

自由曲面光束调控 Monge-Ampère 方法研究进展

沈凡琪, 杨琳, 吴仍茂*, 郑臻荣, 李海峰, 刘旭

浙江大学光电科学与工程学院, 浙江 杭州 310027

摘要 自由曲面具有灵活的面形结构,用于光束调控可获得高性能、轻小型的系统,可创造新的结构形式和实现新的光束调控功能。自由曲面光束调控是一个根据输入和目标反求光学自由曲面的逆问题。Monge-Ampère(MA)方法基于理想光源近似,将自由曲面光束调控逆问题转化成一个带有非线性边界条件的 MA 方程。MA 方法无需预先给定光线落点位置,而是通过控制曲面的高斯曲率分布来实现对光传输的高效灵活调控,被认为是当前最有效的可自动满足曲面连续性可积条件的自由曲面设计方法。对 MA 方法的研究进展进行了概述,详细介绍了自由曲面光束强度调控模型,以及自由曲面光束强度和波前同时调控模型的构建过程与求解方法,并通过三个设计实例充分展示了各类光束调控模型的有效性和 MA 方法的优势。

关键词 光学设计; 光束调控; 自由曲面; Monge-Ampère 方程方法; 逆问题

中图分类号 O436 文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS221831

1 引言

光学自由曲面是一类不具备旋转对称性或平移对称性的光学曲面^[1],其灵活的面形结构为设计者提供了更多的设计自由度,可得到结构紧凑、轻巧的高性能光学系统。自由曲面光束调控在非成像光学领域具有很大的应用价值和广泛的应用前景,如道路照明^[2-4]、车灯照明^[5-6]、显微照明^[7-8]和激光光束整形^[9-13]等。

自由曲面光束调控本质是一个逆问题,其难点和关键在于如何根据光源的发光特性和预定的出射光束分布特性反求自由曲面。根据所调控光束的光学扩展量大小不同,自由曲面光束调控可分为零扩展度光束调控和非零扩展度光束调控^[14]。零扩展度光束调控假定光束的光学扩展量为零,曲面上每一个点只有一条光线经过。扩展光源可视为由无数个理想光源构成,在非零扩展度光束调控中,曲面上每一点有无数条光线经过。零扩展度光束调控是非零扩展度光束调控的基础(如面向扩展光源光束调控的优化设计法^[15-29]和反馈优化设计法^[30-42]),当光源发光面尺寸较小(满足五倍法则^[43])或光束发散角较小,光束光学扩展量对光束调控所产生的影响可以忽略不计时,采用零扩展度光束调控不仅可以极大简化设计过程,还可以获得较好的光束调控效果。因此,当前大部分自由曲面光束调控的研究工作集中于零扩展度光束调控。

自由曲面零扩展度光束调控方法主要包括光线映

射法^[10, 44-65]、Monge-Ampère(MA)方法^[66-81]和支持二次曲面法(SQM)^[82-89]三大类。光线映射法将自由曲面设计分为两个过程:1)根据能量守恒和预定的能量分配方式建立入射光线传播方向和目标面上光线落点位置之间的映射关系,该映射关系在入射光方向和出射光方向之间建立了一一对应关系;2)根据该映射关系并利用 Snell 定律构建自由曲面来满足这一映射关系。光线映射法的关键在于找到一个满足曲面连续性可积条件的映射关系^[90]。然而,在根据能量最优分配求解映射关系时难以将曲面对光线的偏折考虑在内,这导致所得到的最佳映射关系通常无法满足曲面连续性可积条件,极易造成实际出射光束分布和目标出射光束分布之间存在较大的偏差。采用 SQM 进行自由曲面光束调控,设计的第一步为将目标照明离散化,将一个连续照明问题变成一个离散照明问题。然后,利用二次曲面的光学性质使光源空间不同子区域发出的光束经过与之相对应的二次曲面偏折后聚焦至目标照明面上的特定位置处。该方法可以实现很复杂的照明分布,但其需要数万个二次曲面才能构建出光滑连续的自由曲面。此外,在设计包含多个自由曲面的光束调控元件时,该方法的有效性仍有待进一步探索。MA 方法根据 Snell 定律和局部能量守恒定律,将自由曲面光束调控问题转换成一个带有非线性边界条件的椭圆型 MA 方程。MA 方法自动满足曲面连续性可积条件,可获得连续易加工的自由曲面。同时,MA 方法无

收稿日期: 2022-10-17; 修回日期: 2022-11-15; 录用日期: 2022-11-22; 网络首发日期: 2023-01-04

基金项目: 国家自然科学基金(62022071, 12074338)、国家重点研发计划(2021YFB2802200)

通信作者: *wrengmao@zju.edu.cn

需预先指定光线落点位置,通过控制曲面的高斯曲率分布便可实现对光束传输的高效灵活调控。因此,MA方法被认为是当前最先进的满足可积分条件的自由曲面设计方法^[38]。基于此,本文主要介绍MA方法的研究进展。

1972年,Schruben等^[66]将一个实现特定辐射照度分布的反射器设计转化成一个椭圆型MA方程,但当时并未对该MA方程进行求解。2002年,Ries等^[67]根据能量守恒定律,以及入射波前曲率、光学曲面曲率和出射波前曲率三者之间的关系,将一个实现特定辐射照度分布的自由曲面透镜设计转化成一个椭圆型MA方程,用一个连续的自由曲面透镜实现了一个带“oec”字样的复杂方形照明,充分展示了自由曲面在光束调控中的优越性和MA方法的优势。然而,Ries并未公布求解MA方程的具体方法,这使得其他研究人员只能另寻他路以探索新的方法来解决自由曲面光束调控问题,导致MA方法在之后的十余年中没有任何公开的研究进展报道。2013年,Wu等^[68]从Snell定律和局部能量守恒定律出发,基于理想光源近似,将自由曲面光束强度调控这一逆问题转化成一个带有非线性边界条件的椭圆型MA方程,并首次公开了MA方程的详细数值求解过程,这对推动自由曲面光束强度调控的发展有着积极作用。在此基础上,Wu等围绕该自由曲面光束调控方法开展了系统的深入研究工作。针对单个折射自由曲面在实现大角度偏折时容易产生全反射导致MA方法失效的问题,Wu等^[75]进一步建立了多自由曲面光束调控的数学模型,可实现对大数值孔径入射光束的高效灵活调控。针对垂轴光路布局(光轴与观测面垂直)对自由曲面光束调控应用范围存在极大制约这一问题,Wu等^[77,79]将观测平面的三维空间位姿纳入光束调控,建立了非垂轴观测平面上自由曲面光束强度调控的数学模型,摆脱了垂轴光路布局对光束调控的制约,在实现对光束传输高效灵活调控的同时获得了更加灵活的系统光路布局。光学自由曲面除了用于单独调控光束强度分布外,还可以同时调控光束强度和波前分布。在自由曲面光束强度调控的基础上,Yang等^[78]进一步将等光程约束纳入光束调控,构建了自由曲面光束强度和波前调控的数学模型,通过对两个自由曲面的协同设计可同时实现对光束强度和波前的高效灵活调控。上述一系列工作充分体现了MA方法在自由曲面光束调控中的优越性。本文主要基于Wu等的研究工作,详细介绍MA方法的发展历程,并结合一些典型设计来展示MA方法的特性。

2 自由曲面光束调控模型构建

MA方法的关键和难点在于如何根据Snell定律和能量守恒定律建立表征入射细光束能量守恒和分配的MA方程。本章将基于理想光源(点光源和平行光)近似,分别介绍自由曲面光束强度调控模型,以及双自

由曲面光束强度和波前调控模型的构建过程。

2.1 自由曲面光束强度调控

2.1.1 基于点光源近似的自由曲面光束强度调控模型构建

当光源的尺寸对光束调控的影响可以忽略时,光源可以视为点光源。图1给出了三维空间中任意倾斜观测平面上自由曲面光束强度调控示意图^[79]。假定透镜入射面和出射面均为自由曲面,光源S位于全局直角坐标系 xyz 的原点,系统光轴与 z 轴重合,透镜的入射面和出射面与 z 轴的交点分别为 B_1 和 B_2 ,目标观测面与 z 轴的交点为 B_3 。假定目标面为三维空间中的任意平面,以 B_3 为原点建立局部直角坐标系 $x'y'z'$,其中 $x'y'$ 平面与目标照明面重合, z' 轴与 z 轴的夹角为 β , z' 轴在 xy 面上的投影与 x 轴的夹角为 α ,不同的 α 和 β 的组合对应于三维空间中的任意目标平面。由光源S出射的光线先后交入射面和出射面于P点和Q点,经自由曲透镜偏折后出射光线与目标面相交于点T。

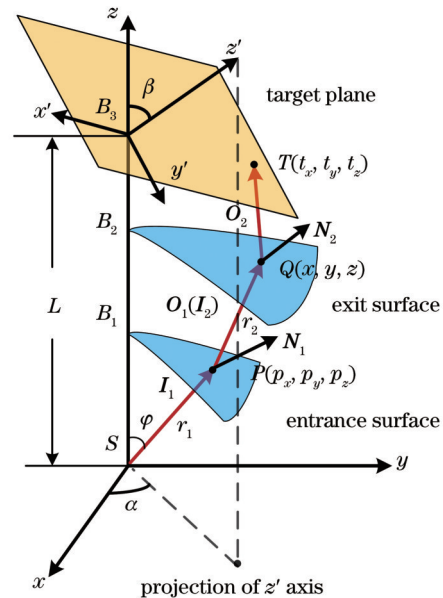


图1 基于点光源近似的自由曲面光束强度调控模型
Fig. 1 Model of freeform surface beam intensity control based on point source approximation

令光源S和P点之间的距离为 r_1 ,P点和Q点之间的距离为 r_2 。显然,P点的位置向量可以表示为 $P=r_1 \cdot I_1$,其中 I_1 为入射光线的单位方向向量。由此可得,入射面上在P点处的单位法矢为 $N_1=(P_0 \times P_\varphi)/|P_0 \times P_\varphi|$,其中 P_0 和 P_φ 分别为位置向量P关于 θ 和 φ 的一阶偏导数, θ 和 φ 分别为光线在球坐标系下的方位角和极角,如图1所示。进一步,由Snell定律可求得入射面上P点的出射光线方向向量 O_1 。令 I_2 为出射面的入射光线,可知 $O_1=I_2$ 。类似地,出射面上Q点的位置矢量可以表示为 $Q=P+r_2 \cdot I_2$,曲面在Q点处的单位法矢为 $N_2=(Q_0 \times Q_\varphi)/|Q_0 \times Q_\varphi|$,随后出射光线 O_2 也同样可以根据Snell定律计算得到。在得到 O_2 之后,根据光线

