

# 光学学报

## 复杂光学曲面数理描述和设计方法研究

程德文\*, 陈海龙, 王涌天, 杨通

北京理工大学光电学院, 北京 100081

**摘要** 为满足高性能光学系统的设计要求,需要研究面形灵活可控的光学曲面数理描述方法和其相应的分析及设计方法。具有更多自由度的复杂光学曲面可以有效提升光学系统的性能。简要讨论了光学曲面的数理描述方法;概括性地介绍了光学曲面数理描述方法的研究现状与进展,介绍了局部和整体面形控制方法,归纳总结了新的复杂光学曲面数理描述方程,并通过实例证明相关曲面应用的可行性和有效性。最后对曲面数理描述方法的未来发展进行了讨论和展望。

**关键词** 光学设计; 几何光学; 成像系统; 光学曲面; 数理描述

中图分类号 O435 文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS221980

### 1 引言

在完成光学系统结构选型以及确定光学元件数量后,元件表面的数理描述方法在很大程度上影响着系统的像差校正结果和成像性能,决定了光线追迹速度和优化收敛速度,也影响到曲面加工、检测的难易程度,从而影响光电系统整体的研发周期和成本。探索灵活多变、能够描述复杂形状、像差校正能力强并且光线追迹和优化收敛速度都比较快的面形表征方法,对于光学成像系统的设计至关重要<sup>[1]</sup>。另外,面形表征方法在商业软件中的可用性、公差分析的可行性、加工性能也是值得考虑的因素<sup>[2-3]</sup>。

早在 17 世纪,研究者们已经开始对光学曲面进行研究,首先用于描述光学元件的曲面类型为具有旋转对称性的球面。它的描述方式简单,检测方法成熟,便于实现加工和批量化生产。随着光学系统的复杂化,传统球面描述方法的自由度严重不足,难以达到设计要求,研究者们提出了更加复杂的光学曲面描述方法。1984 年, Rodgers<sup>[4]</sup>开展了对非常规非球面描述方法的研究;1997 年, Sasian<sup>[5]</sup>提出了用于环形视场的环形非球面,可以实现具有大数值孔径和高成像质量的光刻光学系统。2000 年, Lerner<sup>[6]</sup>深入分析了多种新型非常规的非球面描述和设计方法;2007 年, Forbes<sup>[7]</sup>提出基于雅可比正交多项式的新型 Q-type 非球面;随后他又将这种正交多项式曲面扩展至双变量,提出具有非旋转对称性的 Q-type 自由曲面<sup>[8]</sup>。两种曲面描述方法中的多项式均具有圆域内的梯度正交特性,可以有效

地解决光学曲面的公差分配与加工、检测环节的衔接问题,且已经集成到光学设计软件 CODEV 中<sup>[9]</sup>;2008 年, Cakmakci 等<sup>[10-11]</sup>提出基于高斯基函数系的自由曲面面形,其可以有效地发挥自由曲面的多参数优势,提高系统的成像性能;2010 年, Rogers<sup>[12]</sup>在偶次非球面的基础上,通过增加变形因子,提出一种可以消除梯形畸变的特殊非球面。2012 年,王庆丰等<sup>[13]</sup>推导了单位圆域和单位方域内的双变量正交多项式曲面的数学模型,详细分析了将不同正交多项式曲面应用于自由曲面拟合的精度问题。2013 年, Kaya 等<sup>[14]</sup>提出基于径向基函数与多项式的混合曲面描述方法,该方法适用于具有任意孔径形状的光学元件。2014 年,周伟等<sup>[15]</sup>研究了非均匀有理 B 样条曲面在光学系统设计和分析中的应用。2015 年, Cheng 等<sup>[16]</sup>提出具有一阶连续性的拼接非球面,该曲面可以为光学系统的设计提供更多的优化变量,且保持了光滑性。2017 年, Broemel 等<sup>[2]</sup>以条纹泽尼克多项式为基函数系,通过格莱姆-施密特正交化方法,提出具有方形域内梯度正交特性的多项式曲面,便于方形孔径光学元件的设计。Sasian 等<sup>[17]</sup>提出在设计微型相机镜头时使用垂足曲线的方法,提高了系统边缘视场的成像质量和公差性能。2018 年,陈海龙等<sup>[18]</sup>提出基于三次多项式的分段环形曲面,同时提出一种从偶次非球面到分段环形曲面的高精度转换方法来获取初始结构;同年,许晨<sup>[19]</sup>提出了离轴二次曲面及以它为基底的自由曲面描述方法,包含焦点信息的离轴二次曲面利于光学系统优化起点的搭建。2021 年, Schiesser 等<sup>[20]</sup>提出基于离轴角参数的离轴二

