

基于 Bootstrap 方法的鬼成像系统图像信息重构 不确定度估计

朱凯旋^{1,2,3}, 胡晨昱^{1,3*}, 喻虹^{1,3}, 韩申生^{1,2,3}

¹中国科学院上海光学精密机械研究所量子光学重点实验室, 上海 201800;

²中国科学院大学材料与光电研究中心, 北京 100049;

³中国科学院大学杭州高等研究院物理与光电工程学院, 浙江 杭州 310024

摘要 提出使用统计分析中的 Bootstrap 方法对鬼成像中图像信息重构的不确定度进行估计。仿真结果表明, Bootstrap 方法估计的标准误差分布图与强度关联重构的标准误差理论计算结果一致; 用标准 Bootstrap 方法估计的标准误差和置信区间分布能够很好地解释压缩感知算法得到的重构结果误差, 并且使用相应的 Bootstrap 方法的变种能够更为准确地描述从原始样本中重构图像信息的偏差和绝对误差。所提方案适用于估计无真实参考图像的实际应用场景的重构图像的不确定度。

关键词 成像系统; 鬼成像; 图像重构; 非参数 Bootstrap 方法; 不确定度

中图分类号 O436; O213 **文献标志码** A

DOI: 10.3788/AOS222122

1 引言

鬼成像是一种区别于传统光学成像的新型成像方式, 它利用时空涨落光场调制成像目标, 并通过光场高阶关联函数提取图像信息^[1-3]。尽管鬼成像最初以使用纠缠光源的量子成像方式出现^[4-5], 但后续的若干理论和实验研究表明, 经典光源也能够用于实现鬼成像^[6-7]。由于经典光源相比量子光源更为普遍, 使用热光的鬼成像受到广泛关注和研究, 并被用于许多成像领域, 如遥感成像^[8-9]、三维成像^[10-11]、光谱成像^[12-13]、偏振成像^[14-15]、X 光成像^[16-17]等。

目前, 鬼成像的研究主要聚焦于对其成像能力的原理验证和实验演示上。而作为一种光学成像体制, 对具体场景信息的成像误差不确定度和置信度, 是鬼成像在具体应用领域中进一步推广时所要考虑的重要问题^[18]。由于鬼成像的图像信息获取模式是“所见非所得”的, 所以其中想要的图像信息需要通过计算重构得到, 已有的重构算法大致可以分为基于强度或强度涨落关联的方法^[16, 19-20]、压缩感知的优化算法^[21-22]和使用深度神经网络的重构算法^[23-24]等。而对于这种计算重构的成像模式来说, 其获取图像信息的不确定度和置信度无法直接通过测量得到, 并且与具体的重构算法有关, 因此需要进行误差不确定度分析的相关研究。

早期, Ferri 等^[20]利用光场的统计特性, 对涨落关联重构算法得到的图像信息精度进行了分析并给出了一个近似的理论结果, 并基于此提出改进的差分鬼成像算法。Yu 等^[25]利用概率统计的知识, 研究了若干不同关联运算的变种算法所重构图像的误差分布并进行了验证。类似地, 胡晨昱^[26]给出了实空间域鬼成像与傅里叶衍射鬼成像的重构图像误差的统计描述。然而, 这些研究都只能对基于强度关联运算的结果给出相关的重构图像误差分布。而对于使用其他类型算法对鬼成像的图像信息进行重构的不确定度评估, 由于重构过程并无显式的表达式, 因此很难得到理论模型或极限; 另一方面, 目前也还没有相关研究提出相应的估计方法。尽管压缩感知理论中描述了一些重构误差结果^[27-28], 但其仅是用均方误差对重构信号整体的误差进行描述, 而并非对每个元素的值的重构误差进行描述; 并且, 鬼成像中的参考臂散斑场与压缩感知理论推导中的测量矩阵性质并不一致, 因此, 相应的结果无法直接用在鬼成像的不确定度评估中。

本文使用 Bootstrap 方法对鬼成像中图像信息重构的不确定度进行估计, 它可以在实际成像中无法给出重构图像不确定度的理论表达式并且没有真实参考图像的情况下, 有效地给出整张重构图像的不确定度估计分布图。通过数值仿真生成多次采样数据, 首先

收稿日期: 2022-12-08; 修回日期: 2023-01-07; 录用日期: 2023-01-11; 网络首发日期: 2023-02-07

基金项目: 国家自然科学基金(11627811)

通信作者: *huchenyu@ucas.ac.cn

基于已有的关联重构的标准误差分布理论公式验证了 Bootstrap 方法估计误差分布图的有效性,然后将其用于对压缩感知算法重构图像信息的不确定度和置信区间的估计。通过结合参考图像对估计结果进行的分析表明,使用自举法可以得到与真实重构误差比较一致的不确定度及置信区间估计。进一步地,使用改进的 Bootstrap 方法对重构图像信息的偏差和绝对误差分布图进行估计,得到的估计结果与真实误差分布图高度相关。这些结果表明,所提方案可用在实际无参考图像时的成像不确定度估计中。

2 原理和方法

2.1 鬼成像原理简介

典型的热光鬼成像系统如图 1 所示,热光源发出的光经过分束器后分为两路相关的光束:一束参考光不经过任何物体直接被具有空间分辨能力的探测器(如 CCD)接收,记录下光强分布 $I_r(\mathbf{r}_r)$ (\mathbf{r}_r 为探测面上的空间位置),称为参考光路;另一束物光照射到目标物体之后被没有空间分辨能力的单像素探测器接收,记录为信号 I_t ,称为物光路。理论上,通过设计这两路的光学传递函数,可以从这两路信号的强度涨落关联中得到目标物体的信息 $T(\mathbf{r}_r)$ 。例如,在实空间域鬼成像中,通过计算 $\langle \Delta I_t \Delta I_r(\mathbf{r}_r) \rangle \propto T(\mathbf{r}_r)$ [其中 ΔI_t 为物臂的光强涨落, $\Delta I_r(\mathbf{r}_r)$ 为参考臂的光强涨落]能够恢复出目标物体的强度透过率分布^[29]。

对于鬼成像系统,第 i 次采样得到由 CCD 探测到的参考臂信号数据 $I_r^{(i)}(\mathbf{r}_r)$ 和由单像素探测器探测到的物臂信号数据 $I_t^{(i)}$,并使用重构算法从 n 次探测数据 $\{I_r(\mathbf{r}_r), I_t\} = \{I_r^{(i)}(\mathbf{r}_r), I_t^{(i)}\}_{i=1}^n$ 中重构出目标图像信息 $T(\mathbf{r}_r)$ 。针对目标图像信息 $T(\mathbf{r}_r)$ 的不同类型的重构算法可以统一表示为抽象的形式:

$$\hat{T}(\mathbf{r}_r) = f\{I_r(\mathbf{r}_r), I_t\}, \quad (1)$$

式中: $f\{\cdot\}$ 表示某重构算法; $\hat{T}(\mathbf{r}_r)$ 为通过重构算法从探测数据 $\{I_r(\mathbf{r}_r), I_t\}$ 中得到的对目标图像的像素位置