在均匀介质空间的传输规律,可求得出射光线在目标面上的落点 T 的全局坐标,即

$$\begin{cases} t_x = x + (t_z - z)O_{2x}/O_{2z} \\ t_y = y + (t_z - z)O_{2y}/O_{2z} \end{cases}, \quad (1)$$

式中: t_x, t_y, t_z 分别为落点 T 在全局坐标系中的坐标; O_{2x}, O_{2y}, O_{2z} 分别为 O_2 的三个分量。

假定目标观测平面在全局坐标系下满足表达式 $Ax + By + Cz + D = 0$, 其中 $A = \sin \beta \cos \alpha, B = \sin \beta \cdot \sin \alpha, C = \cos \beta, D = -L \cos \beta$, 此处 L 为 S 与 B_3 之间的距离。当 $\alpha = \beta = 0$ 时, 目标面与光轴垂直。当 α 和 β 不同时为零时, 光束调控系统具有倾斜的光路布局。显然, 不同的 α 和 β 的组合对应于三维空间中不同方位

的目标照明面。由于落点 T 位于目标面上, 因此 T 点的坐标还应满足目标面的方程, 将式(1)代入目标面的表达式中可得

$$\begin{cases} t_x = x - \frac{(Ax + By + Cz + D)O_{2x}}{AO_{2x} + BO_{2y} + CO_{2z}} \\ t_y = y - \frac{(Ax + By + Cz + D)O_{2y}}{AO_{2x} + BO_{2y} + CO_{2z}} \\ t_z = \frac{(AO_{2x} + BO_{2y})z - (Ax + By + D)O_{2z}}{AO_{2x} + BO_{2y} + CO_{2z}} \end{cases} \quad (2)$$

式(2)给出了 T 点在全局坐标系中的坐标, 将该全局坐标变换到局部坐标系 $x'y'z'$ 中可得 T 点的局部坐标为

$$\begin{cases} t'_x = \frac{Ex + Fy}{C} - \frac{(Ax + By + Cz + D)(EO_{2x} + FO_{2y})}{C(AO_{2x} + BO_{2y} + CO_{2z})} \\ t'_y = Ey - Fx + \frac{(Ax + By + Cz + D)(FO_{2x} - EO_{2y})}{AO_{2x} + BO_{2y} + CO_{2z}} \\ t'_z = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

式中: $E = \cos \alpha; F = \sin \alpha$ 。假定光束在传输过程中无能量损耗(不考虑菲涅耳反射和材料吸收所带来的能量损耗), 此时入射细光束能量经自由曲面折射后完全到达目标面上。因此, 入射细光束在传输过程中应遵循局部能量守恒关系

$$E(t'_x, t'_y)dt'_x dt'_y - I_1(\theta, \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi = 0, \quad (4)$$

式中: $E(t'_x, t'_y)$ 为细光束在目标落点 T 处产生的照度值; $I_1(\theta, \varphi)$ 为入射光束在 θ 和 φ 方向上的发光强度值。式(4)表征了细光束能量在传播过程中的守恒和分配关系。此外, 式(3)建立了 T 点的坐标和入射光束方位角之间的变换关系, 即 $dt'_x dt'_y = |J(T)| d\theta d\varphi$ 。由式(4)进一步可得

$$E(t'_x, t'_y) |J(T)| - I_1(\theta, \varphi) \sin \varphi = 0, \quad (5)$$

式中: $|J(T)|$ 为位置矢量 T 的雅克比矩阵的行列式, 表达式为

$$|J(T)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial t'_x}{\partial \varphi} & \frac{\partial t'_x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial t'_y}{\partial \varphi} & \frac{\partial t'_y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \quad (6)$$

对式(5)进行化简整理即可得到一个椭圆型 MA 方程

$$A_1(r_{200}r_{2\varphi\varphi} - r_{20\varphi}^2) + A_2r_{2\varphi\varphi} + A_3r_{200} + A_4r_{20\varphi} + A_5 = 0, \quad (7)$$

式中: r_{200} 为 r^2 在 θ 方向上的二阶偏导数; $r_{2\varphi\varphi}$ 为 r^2 在 φ 方向上的二阶偏导数; $r_{20\varphi}$ 为 r^2 在 θ 和 φ 方向上的二阶混合偏导数; $A_i (i=1, 2, \dots, 5)$ 为 $r_{2\varphi}, r_{20}, r_2, \theta$ 和 φ 的函

数。入射光束包含内部光线和边界光线, 由上述推导可知, 内部光线应满足由式(7)代表的自由曲面调控中的细光束能量守恒和分配关系。对于边界光线, 还需定义一个边界条件来保证边界光线经过自由曲面的折射后能够落在目标照明区域的边界上 $[\partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_2]$, 其中 Ω_1 和 Ω_2 分别为入射光束强度 $I_1(\theta, \varphi)$ 和目标照度 $E(t'_x, t'_y)$ 的分布区域, $\partial\Omega_1$ 和 $\partial\Omega_2$ 分别为区域 Ω_1 和 Ω_2 的边界], 即

$$\begin{cases} t'_x = t'_x(r_{20}, r_{2\varphi}, r_2, \theta, \varphi) \\ t'_y = t'_y(r_{20}, r_{2\varphi}, r_2, \theta, \varphi) \end{cases} \quad (8)$$

式(7)和式(8)构成了自由曲面光束强度调控模型, 是一个带有非线性边界的 MA 方程。式(7)中包含了入射面的面形参数, 在求解出射面之前需要先获得入射面。需要指出的是, 上述光束调控模型同样可以用于求解入射自由曲面, 此时只需要定义一个球心位于光源 S 处的虚拟入射球面^[79]。因此, 该光束调控模型不仅适用于单自由曲面光束强度调控, 还适用于多自由曲面光束强度调控。此外, 该光束调控模型对系统的光路布局没有限制, 可在三维空间中任意倾斜观测面上实现对光束传输的准确高效调控, 具有极强的普适性。

2.1.2 基于平行光近似的自由曲面光束强度调控模型构建

激光束整形是自由曲面光束调控的一个重要应用, 本节将基于平行光近似构建自由曲面光束强度调控模型, 图 2 给出了用于调控入射平行光束强度分布的自由曲面设计示意图^[13], 此处目标照明面与光轴垂

直。假定自由曲面透镜的入射面为平面,出射面为自由曲面,入射面与全局坐标系 xyz 中的 xy 面重合,入射平行光束沿着 z 轴正向传播,自由曲面与 z 轴交于 B 点。由于入射光束与透镜入射面垂直,故入射光线经入射面偏折后其传播方向不发生改变,随后该光线与出射面交于 P 点。经自由曲面的折射后,其出射光线与目标面相交于 T 点。假定入射光线的单位方向向量为 I ,出射光线的单位方向向量为 O 。由于入射平行光束沿 z 轴正向传播,故可知 $I=(0,0,1)$ 。假定自由曲面上任意一点 P 的坐标可以表示为 $(x,y,z(x,y))$,则自由曲面在 P 点处的单位法矢 N 可以表示为

$$N = \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} (-z_x, -z_y, 1), \quad (9)$$

式中: z_x 和 z_y 分别为 z 坐标在 x 方向和 y 方向上的一阶偏导数。由 Snell 定律可知,入射光线单位方向向量 I 、自由曲面在 P 点的单位法矢 N 和出射光线单位方向向量 O 应满足

$$n_o O = n_i I + P_1 N, \quad (10)$$

式中: n_o 为透镜周围介质的折射率; n_i 为透镜所用材料的折射率。对于空气中的自由曲面反射镜, $n_o = -1$ 且 $n_i = 1$ 。参数 P_1 可以表示为

$$P_1 = \frac{\sqrt{(n_o^2 - n_i^2)(z_x^2 + z_y^2 + 1) - n_i}}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}. \quad (11)$$

由式(10)可得到出射光线单位方向向量 O ,进一步可得到出射光线在目标面上的落点 T 的坐标为

$$\begin{cases} t_x = x - (z - t_z) \frac{O_x}{O_z} \\ t_y = y - (z - t_z) \frac{O_y}{O_z} \end{cases}, \quad (12)$$

式中: O_x, O_y, O_z 分别为出射光线单位方向向量的三个分量。

由式(12)可得到入射光线的坐标 (x,y) 与目标点

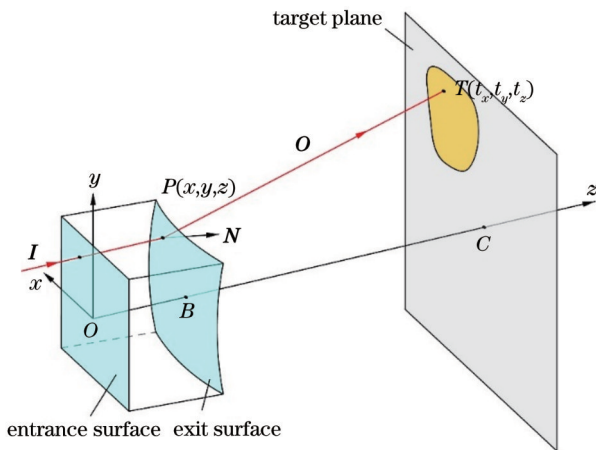


图 2 基于平行光近似的自由曲面光束强度调控模型

Fig. 2 Regulation model of beam intensity control by freeform surface based on parallel light approximation

T 的坐标 (t_x, t_y) 之间的变换关系为

$$dt_x dt_y = |J(T)| dx dy, \quad (13)$$

式中:

$$|J(T)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial x} & \frac{\partial t_x}{\partial y} \\ \frac{\partial t_y}{\partial x} & \frac{\partial t_y}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad (14)$$

该行列式表征了入射细光束经过自由曲面透镜偏折后的扩散和会聚情况。

假设不考虑细光束传输过程中的能量损耗,则细光束在经过自由曲面透镜时应满足局部能量守恒定律

$$E(t_x, t_y) dt_x dt_y - I(x, y) dx dy = 0, \quad (15)$$

式中: $I(x, y)$ 为入射细光束的光强; $E(t_x, t_y)$ 为该细光束在照明面上 T 点处产生的照度值。将式(13)代入式(15)可得

$$E(t_x, t_y) |J(T)| - I(x, y) = 0. \quad (16)$$

类似地,式(16)表征了细光束在自由曲面偏折过程中的能量守恒和分配关系。对式(16)进行整理和化简可得到椭圆型 MA 方程

$$A_1(z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2) + A_2 z_{xx} + A_3 z_{yy} + A_4 z_{xy} + A_5 = 0, \quad (17)$$