收稿日期: 2022-11-14; 修回日期: 2023-01-03; 录用日期: 2023-01-09; 网络首发日期: 2023-01-19

基金项目: 国家重点研发计划(2021YFB2802100)、北京市科学技术委员会、中关村科技园区管理委员会资助(Z221100006722011)

通信作者: \*cdwlxk@bit.edu.cn

次曲面描述方法。2022年, Yang等<sup>[21]</sup>研究了高斯基函数自由曲面在光学系统集成化设计中的应用方法, 这对相关曲面的使用具有指导意义; Cheng等<sup>[22]</sup>提出具有非旋转对称性的拼接自由曲面, 可以有效提高离轴反射系统的成像质量。

除通过优化的方式获取复杂光学曲面的各项系数以外, 还可以通过离散点数据的拟合来得到。拟合方法直接影响拟合精度, Zhu等<sup>[23]</sup>提出在进行多项式自由曲面拟合时, 考虑离散点的坐标和法线, 有效提高了拟合结果的实用性。Ye等<sup>[24]</sup>则对复杂孔径自由曲面的拟合和表征方法进行了深入研究, 并提出基于矩阵变换的数值化正交多项式, 以高效、高精度地由离散点数据拟合具有任意孔径形状的自由曲面。

复杂曲面逐渐应用于各种光学系统的设计中。20世纪初, 超环面已经被用于扩展潜望镜的视野<sup>[25]</sup>。James<sup>[26]</sup>利用复杂曲面实现了具有渐变光焦度的眼镜片设计。复杂曲面成功的商用案例之一是在Polaroid<sup>[27-28]</sup>单反相机中的应用, 该应用实现了减小系统尺寸、校正高阶像差的有益效果。Bauer等<sup>[29-30]</sup>已经验证了基于复杂曲面的取景器设计、加工和装调, 结果显示该系统具有优秀的成像质量。在遥感观测方面, 利用复杂曲面光学元件实现了无遮拦离轴反射空间相机<sup>[31-34]</sup>以及高分辨率光谱仪<sup>[35]</sup>, 提升了相关仪器的性能并实现器件的小型化。在近十年发展迅速的近眼显示领域<sup>[36]</sup>, 复杂曲面也发挥了重要作用, 使近眼显示光学系统不断朝着轻薄化、高性能的方向发展<sup>[37-43]</sup>。另外, 在投影放映<sup>[44-46]</sup>、光刻<sup>[47-50]</sup>, 以及其他成像光学系统中<sup>[51-52]</sup>, 复杂曲面的应用也具有举足轻重的意义。同时, 为降低复杂曲面光学系统的设计难度, 研究者们提出了多种设计方法。Yang等<sup>[53]</sup>提出逐点构建自动化设计方法, 该方法可以自动获得高性能的复杂光学系统, 有效节省了人力。Bauer等<sup>[54]</sup>描述了一种基于复杂自由曲面像差理论的设计方法, 该方法对初始结构的选取具有指导意义。Duerr等<sup>[55]</sup>则根据费马原理建立微分方程, 通过直接求解获得所需的光学系统。Chen等<sup>[56]</sup>提出复杂曲面光学系统的拼接融合设计方法, 该方法可将多个离轴抛物面拓展集成为一个复杂光学曲面。Qin等<sup>[57]</sup>建立了复杂曲面光学系统的倾斜公差灵敏度的评价函数, 提出光学系统的脱敏设计方法。这些方法有力地推动了复杂曲面光学系统的进一步发展。