\mathbf{r}_r 的估计量。在目前鬼成像已经涉及的许多实际应用领域中,不仅需要估计出目标物体的图像信息,还要给出对应估计的准确程度。但由于实际情况中并没有真实的图像信息可以作为参考,因此无法通过直接比较的方式来判断这个估计是否可靠,这时就需要寻找方法对这个估计的可靠性或不确定度进行评估。

在统计学中,估计量 \hat{T} 的不确定度一般使用估计量的标准误差 $\sigma = [\text{Var}(\hat{T})]^{1/2}$ 来描述,也称为标准不确定度,其含义为真实值在估计值的 σ 半径之内的置信概率为 68%, $\text{Var}(\cdot)$ 表示求方差;此外,还经常使用置信区间这一描述真实值落在给定置信度的区间范围的指标来刻画估计的可靠性。本研究将使用这两个指标对鬼成像中重构图像信息 $\hat{T}(\mathbf{r}_r)$ 的不确定度进行描述,使用统计学中估计不确定度的有效方法——Bootstrap 重采样技术,对重构的图像信息 $\hat{T}(\mathbf{r}_r)$ 的每一个位置的估计值的不确定度进行研究。

2.2 Bootstrap 重采样技术

Bootstrap 重采样技术是 Efron^[30] 于 1979 年在结合早期的重采样的基础上,为基于计算机模拟的统计分析提出的新框架。估计一个未知参数 T 作为统计学中的一个典型的问题,通常需要考虑选取何种统计量 \hat{T} 作为 T 的估计量和如何描述估计值的准确度两个问题^[31]。Bootstrap 方法就是用来解决第二个问题的方法,它能够利用计算机模拟采样的方法来代替偏差、标准误差等统计量的分布参数的理论推导过程^[32]。

Bootstrap 方法可分为已知总体分布函数的含参形式的参数 Bootstrap 方法和未知该分布函数的非参数 Bootstrap 方法。Bootstrap 方法需要知道可调整参数的分布函数的形式,很难给出大多数场景下合适的分布函数;非参数 Bootstrap 方法就显得较为灵活,使用起来也较为方便。本节主要对非参数 Bootstrap 方法进行介绍。非参数 Bootstrap 方法是利用计算机模拟随机抽样过程来估计总体分布的非参数蒙特卡罗方法^[31],该方法是对原始样本进行重采样,使用经验分布

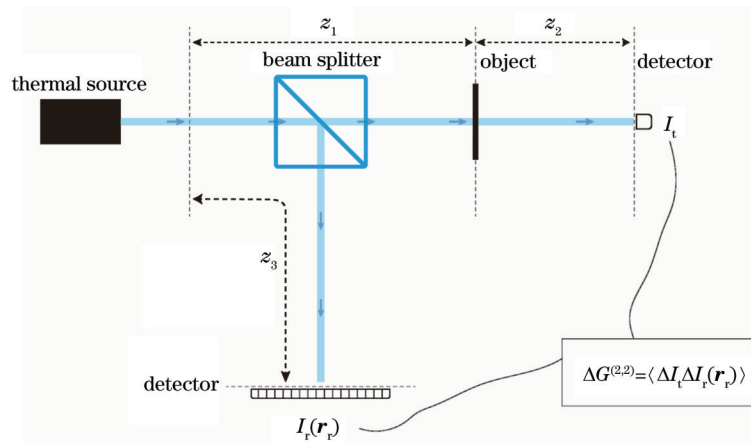


图 1 热光鬼成像系统示意图

Fig. 1 Diagram of thermal ghost imaging system

函数作为总体分布函数的估计,得到估计量的抽样分布,从而进行不确定度分析。以下将介绍使用非参数 Bootstrap 方法估计标准误差和置信区间的过程。

Bootstrap 方法运行的核心思想是对原始样本的重采样:已有一个从总体中获得的大小为 n 的原始样本,将原始样本作为一个伪总体,将伪总体服从的经验分布函数 $\hat{F}(x)$ 作为重抽样的总体分布,并从经验分布的随机抽样来模拟总体分布中的随机抽样。经验分布函数 $\hat{F}(x)$ 作为总体分布函数 $F(x)$ 的估计,是 Bootstrap 方法的理论基础,并且由格里汶科定理^[33]可知,当 n 充分大时,经验分布函数 $\hat{F}(x)$ 与总体分布函数 $F(x)$ 差别很小。 $Y=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 样本对应的经验分布函数为

$$\hat{F}(x) = \frac{\#\{X_i: X_i < x, i = 1, 2, \dots, n\}}{n}, \forall x \in \mathbb{R}, (2)$$

式中: $\#\{\cdot\}$ 表示集合中元素的个数。对经验分布函数为 $\hat{F}(x)$ 的原始样本 Y 的某一观测值 $y = \{x_i: i = 1, 2, \dots, n\}$ 进行 B 次有放回的容量为 n 的简单随机抽样,得到 B 组 Bootstrap 样本 $y_b^* = \{x_i^*: i = 1, 2, \dots, n\}$, 相应的统计量记为 $\hat{T}_b^* = \hat{T}(y_b^*)$, $b = 1, 2, \dots, B$ 。由于经验分布函数 $\hat{F}(x)$ 代替了总体分布函数 $F(x)$, 则能够使用 \hat{T}^* 的分布来代替 \hat{T} 的分布, 然后计算 \hat{T}^* 的标准误差 $\hat{\sigma}$ 作为 \hat{T} 的标准误差 σ 的估计。

非参数 Bootstrap 方法的关键步骤^[31]为:

1) 使用计算机生成均匀分布的随机数,独立地抽取 B 组 Bootstrap 样本 $y_1^*, y_2^*, \dots, y_b^*$, 每个样本的容量与原样本相同,为 n 。

2) 对于每个 Bootstrap 样本 y_b^* , 计算对应的参数估计的统计量,即 \hat{T}_b^* 。

3) 计算 \hat{T}_b^* 的样本标准差:

$$\hat{\sigma}_B = \left[\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{T}_b^* - \bar{\hat{T}}^*)^2 \right]^{1/2}, \quad \bar{\hat{T}}^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{T}_b^*. (3)$$