式中: z_{xx} 为 z 在 x 方向上的二阶偏导数; z_{yy} 为 z 在 y 方向上的二阶偏导数; z_{xy} 为 z 在 x 方向和 y 方向上的二阶混合偏导数; $A_i (i=1, 2, \dots, 5)$ 为 z_x, z_y, z, x 和 y 的函数。显然,内部光线应满足由式(17)代表的自由曲面调控中的细光束能量守恒和分配关系。对于边界光线,需要让边界光线的传输 $[\partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_2]$, 其中 Ω_1 和 Ω_2 分别为入射光 $I_1(\theta, \varphi)$ 和目标照明区域 $E(t_x, t_y)$ 的分布区域, $\partial\Omega_1$ 和 $\partial\Omega_2$ 分别为区域 Ω_1 和 Ω_2 的边界] 满足边界条件

$$\begin{cases} t_x = t_x(x, y, z, z_x, z_y) \\ t_y = t_y(x, y, z, z_x, z_y) \end{cases}, \quad (18)$$

该边界条件要求入射边界光线经过自由曲面的折射后能够落在目标照明区域的边界上。式(17)和式(18)构成了平行光近似下的自由曲面光束强度调控模型。需要指出的是,虽然该光束调控模型是在直角坐标系下构建得到的,但是该模型同样适用于入射光束截面为圆形的情况,且能够避免自由曲面顶点处的奇异点^[77]。

2.2 自由曲面光束强度及波前调控

在自由曲面光束调控中,当只调控光束强度分布时,至少需要一个自由曲面才能实现对光束传输的准确控制,而当同时调控光束强度和波前时,则至少需要两个自由曲面。相较于光束强度调控,同时调控光束强度和波前对光束调控模型的构建提出了更高的要求。构建自由曲面光束强度及波前调控模型的关键在于如何将入射波前和出射波前之间的光程约束纳入自由曲面设计中。因此,本节将介绍如何构建自由曲面

光束强度及波前调控模型。

图 3 给出了自由曲面光束强度及波前调控模型示意图^[78]。透镜的入射面和出射面均为自由曲面,光源位于坐标系原点。入射光束经透镜偏折后,出射光束在产生预定波前的同时还需在观测平面上产生预定的辐射照度分布。需要指出的是,该预定波前可以是任意的连续波前。为便于描述该类光束调控模型的构建过程,仅以会聚的球面波为例,如图 3 所示。从光源发出的一条光线交入射面于 P 点,该光线于 Q 点穿过出射面后出射光线与目标面相交于 T 点,出射光束的球面波前的球心为 C 点,位于透镜和观测面之间。 ρ 为 P 点与 O 点之间的距离,是一个关于方位角 θ 和极角 φ 的函数。 P 点的位置矢量可以表示为 $P = \rho \cdot I$,由此可以得到入射面在 P 点处沿着 θ 和 φ 方向的切向量为

$$\begin{cases} P_\theta = \rho_\theta \cdot I + \rho \cdot I_\theta \\ P_\varphi = \rho_\varphi \cdot I + \rho \cdot I_\varphi \end{cases}, \quad (19)$$

式中: ρ_θ 和 ρ_φ 分别为 ρ 关于 θ 和 φ 的一阶偏导数; I_θ 和 I_φ 分别为 I 在 θ 和 φ 方向的一阶偏导数。进一步可得入射面在 P 点处的单位法矢为

$$N = \frac{P_\varphi \times P_\theta}{|P_\varphi \times P_\theta|}. \quad (20)$$

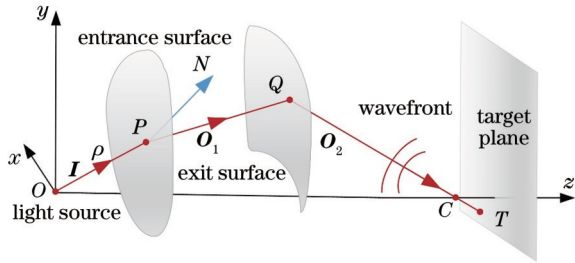


图 3 自由曲面光束强度及波前调控模型

Fig. 3 Model for simultaneous control of beam intensity and wavefront of freeform surface

根据 Snell 定律,在 P 点处入射光线经入射面折射后其出射光线的单位方向向量 O_1 可以表示为

$$nO_1 = I + pN, \quad (21)$$

式中: n 为自由曲面透镜材料的折射率; $p = \sqrt{n^2 - 1 + (I \cdot N)^2} - I \cdot N$ 。 Q 点的位置矢量可以表示为

$$Q = P + |PQ|O_1, \quad (22)$$

式中: $|PQ|$ 为矢量 PQ 的模,表示 P 点与 Q 点之间的距离,显然该距离是一个关于 θ 和 φ 的函数。由于从光源 O 点发出的球面波经自由曲面透镜调控后会转变成会聚的球面波,且球心位于 C 点,由此可知经过 O 点和 C 点的所有光线应具有相同的光程,故该光程可以写成

$$L_{op} = |OP| + n|PQ| + |QC|, \quad (23)$$

式中: $|OP| = \rho$; $|QC|$ 为矢量 QC 的模,表示 Q 点与 C 点之间的距离。将式 (23) 代入式 (22) 可以得到 $|PQ|$, 显然 $|PQ|$ 是关于 $\theta, \varphi, \rho, \rho_\theta$ 和 ρ_φ 的函数。此外,由式 (22) 可知 Q 同样是 $\theta, \varphi, \rho, \rho_\theta$ 和 ρ_φ 的函数。将 $|PQ|$ 重新代入

式 (22) 可求得 Q , 再由 Q 点、 C 点坐标和观测面的位置进一步求得 T 点的 x 坐标和 y 坐标, 即

$$\begin{cases} t_x = Q_x(c_z - t_z)/(c_z - Q_z) \\ t_y = Q_y(c_z - t_z)/(c_z - Q_z) \end{cases}, \quad (24)$$

式中: t_z 为 T 点的 z 坐标; Q_x, Q_y 和 Q_z 为矢量 Q 的三个分量; c_z 为 C 点的 z 坐标。由上述推导可知, t_x 和 t_y 也是关于 $\theta, \varphi, \rho, \rho_\theta$ 和 ρ_φ 的函数, 因此可将 t_x 和 t_y 表示为

$$\begin{cases} t_x = t_x(\theta, \varphi, \rho, \rho_\theta, \rho_\varphi) \\ t_y = t_y(\theta, \varphi, \rho, \rho_\theta, \rho_\varphi) \end{cases}. \quad (25)$$

假设光束调控系统没有能量损耗, 这意味着所有的入射细光束的能量均能被目标照明面收集。由局部能量守恒关系可得

$$E(t_x, t_y) |J(T)| - I(\theta, \varphi) \sin \varphi = 0, \quad (26)$$

式中:

$$|J(T)| = \frac{\partial t_x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial t_y}{\partial \theta} - \frac{\partial t_x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial t_y}{\partial \varphi}, \quad (27)$$

其中 t_x 和 t_y 由式 (25) 得到。将式 (27) 代入式 (26) 中并化简, 可得到一个椭圆型的 MA 方程

$$A_1(\rho_{\theta\theta}\rho_{\varphi\varphi} - \rho_{\theta\varphi}^2) + A_2\rho_{\varphi\varphi} + A_3\rho_{\theta\theta} + A_4\rho_{\theta\varphi} + A_5 = 0, \quad (28)$$

式中: $A_i (i=1, 2, \dots, 5)$ 为关于 $\theta, \varphi, \rho, \rho_\theta$ 和 ρ_φ 的函数; $\rho_{\theta\theta}$ 为 ρ 关于 θ 的二阶偏导数; $\rho_{\varphi\varphi}$ 为 ρ 关于 φ 的二阶偏导数; $\rho_{\theta\varphi}$ 为 ρ 关于 θ 和 φ 的二阶混合偏导数。类似地, 式 (27) 表征了细光束在自由曲面偏折过程中的能量守恒和分配关系。显然, 入射光束的内部光线应满足式 (28) 定义的约束关系。对于边界光线, 需要施加相应的边界条件来确保入射光束的边界光线经自由曲面的调控后落到目标照明区域的边界上 ($\partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_2$), 即

$$\begin{cases} g_x = g_x(\theta, \varphi, \rho, \rho_\theta, \rho_\varphi) \\ g_y = g_y(\theta, \varphi, \rho, \rho_\theta, \rho_\varphi) \end{cases}, \quad (29)$$

式 (28) 和式 (29) 构成了自由曲面光束强度及波前调控模型, 这仍是一个带有非线性边界条件的 MA 方程。从上述模型构建过程可知, 自由曲面光束强度及波前调控模型相较于自由曲面光束强度调控模型, 需要对入射波前和出射波前施加等光程约束, 因此需要至少两个自由曲面来实现对光束强度和波前的同时准确调控。当入射光束为平行光时, 可以在基于平行光近似的自由曲面光束强度调控模型的基础上, 通过添加等光程约束来构建自由曲面强度和波前调控模型。其推导过程与上述过程类似, 故不再赘述。

3 自由曲面光束调控模型求解

由第 2 章的模型构建可知, 自由曲面光束调控模型由边界条件和 MA 方程构成, 边界条件是一个高度非线性的一阶偏微分方程, 而 MA 方程是一个高度非线性的二阶偏微分方程。求解该类光束调控模型是极具挑战的, 故光束调控模型求解是 MA 方法第二个关

键和难点问题。由于无法获得该类光束调控模型的解析解,故 Wu 等^[68]提出了一种求解光束调控模型数值解的方法,该方法主要包含离散化操作、有限差分法和牛顿迭代三个过程。由于基于平行光近似的自由曲面光束强度调控模型是在直角坐标系下构建的,且入射光束截面形状为矩形,故这极大地简化了模型求解过程。本章以基于点光源近似的光束调控模型的求解为例,详细介绍该数值求解方法。

