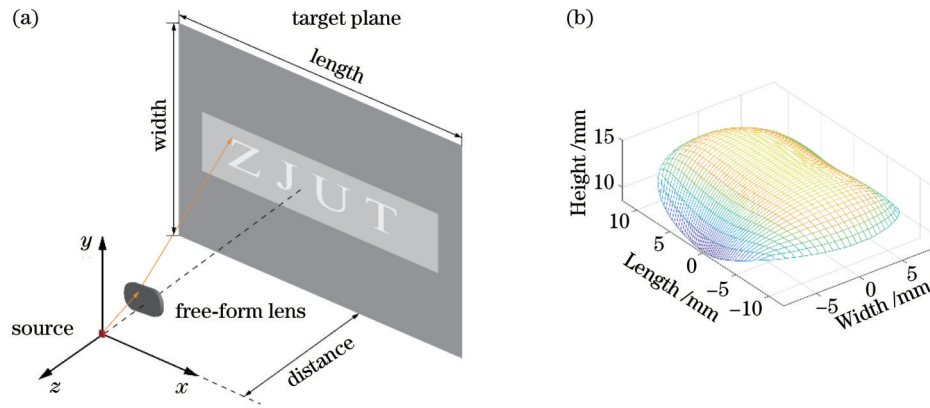


图 6 光学系统。(a) 光学系统示意图；(b) 自由曲面
Fig. 6 Optical system. (a) Schematic of optical system; (b) free-form surface

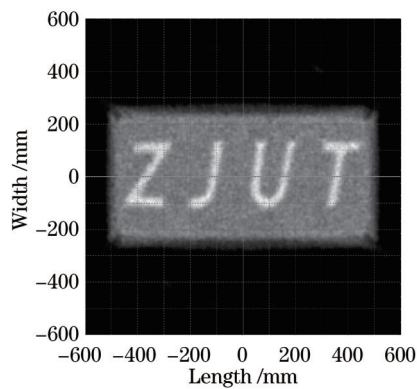


图 7 仿真结果
Fig. 7 Simulation result

关系在满足能量分布要求的情况下具有较好的可积性。对于通过映射关系求解的透镜,经仿真确认其能够实现预期的光斑和照度分布,边缘部分出现轻微缺陷但在可接受的误差范围内,整体设计效率也有较大的提升。综上,该方法虽然在边缘处理以及对非朗伯光源上仍有优化空间,但设计方法简单,设计效果良好,有望在非均匀光斑设计等定制化领域发挥重要作用。

参 考 文 献

- [1] 杨通, 段璎哲, 程德文, 等. 自由曲面成像光学系统设计: 理论、发展与应用[J]. 光学学报, 2021, 41(1): 0108001.
Yang T, Duan Y Z, Cheng D W, et al. Freeform imaging optical system design: theories, development, and applications [J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(1): 0108001.
- [2] 刘亮志, 郭亮, 陈志涛, 等. 基于负焦距透射结构的自由曲面准直透镜设计[J]. 激光与光电子学进展, 2022, 59(17): 1722005.
Liu L Z, Guo L, Chen Z T, et al. Design of collimating lens with freeform surfaces based on negative focal length transmission structure[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2022, 59(17): 1722005.
- [3] 张文裕, 苏宙平. 基于二维面加权叠加的扩展 LED 光源自由曲面透镜设计[J]. 激光与光电子学进展, 2022, 59(11): 1122003.