4) 使用 Bootstrap- t 法计算 $1 - \alpha$ 置信度下的近似置信区间:

$$z^* = \frac{\hat{T} - \hat{T}}{\hat{\sigma}_B}, (4)$$

$$T \in \left[\hat{T} - \hat{\sigma}_B z^{(1-\alpha/2)}, \hat{T} - \hat{\sigma}_B z^{(\alpha/2)} \right], (5)$$

式中: \hat{T} 为 T 的原始样本估计; $\hat{\sigma}_B$ 为 Bootstrap 估计的标准误差; $z^{(\alpha/2)}$ 、 $z^{(1-\alpha/2)}$ 分别为 $\{z_b^*, b = 1, 2, \dots, B\}$ 的升序排列的第 $B \frac{\alpha}{2}$ 个和第 $B \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ 个值。例如,如果 $B = 1000$, $\alpha = 0.05$, 则 $z^{(\alpha/2)}$ 、 $z^{(1-\alpha/2)}$ 分别为升序排列的 z_b^* 的第 25 个和第 975 个值。

当 $B \rightarrow \infty$ 时, $\hat{\sigma}_B$ 将趋近于标准误差的 Bootstrap 估计 $\hat{\sigma} = \sigma(\hat{F})$ 。一般来说,当 $B \geq 1000$ 时,可以认为 $\hat{\sigma}_B$ 是 $\hat{\sigma}$ 的一个好的估计^[34], 本文中采用 $B = 1000$ 作为

Bootstrap 样本数。

2.3 Bootstrap 用于鬼成像图像重构不确定度估计的流程

在热光鬼成像系统中,由于热光的随机涨落特性,每次采样时得到的观测信号是彼此独立且服从相同分布的;将每次采样的信号 $\{I_r^{(i)}, I_t^{(i)}\}$ 看作一个样本,那么,实际中 n 次采样得到的数据 $\{I_r^{(i)}, I_t^{(i)}\}_{i=1}^n$ 就是 n 个独立同分布的样本,将它们看作 Bootstrap 方法中的原始样本,把经过重构过程得到的图像信息估计 $\hat{T}(r_r) = f(\{I_r(r_r), I_t\})$ 看作估计量,就可以使用上述所叙述的非参数 Bootstrap 方法的流程对图像重构的不确定度及置信区间进行分析描述。

需要说明的是,典型的不确定度估计得到的是一个参数或少量参数的不确定度;这里由于估计量是鬼成像中重构出一幅图像信息,因此,所得到的不确定度估计的结果实际上是一幅不确定度分布图,上面每个像素用于表征重构该像素灰度时的不确定度大小。

3 不确定度估计数值模拟结果

本节使用数值仿真的方式来对热光实空间鬼成像重构算法的不确定度进行 Bootstrap 分析。使用文献^[35]介绍的光场传播仿真方法来仿真实空间鬼成像系统,光源使用圆复高斯随机分布的光场,生成所需的双臂探测数据。仿真中使用的参数为:波长 $\lambda = 532 \text{ nm}$, 光源面直径 $D_1 = 2 \text{ mm}$, 光源到空间探测器的距离 $z_1 = z_3 = 0.2 \text{ m}$, 探测器的像元间隔为 $2 \mu\text{m}$, 像元数目为 200×200 。单像素探测器的数据 I_t 与空间探测器的数据 $I_r(r_r)$ 满足 $I_t = \int d^2 r_r I_r(r_r) T(r_r)$ 的关系,因此仿真过程中将空间探测器的数据 $I_r(r_r)$ 与目标物体 $T(r_r)$ 相乘之后,将所有元素求和得到 I_t , 也就等价于 $z_2 = 0$ 的情况。

3.1 基于强度关联算法验证 Bootstrap 的标准误差估计效果

为了验证 Bootstrap 方法能够对重构图像信息的标准误差进行准确的估计,首先使用它对关联算法进行评估并与已有的理论推导结果进行比较。将目标物体选为一个小孔,其强度由中心向四周按照高斯分布 ($\mu = 0, \sigma^2 = 2\pi$) 衰减[图 2(a)]。将经过以上参数设置的系统生成的 20000 张散斑图作为参考臂数据 $\{I_r^{(i)}(r_r)\}$ (i 的取值为 $1 \sim 20000$); 每张散斑图经过物体之后,利用 $I_t^{(i)} = \sum I_r^{(i)}(r_r) T(r_r) dS$ 得到单像素探测器对应的物臂数据 $\{I_t^{(i)}\}$, 其中 dS 为参考臂上每个像元的面积。得到的单组样本记为 $y = \{[I_r^{(i)}(r_r), I_t^{(i)}]\}$ 。

强度关联算法 $\langle \Delta I_t \Delta I_r(r_r) \rangle \propto T(r_r)$ 实际上是计算协方差的过程,则使用协方差统计量作为物体强度透过率的估计量:

$$\hat{T}(\mathbf{r}_r) = \left\langle \left[I_r(\mathbf{r}_r) - \langle I_r(\mathbf{r}_r) \rangle \right] \left[I_t - \langle I_t \rangle \right] \right\rangle, \quad (6)$$

式中: $\hat{T}(\mathbf{r}_r)$ 为通过强度关联重构算法得到的估计量; $\langle \cdot \rangle$ 表示系综平均。由于实际探测到的数据量有限, 实际中使用样本的均值代替系综平均作为原始图像 $T(\mathbf{r}_r)$ 的

估计, 则有 $\hat{T}(\mathbf{r}_r) = E \left\{ \left[I_r(\mathbf{r}_r) - \overline{I_r(\mathbf{r}_r)} \right] \left(I_t - \bar{I}_t \right) \right\}$, 并将该估计量进行归一化处理, $E \{ \cdot \}$ 表示求期望。

图 2 为实空间鬼成像强度关联算法的重构仿真结果。

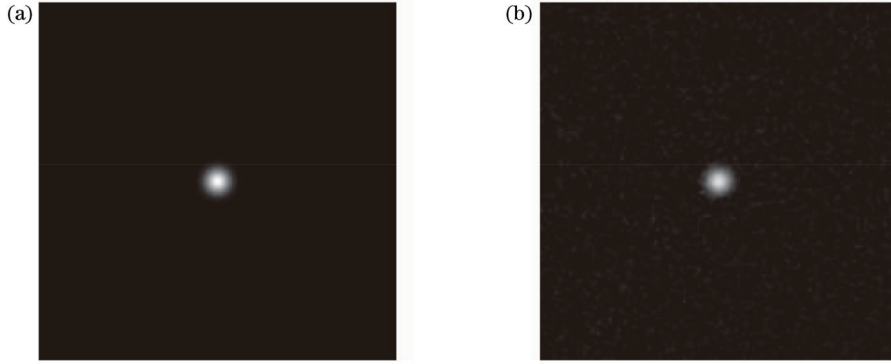


图 2 实空间鬼成像强度关联算法重构仿真结果。(a) 原始图像; (b) 重构图像

Fig. 2 Simulation result of real-space ghost imaging (GI) reconstruction by intensity correlation algorithm. (a) Original image; (b) reconstructed image