第 2 章中得到的求解自由曲面面型的方程组为一组高度非线性的二阶偏微分方程,该方程的求解是一个具有挑战性的问题,只能通过数值求解的方式来得到近似解^[13]。对于点光源,由方位角 θ 和极角 φ 构成的入射光束分布区域 Ω_1 是一个圆形区域,假设 $\Omega_1 = \{(\theta, \varphi) | 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \varphi_{\max}\}$, 如图 4(a) 所示。首先,分别沿着 θ 方向和 φ 方向对 Ω_1 进行离散,得到 $\Omega_1 = \{(\theta_M, \varphi_N) | \theta = Mh_1, \varphi = Nh_2, M=0, 1, \dots, m, N=0, 1, \dots, n\}$, 其中 $h_1 = 2\pi/(m+1)$ 和 $h_2 = \varphi_{\max}/(n+1)$ 分别为 θ 方向和 φ 方向的离散步长。离散操作后得到一组网格点,该组网格点包含了内部点、边界点和曲面顶点三类网格点,如图 4(a) 所示。每一个网格点对应一条光线,且每一条光线都需要满足一个方程。内部点对应内部光线,需要满足上述表征细光束能量守恒和重新分配的 MA 方程。边界点

对应边界光线,需要满足光束调控模型中的边界条件。由于自由曲面顶点对应时角度 θ 和 φ 都为零,过顶点的光线既不满足 MA 方程,也不满足边界条件,故该顶点是一个奇异点。为求解光束调控模型,还需对过顶点的光线施加约束条件。追迹一组过曲面顶点的轴上光线,其数量为 $m+1$,对于第 M 条轴上光线,自由曲面在图 1 中 B_2 点处的单位法矢可以表示为

$$N_M = \frac{P_{\varphi_M} \times P_{\varphi_{M+1}}}{|P_{\varphi_M} \times P_{\varphi_{M+1}}|}, M=0, 1, \dots, m, \quad (30)$$

式中: P_{φ_M} 为自由曲面在 B_2 点处沿着 φ_M 方向的切向量,如图 4(b) 所示。根据 Snell 定律,可以得到第 M 条轴上光线对应的出射光线,并可进一步求得该出射光线在目标面上的落点坐标 (t_{x_M}, t_{y_M}) 。为了控制该轴上光线的传输,对落点坐标进行约束,即

$$\begin{cases} t_{x_M} - C_x = 0 \\ t_{y_M} - C_y = 0 \end{cases}, \quad (31)$$

式中: C_x 和 C_y 为目标面上光线 $(M=0, 1, \dots, m, N=1)$ 落点坐标的平均值。该约束条件可有效消除奇异性所造成的顶点处曲面不连续问题。显然,式(31)是一个一阶非线性偏微分方程组。经过离散化操作后,便可得到一个大型的非线性偏微分方程组。接下来,需要采用有限差分法将该非线性偏微分方程组转化成非线性方程组。

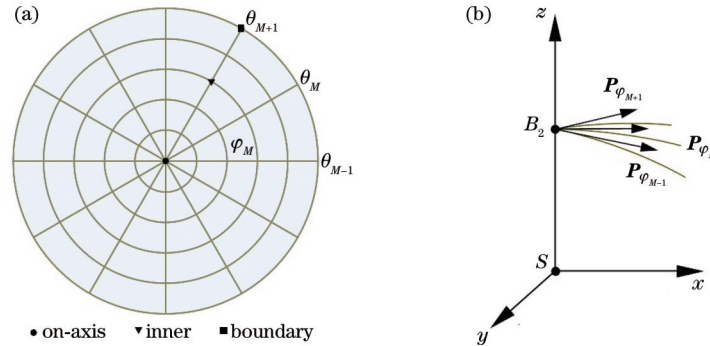


图 4 球坐标系下离散模型。(a)三种入射光线;(b)顶点处约束定义

Fig. 4 Discrete model in spherical coordinate system. (a) Three kinds of incident rays; (b) definition of constraint at vertex

对于内部点所满足的 MA 方程,采用具有二阶精度的九点有限差分格式来替代 MA 方程中的偏导数,如图 5(a) 所示,即

$$\begin{cases} r_\theta = \frac{r_{M+1,N} - r_{M-1,N}}{2h_1} \\ r_\varphi = \frac{r_{M,N+1} - r_{M,N-1}}{2h_2} \\ r_{\theta\theta} = \frac{r_{M+1,N} - 2r_{M,N} + r_{M-1,N}}{h_1^2} \\ r_{\varphi\varphi} = \frac{r_{M,N+1} - 2r_{M,N} + r_{M,N-1}}{h_2^2} \\ r_{\theta\varphi} = \frac{r_{M+1,N+1} - r_{M+1,N-1} - r_{M-1,N+1} + r_{M-1,N-1}}{4h_1h_2} \end{cases} \quad (32)$$

为了保证每个节点具有相同的误差精度,在每个边界点处采用具有二阶精度的前向(或后向)差分来替代边界条件和轴上光线约束条件中的一阶偏导数。以图 5(b) 所示的边界线 $\varphi = \varphi_{\max}$ 为例,在边界点 $r_{M,n}$ 处对 r_φ 采用具有二阶精度的向后差分格式来替代求 r_φ ,采用具有二阶精度的中心差分格式来替代求 r_θ ,即

$$\begin{cases} r_\varphi = \frac{3r_{M,n} - 4r_{M,n-1} + r_{M,n-2}}{2h_2} \\ r_\theta = \frac{r_{M+1,n} - r_{M-1,n}}{2h_1} \end{cases} \quad (33)$$

经过上述差分替代微分后,便将上述偏微分方程组转化成一个大型的非线性方程组

$$F(X) = 0, \quad (34)$$

式中: X 为非线性方程的变量,即所有离散数据点的 r

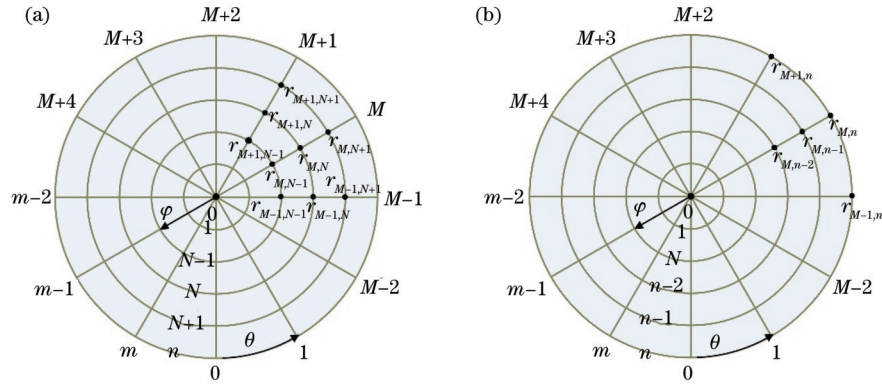


图 5 差分替代微分离散模型。(a)内部点;(b)边界点

Fig. 5 Discrete model with difference instead of differential. (a) Interior points; (b) boundary points

值。随后,可以采用牛顿迭代法求解式(34)所示的非线性方程组,其对应的迭代格式为

$$X_{n+1} = X_n - \frac{F(X)}{F'(X)}, \quad (35)$$

式中: $F'(X)$ 为 $F(X)$ 对 X 的一阶导数。

针对牛顿迭代依赖初始值选取的特性,采用最佳运输理论来求解入射光束和出射光束之间的最佳映射关系,并根据该关系求解自由曲面作为MA方法牛顿迭代的初始值,以保证迭代收敛稳定迅速^[70]。数值求解MA方程可以得到一组自由曲面离散数据点,该组离散数据点便是光束调控逆问题的数值解。最后,通过构建一个过所有数据点的B样条曲面便可得到光束调控模型所对应的自由曲面。

4 自由曲面光束调控设计实例

第2章和第3章分别介绍了自由曲面光束调控模型的构建和求解,本章将结合三个设计实例来展示MA方法的特性及其在自由曲面光束调控中的优势。

4.1 基于点光源近似的自由曲面光束强度调控设计实例(实例1)

在实例1中,以2.1.1节中的基于点光源近似的自由曲面光束强度调控模型为基础,对LED光源的出射光束进行调控,调控模型中目标面位置的灵活性允许在一个由三个相互垂直的平面构成的复合观测面上产生预定的辐射照度分布,如图6(a)所示。可以看出,每一个目标平面与光轴均倾斜相交,且复合观测面关于坐标轴或坐标平面不具有任何对称性,这一复杂的三维空间中任意倾斜面上的光束强度调控问题充分展示了2.1.1节中所述模型的有效性。图6(b)展示了复合观测面上的理想照明效果,图案与背景的照度比为2.5:1.0,每一个平面上的光斑大小为300 mm×300 mm。将该复合目标面应用于2.1.1节中所述的数学模型中,则复合目标面中的每一个平面对应的 β 为54.7°,对应的 α 分别为60°、180°和300°。为实现上述复杂的照明效果,将透镜的入射面和出射面均设计为自由曲面,入射面和出射面的顶点分别距离光源

10 mm和22 mm,即2.1.1节所述模型中 B_1 点和 B_2 点的 z 坐标为10 mm和22 mm。透镜相对光源的收集角全角为120°。光源位于由三个照明图案定义的立方体的对角线上,且光源与复合观测面顶点之间的距离为600 mm,即2.1.1节所述模型中 B_3 点的 z 坐标为600 mm。图6(c)和图6(d)分别给出了自由曲面透镜的入射面和出射面的面形图。由于MA方法可自动满足曲面连续性条件,故保证了入射面和出射面在曲面上每一点处都是光滑连续的。图6(e)给出了自由曲面透镜出射面的高斯曲率分布图,由该图和高斯曲率的定义可知,沿出射光线传播方向传输的功率密度完全由自由曲面高斯曲率决定。图6(f)给出了采用蒙特卡罗光线追迹得到的辐射照度分布结果,与图6(e)中的目标分布吻合得较好,这表明自由曲面光束调控无需借助光阑挡光,只需通过调控曲面的高斯曲率便可实现对光束传输的高效和准确调控。