- Zhang W Y, Su Z P. Design of free-form surface lens of extended LED light source based on two-dimensional surface shape weighted superposition[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2022, 59(11): 1122003.
- [4] 张航, 陈嘉文, 胡月姣, 等. 基于深度学习和程能映射的自由配光设计[J]. 光学学报, 2022, 42(10): 1022003.
Zhang H, Chen J W, Hu Y J, et al. Freeform light distribution design based on deep learning and length-energy mapping[J]. Acta Optica Sinica, 2022, 42(10): 1022003.
- [5] 詹浣湫. 基于自由曲面的照明系统设计方法研究与分析[D]. 南京: 南京信息工程大学, 2023.
Zhan H Q. Research and analysis of lighting system design method based on freeform surface[D]. Nanjing: Nanjing University of Information Science and Technology, 2023.
- [6] Feng Z X, Cheng D W, Wang Y T. Iterative freeform lens design for prescribed irradiance on curved target[J]. Opto-Electronic Advances, 2020, 3(7): 200010.
- [7] Olikier V. Controlling light with freeform multifocal lens designed with supporting quadric method (SQM) [J]. Optics Express, 2017, 25(4): A58-A72.
- [8] Bykov D A, Doskolovich L L, Byzov E V, et al. Supporting quadric method for designing refractive optical elements generating prescribed irradiance distributions and wavefronts[J]. Optics Express, 2021, 29(17): 26304-26318.
- [9] Mingazov A A, Bykov D A, Bezuza E A, et al. On the use of the supporting quadric method in the problem of designing double freeform surfaces for collimated beam shaping[J]. Optics Express, 2020, 28(15): 22642-22657.
- [10] 陆建东. 基于 SQM 自由光学曲面的正交多项式曲面光滑化研究[D]. 杭州: 浙江工业大学, 2018.
Lu J D. Orthogonal polynomials surface smoothing based on the free-form optical surfaces from SQM[D]. Hangzhou: Zhejiang University of Technology, 2018.
- [11] 张航, 陆建东, 刘锐, 等. 基于 Zernike 多项式光滑优化的均匀方斑透镜设计[J]. 激光与光电子学进展, 2018, 55(10): 102202.
Zhang H, Lu J D, Liu R, et al. Design of uniform square spot lens based on smooth optimization of Zernike polynomials[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(10): 102202.
- [12] 沈凡琪, 杨琳, 吴仍茂, 等. 自由曲面光束调控 Monge-Ampère 方法研究进展[J]. 光学学报, 2023, 43(8): 0822010.
Shen F Q, Yang L, Wu R M, et al. Research progress on Monge-Ampère equation method for designing freeform beam-shaping optics[J]. Acta Optica Sinica, 2023, 43(8): 0822010.
- [13] Nie Y F, Zhang J G, Su R M, et al. Freeform optical system design with differentiable three-dimensional ray tracing and unsupervised learning[J]. Optics Express, 2023, 31(5): 7450-7465.

- [14] Zhang H, Ma P F, Chen J W, et al. Nonimaging optical design with supporting quadric method and deep neural network[J]. Recent Patents on Engineering, 2022, 16(6): 94-99.
- [15] Ma D L, Feng Z X, Liang R G. Freeform illumination lens design using composite ray mapping[J]. Applied Optics, 2015, 54(3): 498-503.
- [16] Bösel C, Gross H. Ray mapping approach for the efficient design of continuous freeform surfaces[J]. Optics Express, 2016, 24(13): 14271-14282.
- [17] 赵伟, 刘旭, 李海峰. 基于自由曲面阵列的激光投影显示照明系统设计[J]. 光学学报, 2018, 38(6): 0622001.
Zhao W, Liu X, Li H F. Design of laser projection display illumination system based on freeform surface array[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(6): 0622001.
- [18] Luo Y, Feng Z X, Han Y J, et al. Design of compact and smooth free-form optical system with uniform illuminance for LED source[J]. Optics Express, 2010, 18(9): 9055-9063.
- [19] 朱正波. 基于自由曲面的照明光学设计方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2021.
- Zhu Z B. Research on the optics design method of freeform illumination[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2021.
- [20] Wei S L, Zhu Z B, Ma D L. Efficient and compact freeform optics design for customized LED lighting[J]. Optics & Laser Technology, 2023, 167: 109775.
- [21] Liu D H, Zhang X H, Chen C. Free-form lens for rectangular illumination with the target plane rotating at a certain angle[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2015, 32(11): 1958-1963.
- [22] Desnijder K, Hanselaer P, Meuret Y. Ray mapping method for off-axis and non-paraxial freeform illumination lens design[J]. Optics Letters, 2019, 44(4): 771-774.
- [23] Feng Z X, Froese B D, Liang R G. Freeform illumination optics construction following an optimal transport map[J]. Applied Optics, 2016, 55(16): 4301-4306.