对于实空间鬼成像关联重构方法, 标准误差^[36]可表示为

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{1}{A_c} \int d^2 \mathbf{r}_o T^2(\mathbf{r}_o) + 7T^2(\mathbf{r}_r) + \frac{\sigma_n^2}{\langle I_r \rangle^2 A_c^2} \right]}, \quad (7)$$

式中: A_c 为光场的相干面积; σ_n^2 为探测臂上的噪声方差; \mathbf{r}_o 为物体表面上的空间位置。理论计算的标准误差 σ_T 表达式表明标准误差是原始图像 T 的函数。可以看出: 当系统确定后得到的标准误差与原始图像、采样次数和物臂噪声等有关, 可见在未知原始图像信息的情况下, 从单组样本出发在理论上直接估计标准误差是困难的。

根据非参数 Bootstrap 方法的计算框架, 能够计算估计量为协方差时的标准误差。根据 Bootstrap 方法框架对原始样本进行计算机模拟重抽样处理, 将得到的 Bootstrap 样本记为 $\{y_b^*\}$ (b 的取值为 $1 \sim 1000$), 将对应的 Bootstrap 样本的协方差记为 $\{\hat{T}_b^*\}$, 进一步计算 $\hat{\sigma}_B$ 作为原始样本协方差的标准误差 σ 的 Bootstrap 估计, 使用式(7)计算理论推导的标准误差 σ_T 。

图 3(a)、3(b) 分别为无噪声情况下, 理论计算的标准误差 σ_T 的二维和三维显示图和非参数 Bootstrap 估计的标准误差 $\hat{\sigma}_B$ 的二维和三维显示图。图 3(c) 为选取穿过小孔峰值的水平线上各像素点标准误差的理论估计值和 Bootstrap 估计值得到的曲线图。为了更加方便对比观察, 将数据显示在同一区间, 针对该样本数据将其显示在 $[0.015, 0.026]$ 区间。从图 3(a) 和图 3(b) 可以看出: 理论估计的标准误差有和式(7)中对应的大于零的本底, 中间部分在本底上叠加了与原始图像有关的峰; Bootstrap 估计的标准误差也有着明显的与理论估计一致的本底值, 中间位置也有高于本底的

峰。图 3(c) 为选取的穿过小孔峰值部分的理论与 Bootstrap 估计的标准误差, 可以看出 Bootstrap 的估计值与理论值存在误差, 该误差源于理论推导过程中的近似误差以及仿真数目有限带来的统计误差; 但是 Bootstrap 的估计值依然表现出与理论值一致的特征。从三维图中可以看出, 二者的标准误差的本底部分基本相等, 叠加的峰的部分 Bootstrap 估计的值虽然小于理论估计的值, 但二者都表明中间部分的标准误差较大。可以认为 Bootstrap 估计的标准误差与理论基本一致, 说明了使用 Bootstrap 估计的标准误差作为重构算法性能评价的合理性。

3.2 压缩感知重构的标准误差估计

根据计算鬼成像的计算原理, 使用一阶线性模型能够对鬼成像的过程进行描述, 使用已有的压缩感知技术可对模型进行求解^[21,37], 其一阶模型可表示为

$$\beta = K\alpha + e, \quad (8)$$

式中: $\beta = [I_r^{(1)}, I_r^{(2)}, \dots, I_r^{(n)}]^T$; $K = [\text{vec}[I_r^{(1)}], \text{vec}[I_r^{(2)}], \dots, \text{vec}[I_r^{(n)}]]^T$, $\text{vec}(\cdot)$ 表示将二维图像数据转化为向量; $\alpha = \text{vec}[T(\mathbf{r}_r)]$; e 为探测臂引入的期望为 0 和方差为 σ_e^2 的高斯噪声。

目前已经有很多成熟的压缩感知重构算法, 例如, 正交匹配算法 (orthogonal match pursuit, OMP)^[38] 和 TwIST (two-step iterative shrinkage/thresholding)^[39] 等。本节以 TwIST 算法为例重构鬼成像, 估计其重构算法的标准误差。针对 TwIST 算法将鬼成像系统的成像过程转化为对应的优化问题:

$$\min_{\alpha} \text{TV}_2(\alpha) \text{ s.t. } \beta = K\alpha, \quad (9)$$

式中: $\text{TV}_2(\alpha)$ 代表使用全变分约束的正则化,

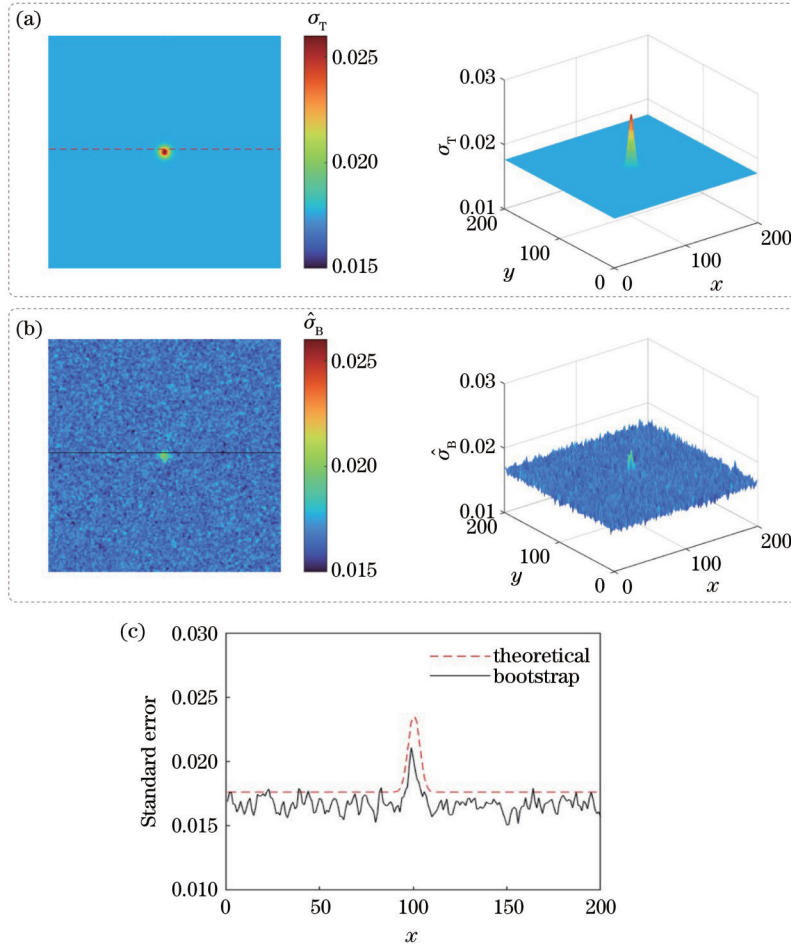


图 3 无噪声情况下强度关联算法的标准误差的二维和三维图。(a)理论估计;(b) Bootstrap 估计;(c)选取的穿过小孔峰值部分的理论与 Bootstrap 估计结果的标准误差