由于自由曲面透镜的入射面和出射面都是光滑连续的,故十分便于加工,图7(a)为通过注塑成型加工得到的自由曲面透镜。在该实验中,确定光源、自由曲面透镜和三维目标面三者的相对位置是完成实验验证的重点和难点问题。该光学系统的光轴在由三个照明图案所定义的立方体的对角线上,受目标照明面特殊性的影响,在光学系统对准调控过程中,先固定三维目标面,此时系统光轴方向也随之而定,再采用3D打印技术制作出用于夹持自由曲面透镜的光阑和夹持光源支撑杆的夹具,如图7(b)所示。光阑的作用为限制光束收集角为120°,并夹持透镜以限制透镜的光轴与系统光轴平行,光源的方向同样由夹持器件固定。然后,微调安装于透镜和光源下方的位移、俯仰、旋转平台从而实现目标照明效果。图7(c)为实际光束调控效果图,受到加工误差的影响,实验结果图中可以看到图案边缘存在细纹,这与透镜上的刀痕相对应。该实验结果图与图6(f)中的仿真效果基本一致,进一步表明2.1.1节中所描述的基于点光源近似的自由曲面光束强度调控模型解决三维空间中任意倾斜面上光束强度调控问题是十分有效的。

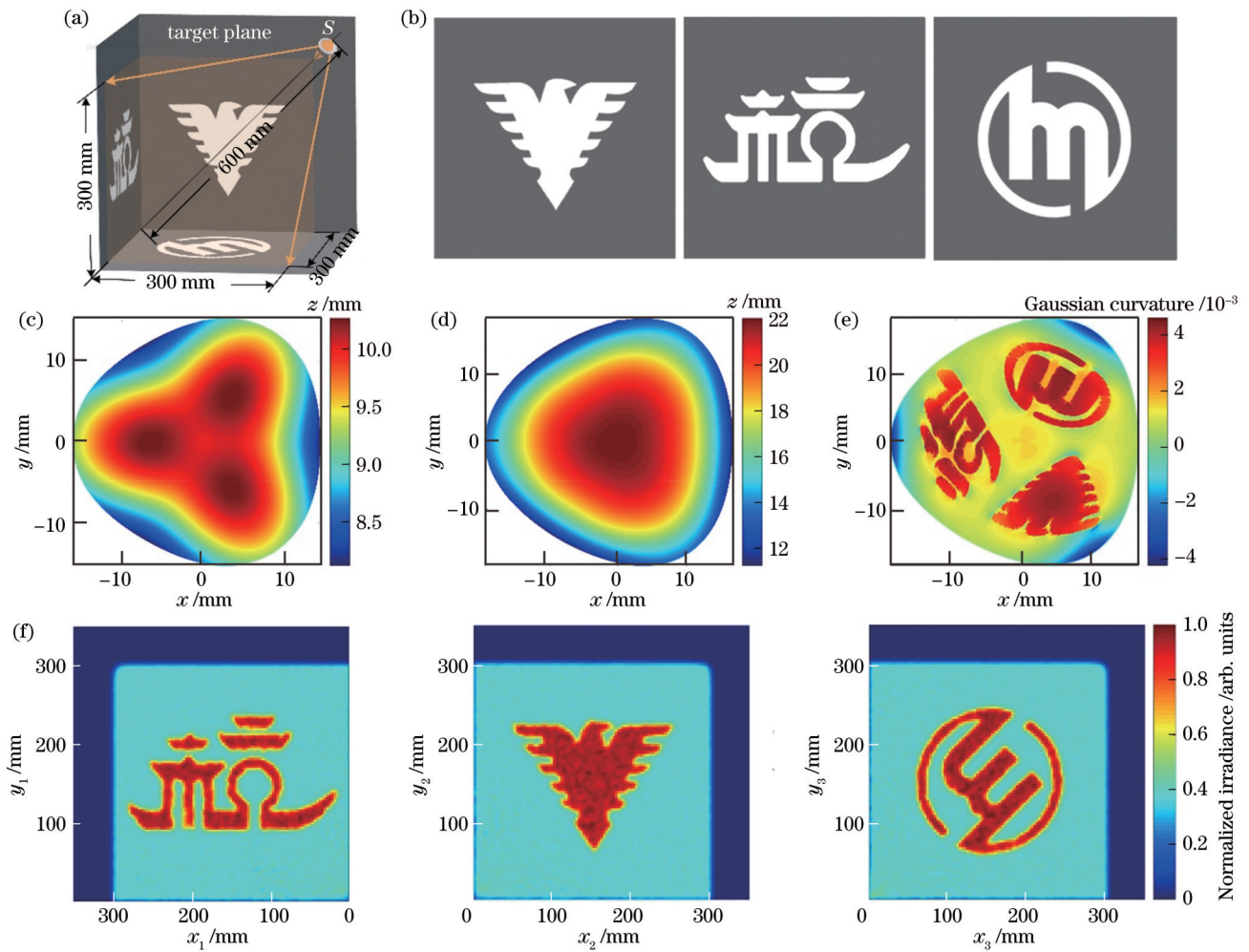


图 6 基于点光源近似的自由曲面光强调控的仿真验证。(a)光束整形系统的几何模型;(b)目标面上的预定照度分布;(c)入射面外形;(d)出射面外形;(e)出射面高斯曲率分布;(f)目标面上辐射照度的仿真结果

Fig. 6 Simulation verification of beam intensity regulation by freeform surface based on point source approximation. (a) Geometrical arrangement of beam shaping system; (b) prescribed irradiance distributions on target planes; (c) entrance surface profile; (d) exit surface profile; (e) Gaussian curvature distribution of exit surface; (f) simulation results of irradiance on target planes

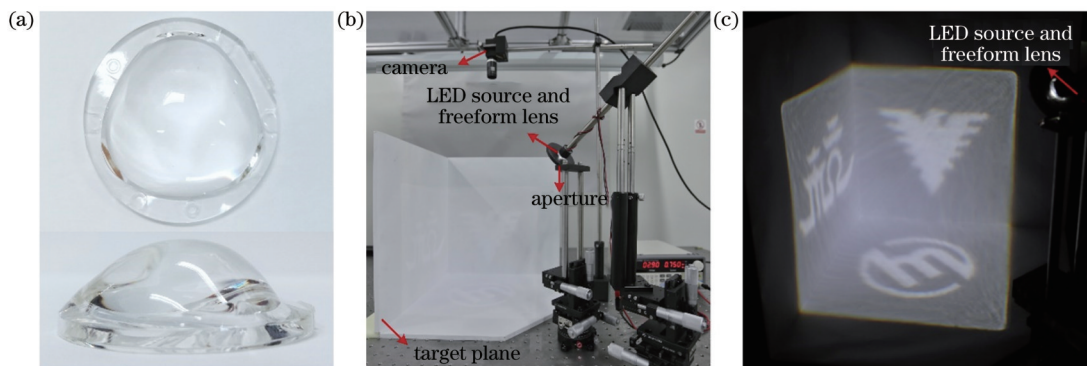


图 7 基于点光源近似的自由曲面光强调控的实验验证。(a)自由曲面透镜;(b)实验装置;(c)实验结果

Fig. 7 Experimental verification of beam intensity regulation by freeform surface based on point source approximation. (a) Freeform lens; (b) experimental setup; (c) experimental result

4.2 基于平行光近似的自由曲面光束强度调控设计实例(实例 2)

实例 1 展示了 MA 方法在解决三维空间中任意倾

斜面上光束强度调控问题的优势,在实例 2 中将进一步展示 MA 方法在自由曲面激光束调控中的优势。本设计以 2.1.2 节中基于平行光近似的自由曲面光束强

度调控模型为基础,目标是对准直后的激光束进行调控,在给定的垂轴观测平面上产生一个内部带有“光电工程”图案的方形照明,图案与背景照度比为 3:1,如图 8(a)所示。透镜的入射面为平面,出射面为自由曲面,目标观测面与透镜入射面之间的距离为 500 mm。

激光束的波长为 532 nm,激光束经扩束准直后在透镜入射面上的强度分布如图 8(b)所示。采用蒙特卡罗光线追迹仿真得到的目标照明面上的辐射照度分布如图 8(c)所示,可见该仿真效果与目标效果吻合良好。图 8(d)给出了透镜出射面的高斯曲率分布。

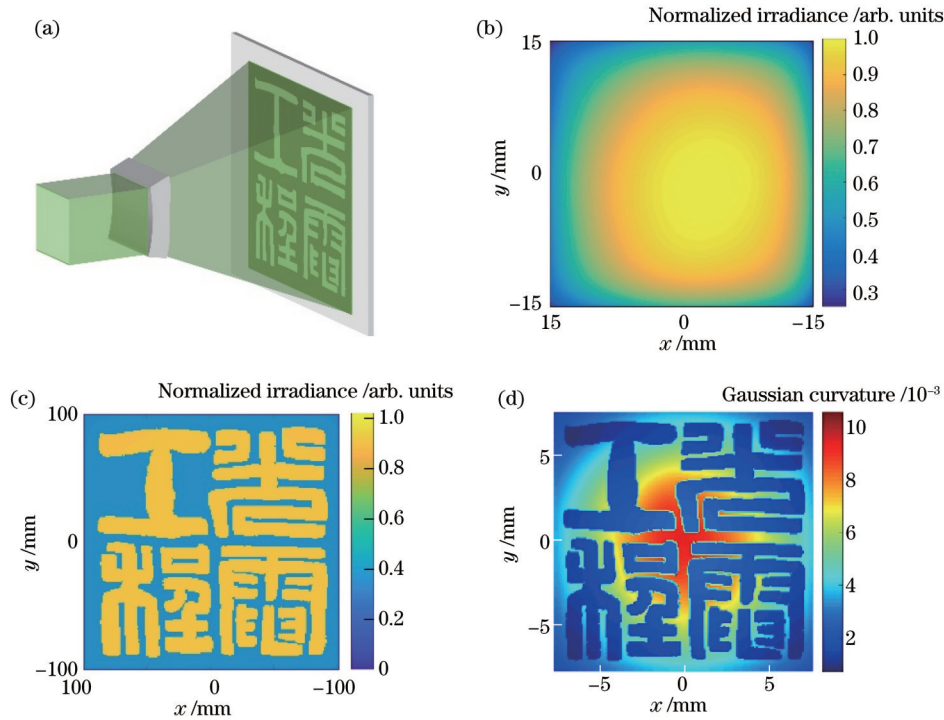


图 8 对平行光的光强进行调控的仿真验证。(a)系统结构图;(b)入射光截面辐射照度分布;(c)仿真结果;(d)自由曲面表面高斯曲率分布

Fig. 8 Simulation verification for beam intensity control of parallel light. (a) System structure; (b) irradiance distribution of incident light section; (c) simulation result; (d) Gaussian curvature distribution of freeform surface

图 9(a)为通过注塑成型加工得到的自由曲面透镜,自由曲面面形为凹面,在光照情况下透镜表面会反射出“光电工程”的字样,这与图 8(d)中的高斯曲率分布相对应。图 9(b)为实验照明装置,自由曲面由 3D