本课题组从实际应用出发, 结合现有的光学曲面描述方法, 对旋转对称和非旋转对称光滑拼接曲面、多项式曲面、高斯基函数自由曲面和样条曲面等进行了长期的研究。本文概括性地介绍了光学曲面数理描述方法的研究现状与进展, 简要讨论了一般曲面的数学描述方法, 并按照光滑拼接曲面、多项式曲面和面形局部描述曲面的分类, 对所提出的新的光学曲面的数理形式及创新应用进行了归纳总结,

列举了相关的应用实例, 证明了曲面的可行性和有效性。最后对曲面数理描述方法的未来发展进行了讨论和展望。

## 2 光学曲面一般描述方法

按照数学定义方式, 可以将光学曲面分为两类: 显式定义曲面和隐式定义曲面。在光学设计优化过程中, 需要计算光线与曲面的交点和交点处曲面的一阶偏导数, 以确定光线经过当前表面后的传播方向。显式定义曲面可以直接决定曲面及偏导数的具体表达式, 相比隐式定义曲面而言, 具有更快的计算速度。几乎所有光学曲面的描述方法均为显式定义函数。用于光学系统设计的隐式定义曲面有非均匀有理B样条曲面(NURBS)<sup>[58]</sup>等。

按照面形公式中任意参数对曲面矢高的影响方式, 又可以将曲面分为全局描述曲面和局部描述曲面。对于全局描述曲面来说, 只要调整曲面方程的任何一个结构参数, 曲面上所有位置的矢高和偏导数都会改变。多项式曲面一般是全局描述曲面。而局部描述曲面则拥有强大的局部面形调节能力, 面形公式中的各个参数对曲面形状的影响范围有限, 因此能够调整曲面的局部曲率, 而不影响其作用区域以外曲面的形状, 如样条曲面、高斯基函数曲面、小波函数曲面<sup>[59]</sup>等。另外, 拼接曲面也具有较好的局部面形描述能力, 同样可以认为是局部描述曲面。

目前大部分光学曲面的描述方法是由显式方程定义的全局描述曲面。对于具有显式定义的光学曲面来说, 一般使用如图1中所示的笛卡儿坐标系 $xyz$ 来描述。其中, 光学系统的光轴沿 $z$ 轴方向, 光学表面的顶点位于坐标原点。在笛卡儿坐标系下, 光学曲面可以描述为

$$z = f(x, y), \quad (1)$$

式中: $x$ 、 $y$ 表示曲面上某点沿 $z$ 轴方向在 $xoy$ 平面上投影的坐标; $z$ 表示光学曲面沿 $z$ 轴方向与 $xoy$ 平面的距离, 即曲面的矢高。

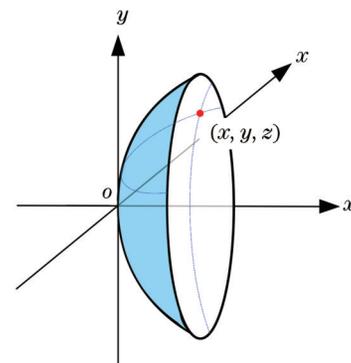


图1 光学表面在笛卡儿坐标系下的描述

Fig. 1 Description of optical surface based on cartesian coordinate system

一般复杂曲面的数学表达式可以分解为两个主要部分:基底项和附加高阶项。基底项如球面、二次曲面、双曲率二次曲面等,主要包含曲面中的二阶成分,表达了曲面的主要形状。附加高阶项如各种多项式,描述了额外的、不对称的曲面形状,并可实现复杂像差的校正。通常来说,基底项为曲面提供了绝大部分的矢高,附加高阶项对曲面贡献的矢高比基底项要小得多<sup>[60-62]</sup>。下面分别介绍常见的基底曲面和复杂曲面的描述方法。