Fig. 3 Two-dimensional and three-dimensional images of standard error of intensity correlation algorithm in case of noiseless. (A) Theoretical estimation; (b) Bootstrap estimation; (c) standard error of theoretical and Bootstrap estimation results of selected section through peak of small hole

$TV_2(\alpha) = \sum_{i=1}^{m \times n} \|D_i \alpha\|_2$, $m \times n$ 为图像大小, D_i 为 α 的第 i 个像素在水平和垂直方向的一阶有限差分, $\|\cdot\|_2$ 表示求 L_2 范数。

对于鬼成像的 TwIST 重构算法, 使用采样次数为 10000 的无噪声 ($\sigma_e^2 = 0$) 的一组样本 $y = \{x_i = (I_r^{(i)}, I_t^{(i)})\}$ (i 的取值是 1~10000), Bootstrap 的样本数 B 为 1000。由于压缩感知算法计算的过程涉及多次迭代, 难以找到显式的估计表达式并且不知道具体的总体分布函数形式, 因此使用非参数 Bootstrap 方法对压缩感知算法的标准误差和置信区间进行估计是一个合适的选择。在使用 TwIST 算法时, 为了排除迭代次数的影响, 保证不同 Bootstrap 样本重构过程中的参数的一致性, 仅使用优化停止条件对数据迭代过程中的每次迭代结果进行约束, 排除每个 Bootstrap 样本重构过程中迭代阈值的不一致对结果带来的影响, 根据经验将本实验中算法的优化停止条件设置为 $|\hat{T}^{k+1} -$

$\hat{T}^k|/\hat{T}^k \leq 10^{-5}$, 其中, k 表示第 k 次迭代。

图 4(a) 分别为 TwIST 算法中使用的“HIAS”图样的原始图像、重构图和使用非参数 Bootstrap 方法估计的标准误差。从图 4(a) 右图中的 Bootstrap 估计的标准误差可以看出, 该标准误差与原始图像相关, “HIAS”字母处的标准误差相较其他位置的标准误差明显大一些, 其他位置估计的标准误差较小, 并且整体处于同一水平, 说明 TwIST 算法对不同的位置重构的不确定度是不同的, 并且与原始图像의强度分布有关。

为了进一步分析不同位置重构结果的可信度, 接下来对重构算法的置信区间进行估计, 使用第 2.2 节中的非参数 Bootstrap 估计置信区间的 Bootstrap- t 法获得置信度 $1 - \alpha = 0.99$ 的置信区间, 并取置信区间的长度的半宽为

$$\epsilon = \frac{\hat{\sigma}_B}{2} [\hat{z}^{(1-\alpha/2)} - \hat{z}^{(\alpha/2)}] \quad (10)$$

ϵ 图能够用来表征在给置信度情况下图像上不同位置的置信区间的宽度, 宽度越小, 重构值就越可

信。图 4(b)左图是选取原始图像的一行像素,画出其重构的不确定度图,虚线为该行像素的实际值,实线为 TwIST 的重构算法的估计值,阴影区域为对应的 Bootstrap 方法估计的 99% 的置信区间;从不确定度图可以看出,实际值基本位于 99% 置信区间内,在较小像素值位置的估计值在实际值很窄的范围内变化,而较大像素值位置的估计值与实际值的变化较小像素值

位置的大,但依然在置信区间(阴影范围)内。图 4(b)右上图是原始样本重构的结果与原始图像的绝对误差图,可以看出“HIAS”字母区域的误差相较于其他位置大。图 4(b)右下图显示的是置信度为 99% 时的 ϵ 图,可以看出“HIAS”字母所在区域估计的置信区间的宽度较其他位置的大,说明“HIAS”字母之外区域的估计值的可信度相较于字母区域要大。

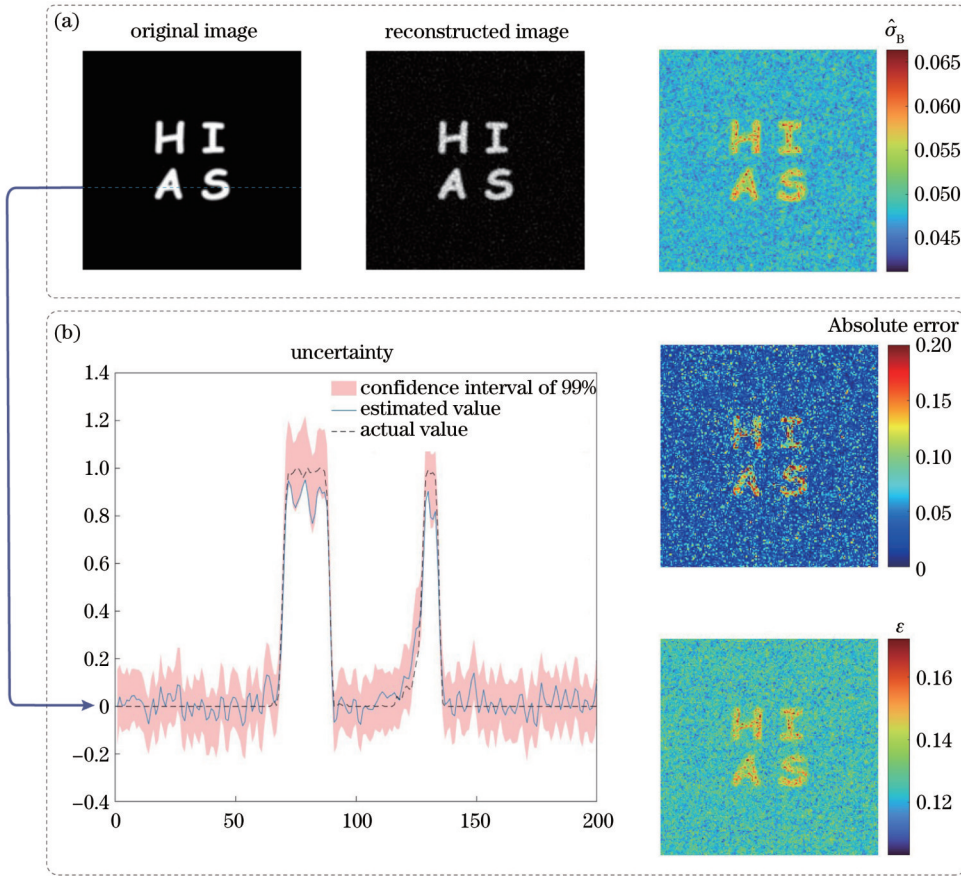


图 4 TwIST 重构的标准误差和置信区间估计。(a)原始图像、重构图、非参数 Bootstrap 方法估计的标准误差图;(b)选取的一行数据的 99% 置信区间的图、绝对误差图和 99% 置信区间的半宽 ϵ 图