打印的光阑和夹持器件共同固定。图 9(c)为拍摄记录到的目标面上的归一化照度图,该结果表明上述基于平行光近似的自由曲面光束强度调控模型可有效解决激光束整形问题。

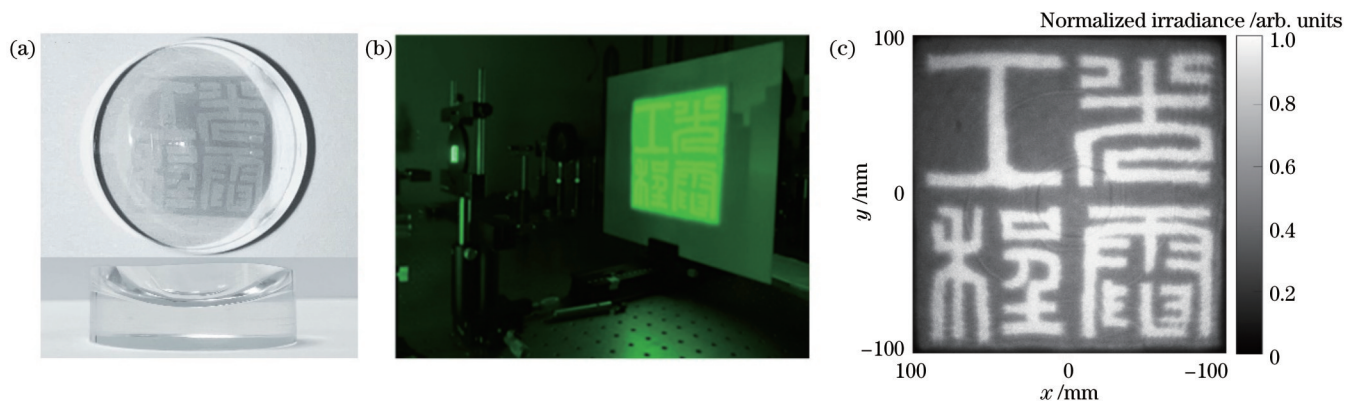


图 9 对平行光的光强进行调控的实验验证。(a)自由曲面透镜;(b)实验装置图;(c)实验结果

Fig. 9 Experimental verification for beam intensity control of parallel light. (a) Freeform lens; (b) experimental setup; (c) experimental result

4.3 自由曲面光束强度及波前调控设计实例 (实例 3)

上述两个实例展示了 MA 方法在自由曲面光束强度调控中的有效性和优势,在实例 3 中将进一步展示 MA 方法在自由曲面光束强度和波前调控中的优势。本实例以 2.2 节中的自由曲面光束强度及波前调控模型为基础,目标是采用自由曲面透镜对具有余弦强度分布的点光源出射光束进行调控,使出射光束具有平面波前,同时在给定的观测平面上产生如图 10(a) 所示的照度分布。由于需要同时控制光束的强度和波前,故透镜的入射面和出射面均需为自由曲面,系统的光路结构如图 10(b) 所示。图 10(c) 给出了自由曲面透镜的三维模型。图 10(d) 和图 10(e) 分别为透镜入

射面和出射面的面形分布,这两张图进一步展示了自由曲面透镜的非对称性和基于 MA 方法设计得到的自由曲面面形的连续性。图 10(f) 和图 10(g) 分别为入射面和出射面的高斯曲率分布。为验证所提方法对波前调控的准确性,计算了距离光源 30 mm 处的观测平面上出射光束的实际波前和理想目标平面波前之间的光程偏差,如图 10(h) 所示,平均光程差为 0.0315λ , 其中 $\lambda=0.5461\ \mu\text{m}$ 。出射光束在该观测平面上的辐照度分布如图 10(i) 所示。由图 10(h) 和图 10(i) 可知,实际光束调控效果与目标之间吻合得较好。该实例也再次表明上述自由曲面光束强度及波前调控模型的有效性和 MA 方法的优势。

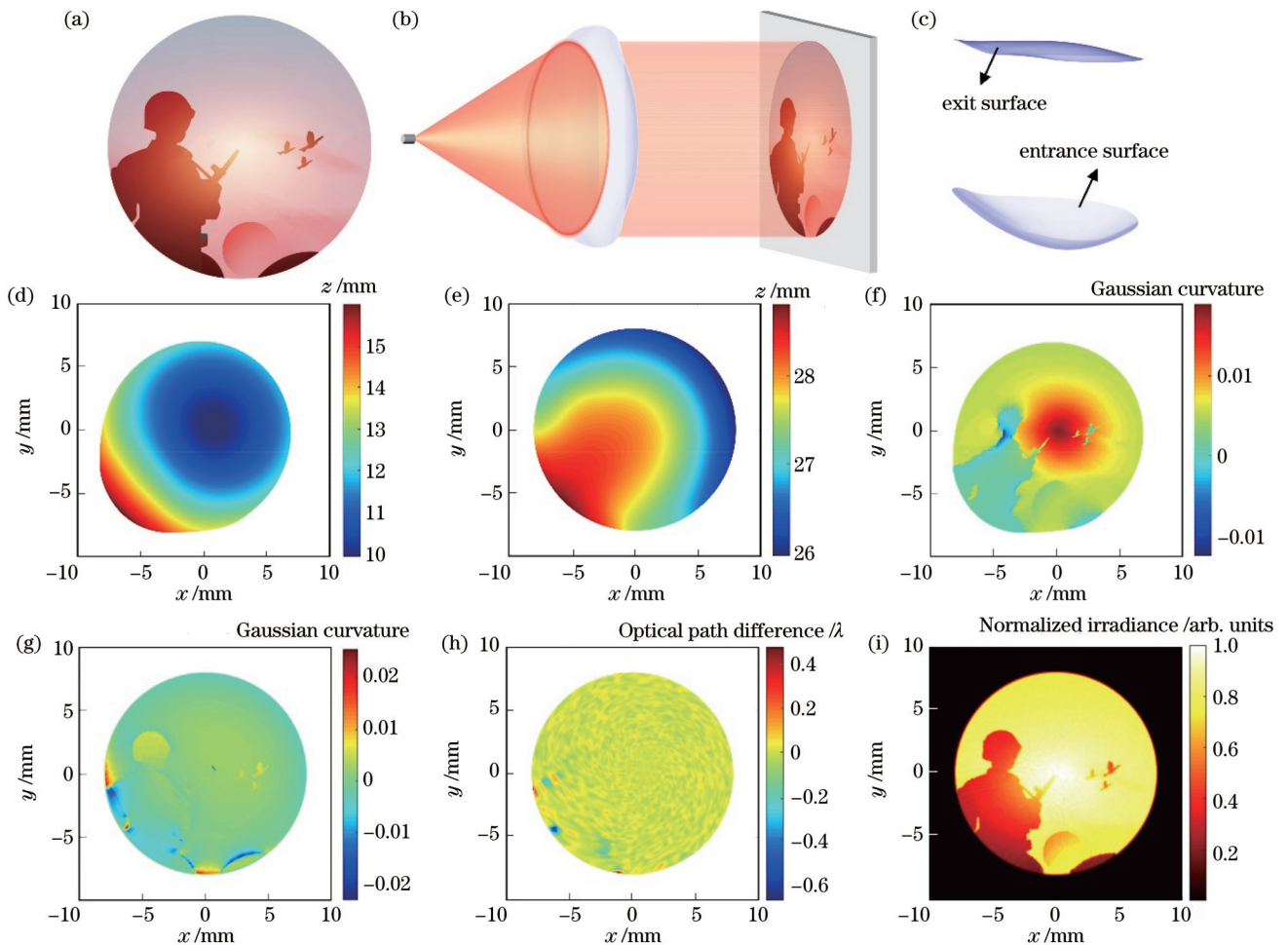


图 10 点光源光强和波前同时调控的光束整形案例。(a)目标照度分布;(b)系统结构图;(c)自由曲面透镜模型;(d)入射面面形;(e)出射面面形;(f)入射面高斯曲率;(g)出射面高斯曲率;(h)目标面上的光程差;(i)目标面上的辐射照度分布
 Fig. 10 Example of beam shaping with simultaneous control of light intensity and wavefront of point light source. (a) Target illuminance distribution; (b) system structure; (c) freeform lens model; (d) entrance surface profile; (e) exit surface profile; (f) Gaussian curvature of entrance surface; (g) Gaussian curvature of exit surface; (h) optical path difference distribution on target surface; (i) irradiance distribution on target surface

5 结束语

自由曲面光束调控本质是一个根据输入和目标反

求光学自由曲面的逆问题,在基于理想光源近似的自由曲面光束调控方法中,MA 方法被认为是最先进的可自动满足曲面连续可积条件的设计方法。基于 Wu

等的研究工作介绍了 MA 方法的研究进展。针对自由曲面光束强度调控问题,从 Snell 定律和局部能量守恒定律出发,分别建立了基于点光源近似和基于平行光近似的自由曲面光束强度调控模型。针对自由曲面光束强度和波前调控问题,在自由曲面光束强度调控的基础上,通过施加等光程约束建立了自由曲面光束强度和波前调控模型。不论是自由曲面光束强度调控还是强度和波前同时调控,其调控模型都是一个带有非线性边界条件的 MA 方程。列举了三个设计实例来展示该自由曲面光束调控模型的有效性和 MA 方法的优势。MA 方法无需预先规定光线传输路径,无需借助光阑挡光,仅通过调控自由曲面高斯曲率分布便可实现对光束能量传输的高效灵活调控。将光束光学扩展量纳入光束调控是使光束调控系统实现高性能、新功能和小型化的重要突破口。虽然 MA 方法依赖于理想光源近似,但是实际光源可视为由无穷多个理想光源构成,故 MA 方法为今后进一步建立非零扩展度光束调控方法和进一步实现光束调控系统的轻小型化奠定了理论基础。