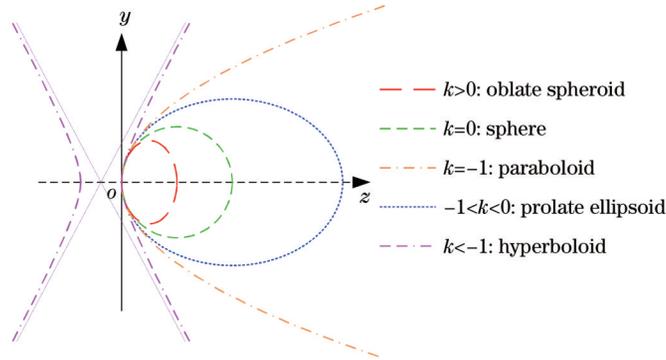


图 2 不同  $k$  值对应的二次曲面在  $yoz$  平面内的轮廓

Fig. 2 Profiles of different surface types in  $yoz$  plane corresponding to different values of  $k$

### 2.1.2 双曲率二次曲面

为了增强光学面形的像差优化能力,可以对二次曲面进行变形,得到更加复杂的面形基底,例如:在反射系统中,对于入射角较大的光束,使用二次曲面基底无法校正系统中的低阶像散,此时可以使用双曲率二次曲面,其定义为

$$z = \frac{c_x x^2 + c_y y^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_x) c_x^2 x^2 - (1 + k_y) c_y^2 y^2}}, \quad (3)$$

式中: $c_x$ 、 $c_y$  分别表示  $x$  和  $y$  方向的曲率; $k_x$ 、 $k_y$  分别表示  $x$  和  $y$  方向的二次曲面常数。

### 2.1.3 离轴二次曲面

在传统的二次曲面描述方法中,如图 3 所示,坐标系的原点位于曲面(以椭球面为例)长轴的顶点处。许晨等<sup>[19,63]</sup>提出包含焦点信息的离轴二次曲面描述方法,这为光学系统初始结构的搭建提供极大的便利。2021 年, Schiesser 等<sup>[20]</sup>提出使用离轴角来描述坐标系  $xyz$  的原点位于二次曲面上任意位置处的离轴二次曲面,这种描述方法已经集成至光学设计软件 CODEV

## 2.1 基底项描述方法

### 2.1.1 二次曲面

大多数复杂曲面描述方法采用一个具有旋转对称特性的二次曲面作为基底项,其定义为

$$z = \frac{c(x^2 + y^2)}{1 + \sqrt{1 - (1 + k)c^2(x^2 + y^2)}}, \quad (2)$$

式中: $c$  表示曲面顶点处的曲率; $k$  表示二次曲面常数。当  $k$  取不同值时,对应的二次曲面面形如图 2 所示。

中<sup>[9]</sup>。新坐标系中的  $z$  轴方向与该位置处曲面的法线方向相同。在此基底上增加附加高阶项时,确保了附加矢高沿着原点的表面法线方向。

在新的  $xyz$  坐标系中,离轴二次曲面方程的定义为

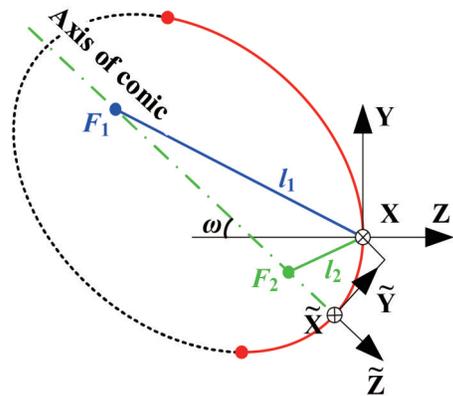


图 3 用离轴角定义的离轴二次曲面<sup>[20]</sup>

Fig. 3 Off-axis conic base surface defined with off-axis angle<sup>[20]</sup>

$$z = \frac{c\sqrt{k_1}(x^2 + k_1 y^2)}{1 - k_2 y + \sqrt{1 - 2k_2 y - c^2 k_1 [(1 + k_1 \cos^2 \omega)x^2 + (1 + k)y^2]}}, \quad k_1 = 1 + k \sin^2 \omega, \quad k_2 = ck \cos \omega \sin \omega \sqrt{k_1}, \quad (4)$$