Fig. 4 Standard error and confidence interval estimated by TwIST reconstruction. (a) Original image, reconstructed image, and standard error obtained by nonparametric Bootstrap; (b) uncertainty diagram of confidence interval of 99% in selected line of data, absolute error diagram, and half-width ϵ diagram of confidence interval of 99%

通过比较绝对误差图和 ϵ 图可以看出,置信区间半宽 ϵ 越大的位置对应的绝对误差也越大:重构的结果在字母区域有更宽的置信区间,表明在字母区域的估计值相较于其他位置有更高概率出现大误差,这也与绝对误差中字母区域相较于其他位置出现较大误差的实际情况相符合。因此,在实际原始图像未知的情况下,使用 Bootstrap 方法对标准不确定度的估计能够反映出在图像不同位置重构结果的可信度。

3.3 压缩感知重构的偏差及绝对误差估计

以上使用 Bootstrap 方法对压缩感知中的 TwIST 算法重构的标准误差进行了分析,可以看出,所估计的标准误差和置信区间分布能够很好地给出重构图像的误差分布趋势。进一步地,为了更加准确定量地给出

重构结果的误差分布图,使用相应的 Bootstrap 方法分别对图像信息重构的偏差 $\hat{\sigma}_{\text{bias}}$ 和均方根误差 $\hat{\sigma}_{\text{RMSE}}$ 分布进行了估计,其计算式分别为

$$\hat{\sigma}_{\text{bias}} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{T}_b^* - \hat{T}, \quad (11)$$

$$\hat{\sigma}_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (\hat{T}_b^* - \hat{T})^2}, \quad (12)$$

式中: \hat{T} 为原始样本的重构结果; \hat{T}_b^* 为 Bootstrap 样本的重构结果。通过使用式(11)和式(12)计算的 $\hat{\sigma}_{\text{bias}}$ 和 $\hat{\sigma}_{\text{RMSE}}$ 替换 $\hat{\sigma}_B$, 来分析 TwIST 算法的重构效果。本节仿真过程中使用第 3 节中的仿真参数生成原始样本,其中使用的原始样本采样次数和 Bootstrap 样本数与

3.2 节中一致。

图 5(a)、5(b)分别显示了实际误差图和 Bootstrap 估计图。图 5(a)上图为通过 $e = \hat{T} - T$ 得到的误差图,图 5(a)下图为通过 $e_{\text{abs}} = |\hat{T} - T|$ 得到的绝对误差图。图 5(b)上图为利用式(11)估计的偏差图,图 5(b)下图为利用式(12)估计的均方根误差图。从图 5(b)中 Bootstrap 估计的偏差可以看出,字母区域估计的偏差明显低于其他位置的偏差,这与实际误差图表现出的特征一致。由于每一个 Bootstrap 样本的估计值与原始样本的估计值的偏差可能存在正负值,Bootstrap 估计偏差的过程中的平均使得出现“假”无偏差值(Bootstrap 估计的无偏差的位置可能并不意味着 B 个 Bootstrap 估计值与原始样本估计值都没有偏差,而是对它们取平均的过程导致出现了零偏差的情况);对均方根误差的估计就可以消除这方面的影响。从图 5

(a)中的绝对误差和图 5(b)中 Bootstrap 估计的均方根误差可以看出,字母区域的误差明显大于其他位置,这也与绝对误差的分布基本一致。此外,Bootstrap 估计的偏差和均方根误差分布图不仅在特征上与误差和绝对误差分布对应,在估计值的范围分布上也与其对应;相比标准误差分布图,使用式(12)估计的均方根误差分布图更为准确地反映了原始样本重构的误差。这一现象可以通过相应的估计公式来理解:标准误差估计时只使用 Bootstrap 样本的重构结果,在统计上侧重描述抽样分布的特征;而对均方根误差进行估计的计算式涉及原始样本的重构结果,更侧重描述估计值与真实值相差的大小,因此有理由相信对均方根误差的估计能够更加准确地反映原始样本重构图像与真实图像的差异。这一结果表明,使用相应的 Bootstrap 方法估计的偏差和均方根误差分布图能够作为定量描述该单组样本的重构误差的方式。

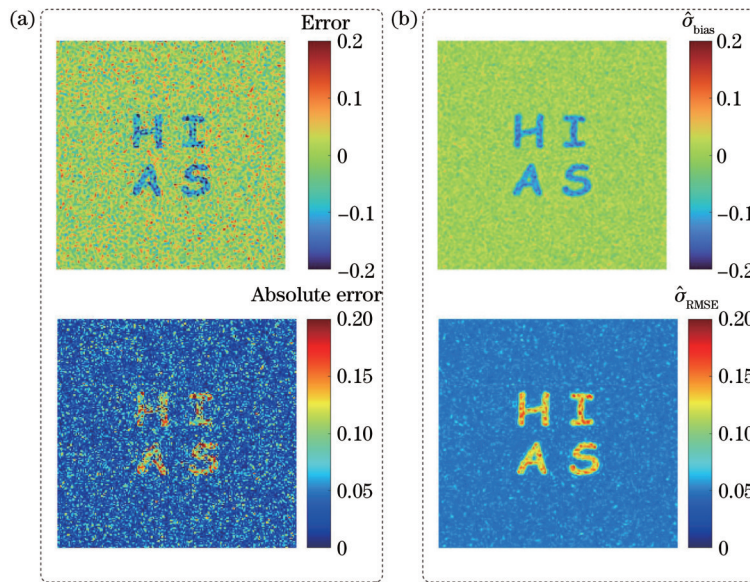


图 5 TwIST 重构的偏差和绝对误差图。(a)原始样本实际重构的误差和绝对误差图;(b) Bootstrap 估计的偏差和均方根误差图
Fig. 5 Bias and absolute error diagrams of TwIST reconstruction. (a) Actual error and absolute error diagrams of original sample reconstruction; (b) bias and root mean square error diagrams estimated by Bootstrap method