参 考 文 献

- [1] Reimers J, Bauer A, Thompson K P, et al. Freeform spectrometer enabling increased compactness[J]. *Light: Science & Applications*, 2017, 6(7): e17026.
- [2] Lee X H, Moreno I, Sun C C. High-performance LED street lighting using microlens arrays[J]. *Optics Express*, 2013, 21(9): 10612-10621.
- [3] Moreno I, Avendaño-Alejo M, Saucedo-A T, et al. Modeling LED street lighting[J]. *Applied Optics*, 2014, 53(20): 4420-4430.
- [4] Wu R M, Li K, Liu P, et al. Conceptual design of dedicated road lighting for city park and housing estate[J]. *Applied Optics*, 2013, 52(21): 5272-5278.
- [5] Zhu Z B, Wei S, Liu R, et al. Freeform surface design for high-efficient LED low-beam headlamp lens[J]. *Optics Communications*, 2020, 477: 126269.
- [6] Ge P, Li Y, Chen Z J, et al. LED high-beam headlamp based on free-form microlenses[J]. *Applied Optics*, 2014, 53(24): 5570-5575.
- [7] Ge P, Zhang K, Mao L, et al. An off-axis, reflective system for uniform near-field illumination in optical microscopy[J]. *Lighting Research & Technology*, 2018, 50(5): 787-795.
- [8] Taeye Y, Schulz S L, Messerschmidt B, et al. A miniaturized illumination unit for airy light-sheet microscopy using 3D-printed freeform optics[C]//*Imaging Systems and Applications 2022*, July 11-15, 2022, Vancouver, British Columbia, Canada. Washington, D.C.: Optica Publishing Group, 2022: IW3C.1.
- [9] Jin Y H, Hassan A, Jiang Y J. Freeform microlens array homogenizer for excimer laser beam shaping[J]. *Optics Express*, 2016, 24(22): 24846-24858.
- [10] Feng Z X, Froese B D, Liang R G, et al. Simplified freeform optics design for complicated laser beam shaping[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(33): 9308-9314.
- [11] Mao X L, Li J P, Wang F B, et al. Fast design method of smooth freeform lens with an arbitrary aperture for collimated beam shaping[J]. *Applied Optics*, 2019, 58(10): 2512-2521.
- [12] Schmidt S, Thiele S, Toulouse A, et al. Tailored micro-optical freeform holograms for integrated complex beam shaping[J]. *Optica*, 2020, 7(10): 1279-1286.
- [13] Wu R M, Liu P, Zhang Y Q, et al. A mathematical model of the single freeform surface design for collimated beam shaping[J]. *Optics Express*, 2013, 21(18): 20974-20989.
- [14] Wu R M, Feng Z X, Zheng Z R, et al. Design of freeform illumination optics[J]. *Laser & Photonics Reviews*, 2018, 12(7): 1700310.
- [15] Shatz N E, Bortz J C, Kirkpatrick D, et al. Optimal design of a nonimaging projection lens for use with an RF-powered source and a rectangular target[J]. *Proceedings of SPIE*, 2001, 4446: 171-184.
- [16] Bortz J C, Shatz N E, Keuper M. Optimal design of a nonimaging TIR doublet lens for an illumination system using an LED source[J]. *Proceedings of SPIE*, 2004, 5529: 8-16.
- [17] Davenport T L R, Hough T A, Cassarly W J. Optimization for illumination systems: the next level of design[J]. *Proceedings of SPIE*, 2004, 5456: 81-90.
- [18] Koschel R J. Simplex optimization method for illumination design[J]. *Optics Letters*, 2005, 30(6): 649-651.
- [19] Fournier F, Rolland J. Optimization of freeform lightpipes for light-emitting-diode projectors[J]. *Applied Optics*, 2008, 47(7): 957-966.
- [20] Liu Z J, Liu P, Yu F H. Parametric optimization method for the design of high-efficiency free-form illumination system with a LED source[J]. *Chinese Optics Letters*, 2012, 10(11): 112201.
- [21] Hsieh C C, Li Y H, Hung C C. Modular design of the LED vehicle projector headlamp system[J]. *Applied Optics*, 2013, 52(21): 5221-5229.
- [22] Wang K, Han Y J, Li H T, et al. Overlapping-based optical freeform surface construction for extended lighting source[J]. *Optics Express*, 2013, 21(17): 19750-19761.
- [23] Wu R M, Wang H, Liu P, et al. Efficient optimal design of smooth optical freeform surfaces using ray targeting[J]. *Optics Communications*, 2013, 300: 100-107.
- [24] Zhao S, Wang K, Chen F, et al. Integral freeform illumination lens design of LED based pico-projector[J]. *Applied Optics*, 2013, 52(13): 2985-2993.
- [25] Birch D A, Brand M. Design of freeforms to uniformly illuminate polygonal targets from extended sources via edge ray mapping[J]. *Applied Optics*, 2020, 59(22): 6490-6496.
- [26] Byzov E V, Kravchenko S V, Moiseev M A, et al. Optimization method for designing double-surface refractive optical elements for an extended light source[J]. *Optics Express*, 2020, 28(17): 24431-24443.
- [27] Völl A, Berens M, Wester R, et al. Freeform optics design for extended sources in paraxial approximation exploiting the expectation maximization algorithm[J]. *Optics Express*, 2020, 28(24): 37004-37014.
- [28] Li Y Y, Feng Z X, Cheng D W, et al. Designing double freeform surfaces for large ray bending irradiance tailoring of extended LED sources[J]. *Optics Express*, 2021, 29(9): 13469-13485.
- [29] Zhu Z B, Wei S L, Fan Z C, et al. Freeform illumination optics design for extended LED sources through a localized surface control method[J]. *Optics Express*, 2022, 30(7): 11524-11535.
- [30] Feng Z X, Luo Y, Han Y J. Design of LED freeform optical system for road lighting with high luminance/illuminance ratio[J]. *Optics Express*, 2010, 18(21): 22020-22031.
- [31] Luo Y, Feng Z X, Han Y J, et al. Design of compact and smooth free-form optical system with uniform illuminance for LED source[J]. *Optics Express*, 2010, 18(9): 9055-9063.
- [32] Wang K, Chen F, Liu Z Y, et al. Design of compact freeform lens for application specific light-emitting diode packaging[J]. *Optics Express*, 2010, 18(2): 413-425.
- [33] Kim B, Kim H, Kang S. Reverse functional design of discontinuous refractive optics using an extended light source for flat illuminance distributions and high color uniformity[J]. *Optics Express*, 2011, 19(3): 1794-1807.

- [34] Luo X X, Liu H, Lu Z W, et al. Automated optimization of an aspheric light-emitting diode lens for uniform illumination[J]. *Applied Optics*, 2011, 50(20): 3412-3418.
- [35] Situ W C, Han Y J, Li H T, et al. Combined feedback method for designing a free-form optical system with complicated illumination patterns for an extended LED source[J]. *Optics Express*, 2011, 19(S5): A1022-A1030.
- [36] Li H T, Chen S C, Han Y J, et al. A fast feedback method to design easy-molding freeform optical system with uniform illuminance and high light control efficiency[J]. *Optics Express*, 2013, 21(1): 1258-1269.
- [37] Mao X L, Li H T, Han Y J, et al. Two-step design method for highly compact three-dimensional freeform optical system for LED surface light source[J]. *Optics Express*, 2014, 22(106): A1491-A1506.
- [38] Wester R, Müller G, Völl A, et al. Designing optical free-form surfaces for extended sources[J]. *Optics Express*, 2014, 22(102): A552-A560.
- [39] Mao X L, Li H T, Han Y J, et al. Polar-grids based source-target mapping construction method for designing freeform illumination system for a lighting target with arbitrary shape[J]. *Optics Express*, 2015, 23(4): 4313-4328.
- [40] Wu H, Zhang X M, Ge P. Design method of a light emitting diode front fog lamp based on a freeform reflector[J]. *Optics & Laser Technology*, 2015, 72: 125-133.
- [41] Wu H, Zhang X M, Ge P. Double freeform surfaces lens design for LED uniform illumination with high distance-height ratio[J]. *Optics & Laser Technology*, 2015, 73: 166-172.
- [42] Wei S L, Zhu Z B, Li W Y, et al. Compact freeform illumination optics design by deblurring the response of extended sources[J]. *Optics Letters*, 2021, 46(11): 2770-2773.
- [43] Moreno I, Sun C C. LED array: where does far-field begin? [J]. *Proceedings of SPIE*, 2008, 7058: 70580R.
- [44] Wang L, Qian K Y, Luo Y. Discontinuous free-form lens design for prescribed irradiance[J]. *Applied Optics*, 2007, 46(18): 3716-3723.
- [45] Ding Y, Liu X, Zheng Z R, et al. Freeform LED lens for uniform illumination[J]. *Optics Express*, 2008, 16(17): 12958-12966.
- [46] Wang K, Liu S, Chen F, et al. Freeform LED lens for rectangularly prescribed illumination[J]. *Journal of Optics A*, 2009, 11(10): 105501.
- [47] Zheng Z R, Hao X, Liu X. Freeform surface lens for LED uniform illumination[J]. *Applied Optics*, 2009, 48(35): 6627-6634.
- [48] Wu R M, Li H F, Zheng Z R, et al. Freeform lens arrays for off-axis illumination in an optical lithography system[J]. *Applied Optics*, 2011, 50(5): 725-732.
- [49] Bäuerle A, Bruneton A, Wester R, et al. Algorithm for irradiance tailoring using multiple freeform optical surfaces[J]. *Optics Express*, 2012, 20(13): 14477-14485.
- [50] Bruneton A, Bäuerle A, Wester R, et al. Limitations of the ray mapping approach in freeform optics design[J]. *Optics Letters*, 2013, 38(11): 1945-1947.
- [51] Feng Z X, Huang L, Gong M L, et al. Beam shaping system design using double freeform optical surfaces[J]. *Optics Express*, 2013, 21(12): 14728-14735.
- [52] Feng Z X, Huang L, Jin G F, et al. Designing double freeform optical surfaces for controlling both irradiance and wavefront[J]. *Optics Express*, 2013, 21(23): 28693-28701.
- [53] Ma D L, Feng Z X, Liang R G. Tailoring freeform illumination optics in a double-pole coordinate system[J]. *Applied Optics*, 2015, 54(9): 2395-2399.
- [54] Ma D L, Feng Z X, Liang R G. Freeform illumination lens design using composite ray mapping[J]. *Applied Optics*, 2015, 54(3): 498-503.
- [55] Bösel C, Gross H. Ray mapping approach for the efficient design of continuous freeform surfaces[J]. *Optics Express*, 2016, 24(13): 14271-14282.
- [56] Feng Z X, Froese B D, Liang R G. Freeform illumination optics construction following an optimal transport map[J]. *Applied Optics*, 2016, 55(16): 4301-4306.
- [57] Bösel C, Worku N G, Gross H. Ray-mapping approach in double freeform surface design for collimated beam shaping beyond the paraxial approximation[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(13): 3679-3688.
- [58] Desnijder K, Hanselaer P, Meuret Y. Flexible design method for freeform lenses with an arbitrary lens contour[J]. *Optics Letters*, 2017, 42(24): 5238-5241.
- [59] Gannon C, Liang R G. Ray mapping with surface information for freeform illumination design[J]. *Optics Express*, 2017, 25(8): 9426-9434.
- [60] Mao X L, Xu S B, Hu X R, et al. Design of a smooth freeform illumination system for a point light source based on polar-type optimal transport mapping[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(22): 6324-6331.
- [61] Zhu Z B, Yuan X H, Liang R G, et al. Free-form surface generation in a double pole coordinate system for off-axis illumination application[J]. *Applied Optics*, 2017, 56(4): 771-776.
- [62] Bösel C, Gross H. Double freeform illumination design for prescribed wavefronts and irradiances[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2018, 35(2): 236-243.
- [63] Zhu Z B, Ma D L, Hu Q M, et al. Catadioptric freeform optical system design for LED off-axis road illumination applications[J]. *Optics Express*, 2018, 26(2): A54-A65.
- [64] Wei S L, Zhu Z B, Fan Z C, et al. Least-squares ray mapping method for freeform illumination optics design[J]. *Optics Express*, 2020, 28(3): 3811-3822.
- [65] Zhu Z B, Wei S L, Li W Y, et al. Freeform illumination optics for 3D targets through a virtual irradiance transport[J]. *Optics Express*, 2021, 29(10): 15382-15392.
- [66] Schruben J S. Formulation of a reflector-design problem for a lighting fixture[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1972, 62(12): 1498-1501.
- [67] Ries H, Muschawek J. Tailored freeform optical surfaces[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2002, 19(3): 590-595.
- [68] Wu R M, Xu L, Liu P, et al. Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge-Ampère equation[J]. *Optics Letters*, 2013, 38(2): 229-231.
- [69] Wu R M, Benitez P, Zhang Y Q, et al. Influence of the characteristics of a light source and target on the Monge-Ampère equation method in freeform optics design[J]. *Optics Letters*, 2014, 39(3): 634-637.
- [70] Wu R M, Zhang Y Q, Sulman M M, et al. Initial design with L^2 Monge-Kantorovich theory for the Monge-Ampère equation method in freeform surface illumination design[J]. *Optics Express*, 2014, 22(13): 16161-16177.
- [71] Zhang Y Q, Wu R, Liu P, et al. Double freeform surfaces design for laser beam shaping with Monge-Ampère equation method[J]. *Optics Communications*, 2014, 331: 297-305.
- [72] Brix K, Hafizogullari Y, Platen A. Designing illumination lenses and mirrors by the numerical solution of Monge-Ampère equations[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2015, 32(11): 2227-2236.
- [73] Brix K, Hafizogullari Y, Platen A. Solving the Monge-Ampère equations for the inverse reflector problem[J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2015, 25(5): 803-837.
- [74] Chang S Q, Wu R M, An L, et al. Design beam shapers with double freeform surfaces to form a desired wavefront with prescribed illumination pattern by solving a Monge-Ampère type equation[J]. *Journal of Optics*, 2016, 18(12): 125602.
- [75] Wu R M, Chang S Q, Zheng Z R, et al. Formulating the design