Freeform Lens Design Based on Gradient and Shape Factor of Grids

Lu Jiandong^{1,2**}, Chen Jiawen¹, Liu Rui¹, Ma Peifu^{1*}, Li Gang¹

¹College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, Zhejiang, China;

²Hangzhou Xinhaiguanglian Technology Co., Ltd., Hangzhou 310005, Zhejiang, China

Abstract

Objective The optical design with arbitrary illuminance distribution is always a key concern of non-imaging optics due to its difficulty in solving the smooth mapping relationship. At present, the Monge-Ampère equation method, the supporting quadratic method (SQM), and the tailor method can solve this problem, but they all have drawbacks such as complex ideas and difficult manufacture. To seek a simple and efficient method, we start with mapping grids partitioning, and study the characteristic and optimization method of the integrability and energy matching of grids, providing references for the design of non-uniform freeform lenses.

Methods The discussed mapping grid partitioning method is shown in Fig. 1. Equal initial quadrilateral grids are performed within the unit circle of source projection and the rectangular target plane to make the grid nodes correspond one by one. According to the relationship in Fig. 2, the energy is calculated by the grid area, and the area evaluation function is constructed based on the difference between the grid area and the ideal one. The integrability evaluation function is constructed based on the direction derivative residual of the nodes, and the weights are set according to the design. Under the guidance of the evaluation function, gradient operation is performed on the area difference to solve the area optimization vectors, and integrability optimization vectors are solved by the simplified node angle relationship in Fig. 3 and are combined based on the weights. The nodes are moved according to the comprehensive vectors and subjected to boundary conditions and topological conservation relationships. New grids are generated and a new value of the evaluation function is calculated. When the value tends towards 0, the energy matching and integrability of the mapping are improved.

Results and Discussions To verify the effectiveness of the method, we design a freeform lens that can display a non-uniform rectangular spot with the words "ZJUT" on the target. The effective angle of the source is set to 45° and initial grids are made within the corresponding projection circle and target plane, with the final result shown in Fig. 4. According to Fig. 5, the area evaluation rapidly decreases during the iteration, and the integrability evaluation of the source also significantly reduces. However, as the grid is no longer uniform to fit the energy distribution, the integrability evaluation of the target has increased compared to the evaluation at the beginning. The trend of the comprehensive evaluation function is consistent with the area evaluation, and the overall energy distribution and integrability are ultimately balanced based on weights. The final simulation results are shown in Fig. 7, and the illumination ratio of the words to the background is 2 : 1, which is in line with the design. The font's boundary is clear, and the overall rectangular boundary maintains sound. There are slight defects in the four corners, which can be attributed to the poor integrability of the four corners of the light

source grid.

Conclusions Based on the grid partitioning, a mapping optimization method is proposed. This method constructs a comprehensive evaluation function for energy distribution and integrability, and optimizes the mapping through iteration under the combined effect of area difference gradient and integrability optimization vectors to make the mapping have good integrability and meet the energy distribution. The lens solved via mapping has been simulated and confirmed that the spot achieves the expected shape and illumination, with slight defects on the edge. There has also been a significant improvement in design efficiency. In summary, although this method still has optimization space in boundary and non-Lambert sources, its method is simple, with sound effect and improved design efficiency. Meanwhile, it is expected to play a role in customized fields such as non-uniform spot design.

Key words optical design; non-imaging optics; integrable mapping relationship; topological conservation; equal area and shape preservation