式中: $\omega$  表示坐标系  $xyz$  原点处曲面法线与二次曲面长轴的夹角。离轴角  $\omega$  是一个有符号的物理量,按照右手螺旋定则,当坐标系原点绕  $x$  轴顺时针旋转时  $\omega$  为

正,反之为负。对于椭球面, $\omega$  可以取任何值。但当曲面为双曲面时,为保证函数的单值性, $\omega$  的值必须满足以下条件:

$$-\arcsin(\sqrt{-1/k}) < \omega < \arcsin(\sqrt{-1/k}). \quad (5)$$

二次曲面的焦点具有特殊光学性质,即以焦点为物点,发出的光线经过二次曲面反射后在另一焦点处成理想像。若曲面描述方法中包含焦点信息,则可以利用上述性质轻易构建光学系统的优化起点。但与传统二次曲面类似,以离轴角定义的离轴二次曲面也不包含与曲面焦点相关的信息,因此并未对光学系统初始结构的搭建产生有益效果。

## 2.2 复杂曲面描述方法

在基底曲面的基础上,通过合理增加高阶项,可以进一步生成灵活性更强、自由度更高的复杂光学曲面描述方法,完成以往难以实现的光学系统设计任务。下面分别介绍现有的复杂曲面描述方法。

### 2.2.1 超环面

超环面是一种具有两面对称性的光学曲面,为光学系统提供的设计自由度较少<sup>[64]</sup>。它分为  $x$  超环面和  $y$  超环面两种,其中,  $x$  超环面关于与  $x$  轴相距  $1/c_y$  的轴旋转对称,关于  $xoz$ 、 $yoz$  平面对称,且在  $x$  和  $y$  两个方向的曲率不同。

### 2.2.2 变形非球面

变形非球面也被称为复曲面,在弧矢和子午面内有不同的曲率和二次曲面常数,且在  $x$  和  $y$  两个方向上都是非球形的。变形非球面没有旋转对称轴,但是它关于  $xoz$  和  $yoz$  平面对称。

### 2.2.3 环形曲面

环形曲面是由 Sasian<sup>[5]</sup>提出的适用于具有环形视场并且中心视场离轴系统的一种光学曲面。该曲面仍然具有旋转对称性,相比偶次非球面具有更快的优化速度,且高阶特性与初阶特性解耦合,从而提升了光学系统性能。但是,这种环形曲面只能用于具有环形视场的系统中,并且没有考虑曲面的光滑度。

### 2.2.4 梯形畸变校正曲面

梯形畸变校正曲面是 Rogers<sup>[12]</sup>提出的一种自由曲面,可用于校正由有光焦度的离轴反射镜产生的梯形畸变。它与偶次非球面的描述方法几乎一致,但是额

外引入了变形因子  $\alpha$  对  $x$ 、 $y$  分别进行不同程度的变换,额外引入梯形畸变参数  $\varphi$  能够消除有光焦度的倾斜反射面所造成的梯形畸变。整个曲面对  $x$ 、 $y$  展开后不再具有旋转对称性,但是,当变形因子  $\alpha=1$ 、 $\varphi=0$  时,该曲面简化成偶次非球面。

### 2.2.5 $xy$ 多项式曲面

$xy$  多项式曲面是通过在二次曲面基底上添加  $x$  与  $y$  的各阶幂次项得到的。该曲面没有旋转对称性,描述方法简单,设计自由度高,校正像差能力强,且易于与加工设备进行数据交换,获得了较为广泛的应用。但此类曲面缺乏正交性,且各单项与光学检测中使用的像差没有直接的关联。