- of two freeform lens surfaces for point-like light sources[J]. *Optics Letters*, 2018, 43(7): 1619-1622.
- [76] Feng Z X, Cheng D W, Wang Y T. Iterative wavefront tailoring to simplify freeform optical design for prescribed irradiance[J]. *Optics Letters*, 2019, 44(9): 2274-2277.
- [77] Wu R M, Yang L, Ding Z H, et al. Precise light control in highly tilted geometry by freeform illumination optics[J]. *Optics Letters*, 2019, 44(11): 2887-2890.
- [78] Yang L, Liu Y, Ding Z, et al. Design of freeform lenses for illuminating hard-to-reach areas through a light-guiding system [J]. *Optics Express*, 2020, 28(25): 38155-38168.
- [79] Shen F Q, Yang L, Hu G Y, et al. Freeform and precise irradiance tailoring in arbitrarily oriented planes[J]. *Optics Express*, 2021, 29(26): 42844-42854.
- [80] Yang L, Shen F Q, Ding Z H, et al. Freeform optical design of beam shaping systems with variable illumination properties[J]. *Optics Express*, 2021, 29(20): 31993-32005.
- [81] Feng Z X, Cheng D W, Wang Y T. Iterative freeform lens design for optical field control[J]. *Photonics Research*, 2021, 9(9): 1775-1783.
- [82] Glimm T, Oliker V. Optical design of single reflector systems and the Monge-Kantorovich mass transfer problem[J]. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, 117(3): 4096-4108.
- [83] Oliker V. Mathematical aspects of design of beam shaping surfaces in geometrical optics[M]//Kirkilionis M, Krömker S, Rannacher R, et al. *Trends in nonlinear analysis*. Heidelberg: Springer, 2003: 193-224.
- [84] Oliker V. Freeform optical systems with prescribed irradiance properties in near-field[J]. *Proceedings of SPIE*, 2006, 6342: 634211.
- [85] Michaelis D, Schreiber P, Bräuer A. Cartesian oval representation of freeform optics in illumination systems[J]. *Optics Letters*, 2011, 36(6): 918-920.
- [86] Canavesi C, Cassarly W J, Rolland J P. Target flux estimation by calculating intersections between neighboring conic reflector patches[J]. *Optics Letters*, 2013, 38(23): 5012-5015.
- [87] Andreeva K V, Kravchenko S V, Moiseev M A, et al. Designing freeform TIR optical elements using supporting quadric method[J]. *Optics Express*, 2017, 25(19): 23465-23476.
- [88] Kravchenko S V, Byzov E V, Moiseev M A, et al. Development of multiple-surface optical elements for road lighting[J]. *Optics Express*, 2017, 25(4): A23-A35.
- [89] Oliker V. Controlling light with freeform multifocal lens designed with supporting quadric method(SQM) [J]. *Optics Express*, 2017, 25(4): A58-A72.
- [90] Fournier F R, Cassarly W J, Rolland J P. Fast freeform reflector generation using source-target maps[J]. *Optics Express*, 2010, 18(5): 5295-5304.

Research Progress on Monge-Ampère Equation Method for Designing Freeform Beam-Shaping Optics

Shen Fanqi, Yang Lin, Wu Rengmao*, Zheng Zhenrong, Li Haifeng, Liu Xu

College of Optical Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, Zhejiang, China

Abstract

Significance Freeform surfaces are optical surfaces without linear or rotational symmetry. Their flexible surface geometry offers high degrees of freedom, which can be employed to avoid restrictions on surface geometry and create compact yet efficient designs with better performance. Therefore, freeform surfaces can endow beam shaping with more new functions and satisfy the ever-growing demand for advanced beam-shaping systems.

The design of freeform beam-shaping optics can be formulated as follows. Given an input (a light source) and an output (a prescribed irradiance/intensity distribution), one or multiple freeform surfaces are to be designed so that the light rays emitted from the source are redirected to produce the prescribed irradiance/intensity distribution. According to the étendue of the light source, the design of freeform beam-shaping optics can be divided into two groups, i. e., zero-étendue algorithms based on ideal source assumption and design algorithms for extended light sources. The zero-étendue algorithms assume that the spatial or angular extent of the light source is zero, which means that only one single ray passes through each ray-piercing point on the optical surface. However, the situation becomes different when the étendue of the light source is non-zero. There are an infinite number of light rays passing through each ray-piercing point on the optical surface. When the influence of the spatial or angular extent of a light source on the performance of the beam-shaping system can be ignored, the light source can be considered as an ideal source (a point source or a parallel beam). Then, the design of freeform beam-shaping optics can be greatly simplified by zero-étendue algorithms. Additionally, as the extended light source can be considered to be composed of an infinite number of ideal light sources, most of the current designs of freeform beam-shaping optics are involved in zero-étendue algorithms.

The zero-étendue algorithms include three typical methods including the ray mapping method, the support quadratic method (SQM), and the Monge-Ampère (MA) method. A key step in the ray mapping method is to find a ray mapping that can satisfy the integrability condition. Finding such an integrable ray mapping may not be a simple task. The SQM is a process of calculating a set of quadric surfaces which are employed to build a freeform surface, which produces a discrete illumination that is an approximation to the prescribed illumination. This method can achieve very complex irradiance/

intensity distributions, but it requires tens of thousands of quadratic surfaces to construct smooth and continuous freeform surfaces. In addition, the effectiveness of this method still needs to be further explored when multiple freeform surfaces are needed. The MA method converts the design of freeform beam-shaping optics into an elliptic MA equation with a nonlinear boundary condition. This method reveals the mathematical essence of freeform optics design based on the ideal source assumption. It can satisfy the integrability condition automatically and can be implemented efficiently. Its effectiveness has been proven in a wide variety of applications, and the superiorities are verified in LED and collimated laser beam shaping.

Progress In 1972, Schruben converted a prescribed irradiance design with a freeform reflector into a highly nonlinear partial differential equation of second order and proved that such a differential equation of second order is an MA equation. In 2002, Ries demonstrated that a prescribed irradiance design with a freeform lens can be converted into an MA equation based on the relationship between the power density and the curvature of the wavefront. This method can be adopted to tackle complex designs without any symmetry. Finding the solution to the MA equation is a big challenge. Unfortunately, Ries did not introduce the method leveraged to find the solution and did not disclose any further studies on this method in the subsequent ten years. Thus, other researchers in this field had to explore some new ways to solve this inverse problem. In 2013, Wu converted the design of freeform beam-shaping optics into an MA equation and a nonlinear boundary, and first disclosed a numerical method to solve the MA equation. Over the last ten years, Wu generalized the MA method to achieve freeform and precise irradiance tailoring in arbitrarily oriented planes, and to design freeform optics for flexible and precise control of the intensity and wavefront of a light source.

Conclusions and Prospects The MA method relying on the ideal light source assumption is considered as the most advanced point source algorithm that satisfies the integrability condition automatically and can be implemented efficiently. Additionally, it can be generalized to design freeform beam-shaping optics for extended light sources since an extended source can be considered to consist of an infinite number of ideal light sources. The MA method paves a way for the broad application of freeform optics.

Key words optical design; beam shaping; freeform surface; Monge-Ampère equation method; inverse problem