4 结 论

本文将非参数 Bootstrap 方法应用于鬼成像图像信息重构不确定度的估计中。仿真结果显示,对强度关联算法的标准误差的估计值与理论计算的标准误差一致,说明了 Bootstrap 方法在鬼成像重构算法的标准误差估计方面的可靠性。将 Bootstrap 方法用于压缩感知重构的鬼成像不确定度估计中,以 TwIST 算法为例,对重构图像信息的标准误差分布进行了估计,所得结果能够很好地说明不同位置估计值的可信度。进一步使用 Bootstrap 方法计算了估计量 \hat{T} 的偏差和均方根误差,结果表明,Bootstrap 方法估计的结果能够作为原始样本重构图像信息误差的定量描述。本文研究

给估计鬼成像重构算法的不确定度提供了有效的解决方案,尤其是在只有单组样本且无法得到重构误差显式表达式且无真实参考图像能够进行对比的情况下。未来的工作是将 Bootstrap 方法应用于鬼成像的其他重构算法(如深度神经网络算法)的不确定度估计中。

参 考 文 献

- [1] Shapiro J H, Boyd R W. The physics of ghost imaging[J]. Quantum Information Processing, 2012, 11(4): 949-993.
- [2] Shih Y. The Physics of Ghost Imaging[M]//Cohen L, Poor H V, Scully M O. Classical, semi-classical and quantum noise. New York: Springer, 2012: 169-222.
- [3] Moreau P A, Toninelli E, Gregory T, et al. Ghost imaging using optical correlations[J]. Laser & Photonics Reviews, 2018, 12(1): 1700143.

- [4] Klyshko D N. Two-photon light: influence of filtration and a new possible EPR experiment[J]. *Physics Letters A*, 1988, 128(3/4): 133-137.
- [5] Pittman T B, Shih Y H, Strekalov D V, et al. Optical imaging by means of two-photon quantum entanglement[J]. *Physical Review A*, 1995, 52(5): R3429-R3432.
- [6] Bennink R S, Bentley S J, Boyd R W. Two-Photon coincidence imaging with a classical source[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(11): 113601.
- [7] Zhang D, Zhai Y H, Wu L G, et al. Correlated two-photon imaging with true thermal light[J]. *Optics Letters*, 2005, 30(18): 2354-2356.
- [8] Zhao C Q, Gong W L, Chen M L, et al. Ghost imaging lidar via sparsity constraints[J]. *Applied Physics Letters*, 2012, 101(14): 141123.
- [9] Erkmen B I. Computational ghost imaging for remote sensing[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2012, 29(5): 782-789.
- [10] Hardy N D, Shapiro J H. Computational ghost imaging versus imaging laser radar for three-dimensional imaging[J]. *Physical Review A*, 2013, 87(2): 023820.
- [11] Wang C L, Mei X D, Pan L, et al. Airborne near infrared three-dimensional ghost imaging LiDAR via sparsity constraint[J]. *Remote Sensing*, 2018, 10(5): 732.
- [12] Liu Z T, Tan S Y, Wu J R, et al. Spectral camera based on ghost imaging via sparsity constraints[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 25718.
- [13] 黄见, 时东锋, 孟文文, 等. 光谱编码计算关联成像技术研究[J]. *红外与激光工程*, 2021, 50(1): 20200120.
Huang J, Shi D F, Meng W W, et al. Study on spectral encoded computational ghost imaging[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2021, 50(1): 20200120.
- [14] Ye Z Y, Xiong J, Liu H C. Ghost difference imaging using one single-pixel detector[J]. *Physical Review Applied*, 2021, 15(3): 034035.
- [15] Shi D F, Hu S X, Wang Y J. Polarimetric ghost imaging[J]. *Optics Letters*, 2014, 39(5): 1231-1234.
- [16] Cheng J, Han S S. Incoherent coincidence imaging and its applicability in X-ray diffraction[J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(9): 093903.
- [17] Klein Y, Schori A, Dolbnya I P, et al. X-ray computational ghost imaging with single-pixel detector[J]. *Optics Express*, 2019, 27(3): 3284-3293.
- [18] Hu C Y, Han S S. On ghost imaging studies for information optical imaging[J]. *Applied Sciences*, 2022, 12(21): 10981.
- [19] Sun B Q, Welsh S S, Edgar M P, et al. Normalized ghost imaging[J]. *Optics Express*, 2012, 20(15): 16892-16901.
- [20] Ferri F, Magatti D, Lugiato L A, et al. Differential ghost imaging[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(25): 253603.
- [21] Katz O, Bromberg Y, Silberberg Y. Compressive ghost imaging[J]. *Applied Physics Letters*, 2009, 95(13): 131110.
- [22] Gong W L, Han S S. High-resolution far-field ghost imaging via sparsity constraint[J]. *Scientific Reports*, 2015, 5: 9280.
- [23] He Y C, Wang G, Dong G X, et al. Ghost imaging based on deep learning[J]. *Scientific Reports*, 2018, 8: 6469.
- [24] Wang F, Wang H, Wang H C, et al. Learning from simulation: an end-to-end deep-learning approach for computational ghost imaging[J]. *Optics Express*, 2019, 27(18): 25560-25572.
- [25] Yu W K, Leng J. Probability theory of intensity correlation in ghost imaging with thermal light[J]. *Physics Letters A*, 2020, 384(30): 126778.
- [26] 胡晨昱. 基于鬼成像系统的信息光学成像若干理论问题研究[D]. 上海: 中国科学院上海光学精密机械研究所, 2021: 55-74.
Hu C Y. Research on some theoretical problems of information optical imaging based on ghost imaging system[D]. Shanghai: Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 2021: 55-74.
- [27] Tropp J A. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(10): 2231-2242.
- [28] Candès E J, Romberg J K, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207-1223.
- [29] Han S S, Yu H, Shen X, et al. A review of ghost imaging via sparsity constraints[J]. *Applied Sciences*, 2018, 8(8): 1379.
- [30] Efron B. Bootstrap methods: another look at the jackknife[J]. *The Annals of Statistics*, 1979, 7(1): 1-26.
- [31] Efron B, Tibshirani R. The bootstrap method for assessing statistical accuracy[J]. *Behaviormetrika*, 1985, 12(17): 1-35.
- [32] Chernick M R. Bootstrap methods: a guide for practitioners and researchers[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.
- [33] van der Vaart A W. Asymptotic statistics[M]. New York: Cambridge University Press, 2000.
- [34] Davison A C, Hinkley D V. Bootstrap methods and their application[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [35] Schmidt J D. Numerical simulation of optical wave propagation with examples in MATLAB[M]. Bellingham: SPIE, 2010.
- [36] 刘震涛, 胡晨昱, 童智申, 等. 中国科学院上海光学精密机械研究所鬼成像理论研究的若干进展(特邀)[J]. *红外与激光工程*, 2021, 50(12): 20211059.
Liu Z T, Hu C Y, Tong Z S, et al. Some research progress on the theoretical study of ghost imaging in Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences (Invited) [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2021, 50(12): 20211059.
- [37] Gong W L, Han S S. Experimental investigation of the quality of lensless super-resolution ghost imaging via sparsity constraints[J]. *Physics Letters A*, 2012, 376(17): 1519-1522.
- [38] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [39] Bioucas-Dias J M, Figueiredo M A T. A new TwIST: two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(12): 2992-3004.

Uncertainty Estimation for Image Information Reconstruction in Ghost Imaging System Based on Bootstrap Method

Zhu Kaixuan^{1,2,3}, Hu Chenyu^{1,3*}, Yu Hong^{1,3}, Han Shensheng^{1,2,3}

¹Key Laboratory of Quantum Optics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China;

²Center of Materials Science and Optoelectronics Engineering, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

³School of Physics and Optoelectronic Engineering, Hangzhou Institute for Advanced Study, University of Chinese Academy of Sciences, Hangzhou 310024, Zhejiang, China

Abstract

Objective A ghost imaging (GI) system, as a new-type imaging system different from traditional imaging systems, has gained much attention and shown its imaging capabilities in related fields. GI is an imaging mode that requires computational reconstruction to obtain image information. For this type of imaging mode, the uncertainty of the retrieved image information cannot be obtained by direct measurement and is related to the specific reconstruction algorithm. Therefore, relevant research on error uncertainty analysis is required. Existing studies mostly give reconstruction error distributions corresponding to the intensity correlation algorithms. For algorithms of other types, it is hard to obtain a theoretical result since there is no explicit formula for the reconstructed information, and studies on related estimation methods have not been reported. Although there are some theoretical results about the reconstruction error of compressed sensing (CS) algorithms, they cannot be directly applied to the uncertainty estimation of GI, since there are differences between the speckle patterns in GI and the measurement matrix used in the CS theoretical derivation. In this study, we use the Bootstrap method to estimate the uncertainty of image information reconstruction. Bootstrap technology can effectively give the uncertainty estimation map of the entire reconstructed image in practical imaging scenarios where the theoretical expression cannot be given, and there is no original image for reference. It is expected that the proposed method can contribute to estimating the uncertainty map of image reconstruction with different reconstruction algorithms in practical GI systems.

Methods In GI, detection signals $\{I_i^t\}$ in the object arm and $\{I_r^t(\mathbf{r}_r)\}$ in the reference arm are used together to retrieve the image information $T(\mathbf{r}_r)$. There are various reconstruction algorithms, and they can be all expressed as Eq. (1). In this study, the uncertainty of the reconstructed $\hat{T}(\mathbf{r}_r)$ is estimated, and the Bootstrap method is applied. The Bootstrap method is a technique in statistical analysis, and its core idea is to use the original sample of size n as a pseudo-population for resampling. Its steps are as follows. First, the computer is used to generate random numbers, and Bootstrap samples $(\mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \dots, \mathbf{y}_b^*)$ of size n are independently drawn. Second, for each Bootstrap sample \mathbf{y}_b^* , the corresponding parameter estimation is calculated, which results in a set of estimators \hat{T}_b^* , $b = 1, 2, \dots, B$. Third, the standard deviation of \hat{T}_b^* is calculated by using Eq. (3) to approximately estimate the standard error of \hat{T} . Finally, the approximate confidence interval at a confidence level of $1 - \alpha$ can be obtained by using the Bootstrap- t method. In thermal-source GI, the observed signals obtained by each sampling are mutually independent and identically distributed due to the random fluctuation characteristics of thermal light. Therefore, if each sampled signal $\{I_r^{(i)}, I_i^{(i)}\}$ is considered as a sample, the obtained data $\{I_r^{(i)}, I_i^{(i)}\}$ (i is from 1 to n) from a total number of n actual samplings are independent and identically distributed samples. Taking the data as the original sample and considering the reconstruction results $\hat{T}(\mathbf{r}_r) = f\{\{I_r(\mathbf{r}_r), I_i\}\}$ as the estimator, the uncertainty and confidence interval of the reconstructed image can be described by the non-parametric Bootstrap method.

Results and Discussions To verify the effectiveness of the Bootstrap method, we first apply it to estimate the standard error of the reconstructed image from the intensity correlation algorithm, and a theoretical formula has been derived. The imaging target is selected as a hole with Gaussian distribution transmittance [Fig. 2(a)]. The result is shown in Fig. 3. It can be seen that the standard error map estimated by the Bootstrap method is highly consistent with the theoretical one. They have backgrounds of almost the same level. The difference in the region around the peak is mostly due to the statistical fluctuation in the estimation, but the estimated error map still has characteristics that the error of the central region is higher than that of the surrounding regions. Then, we use Bootstrap to estimate the result reconstructed from the CS algorithm. Specifically, the two-step iterative shrinkage thresholding (TwIST) algorithm with total variation

regularization is used for reconstruction here. The result is shown in Fig. 4. It can be seen that the estimated standard error map is well correlated with the true absolute error map, and they have similar characteristics. In addition, a map that shows a confidence interval of 99% is shown in Fig. 4(b). In order to more accurately and quantitatively give the error distribution map, the bias and absolute error of the CS algorithm are estimated via the corresponding Bootstrap variants. Specifically, quantities in Eqs. (11) and (12) are estimated, and the result is shown in Fig. (5). It can be seen that the estimated bias and absolute error maps are consistent with the true ones in both the shape and the specific values. This shows that the proposed estimation can give a quantitative description of the reconstructed error map.

Conclusions We propose to apply the non-parametric Bootstrap method to estimate the uncertainty of GI image information reconstruction. Simulation results show that the estimated standard error of the intensity correlation algorithm by Bootstrap is consistent with the theoretical one, which illustrates the reliability of the Bootstrap method in estimating the standard error of the GI algorithm. Furthermore, the Bootstrap method has been applied to estimate the uncertainty of the CS-based reconstruction. The TwIST algorithm is taken as an example, and the standard error map of the reconstructed image information is estimated, which has well demonstrated the confidence level of the reconstructed result in different positions of the target image. In addition, the bias and absolute error of the reconstructed \hat{T} are estimated with the corresponding Bootstrap variant, which demonstrates that the Bootstrap results can quantitatively describe the image information error of the original sample reconstruction. Our research provides an effective solution for estimating the uncertainty of the reconstruction algorithms of GI, which is especially suitable for cases where there is no real reference image, and an explicit expression cannot be given. Subsequent work is applying the Bootstrap method to estimate the uncertainty of other reconstruction algorithms (e. g. , deep neural network algorithm) of GI.

Key words imaging systems; ghost imaging; image reconstruction; non-parametric Bootstrap method; uncertainty