### 2.2.6 泽尼克多项式曲面

标准泽尼克多项式曲面是由 Zernike<sup>[65]</sup>在 1934 年提出的一种具有圆域内正交特性的多项式。它还有其他两种不同的形式,各个形式的区别在于各单项的排列顺序。第一种是在 20 世纪 70 年代提出的扩展边缘泽尼克多项式,它可以更好地拟合在制造大型非球面光学元件时经常遇到的局部误差<sup>[66]</sup>。第二种是在相同年代由 Loomis 提出的条纹泽尼克多项式,它是扩展边缘泽尼克多项式的一个子集,仅包含 37 个单项(扩展边缘泽尼克多项式集合的前 36 项,以及第 49 项)。在成像光学设计中使用的泽尼克多项式曲面通常是在二次曲面基底上添加标准泽尼克多项式。由于泽尼克多项式和光学系统的像差多项式具有相似的表达形式<sup>[67]</sup>,因此可以使用泽尼克多项式对光学系统的像差进行针对性的校正。

### 2.2.7 Q-type 非球面

Q-type 非球面是 Forbes<sup>[7]</sup>提出的一种具有单变量圆域内正交多项式的光学曲面,其目的在于改进现有的偶次非球面。它使用正交基函数系来生成并定义偏离基底面的高阶项,使各项系数都具有十分明确的物理含义,且具有唯一性。Q-type 非球面可以分为  $Q_{\text{bfs}}$  和  $Q_{\text{con}}$  两类。 $Q_{\text{bfs}}$  适合描述非球面度较低的曲面,而非球面度更高的曲面可以使用  $Q_{\text{con}}$  非球面进行描述,它们的定义分别为

$$z_{\text{bfs}} = \frac{c(x^2 + y^2)}{1 + \sqrt{1 - c^2(x^2 + y^2)}} + \frac{u^2(1 - u^2)}{\sqrt{1 - c^2 R_{\text{max}}^2 u^2}} \sum_{n=0}^N a_n Q_n^{\text{bfs}}(u^2), \quad u = (x^2 + y^2)/R_{\text{max}}, \quad (6)$$

$$z_{\text{con}} = \frac{c(x^2 + y^2)}{1 + \sqrt{1 - (1 + k)c^2(x^2 + y^2)}} + u^4 \sum_{n=0}^N a_n Q_n^{\text{con}}(u^2), \quad u = (x^2 + y^2)/R_{\text{max}}, \quad (7)$$

式中:  $R_{\text{max}}$  为光学元件的物理半孔径;  $a_n$  为多项式系数;  $Q_n^{\text{bfs}}(u^2)$  和  $Q_n^{\text{con}}(u^2)$  分别为  $Q_{\text{bfs}}$  和  $Q_{\text{con}}$  非球面中所包含的阶次为  $n$  的正交多项式;  $N$  为多项式的最高次幂。多项式的具体形式请参考文献[7]。

Forbes 提出的两类非球面有效避免了偶次非球面

各个系数之间的相关性,解决了曲面拟合过程中病态格莱姆矩阵导致的优化停滞等问题,同时多项式的系数均具有明确的物理含义,  $Q_{\text{bfs}}$  非球面可以通过 QSL (RMS slope departure for  $Q_{\text{bfs}}$ ) 控制曲面整体的均方根 (RMS) 斜率偏离度,而  $Q_{\text{con}}$  非球面可以通过 QSG

(RMS sag departure for  $Q_{con}$ ) 约束条件控制曲面整体的 RMS 矢高偏离度, 为此类非球面的设计、加工和检测提供了极大的便利。

### 2.2.8 Q-type 多项式自由曲面

Q-type 多项式自由曲面是 Forbes<sup>[8]</sup> 将单变量的

$$z = \frac{c(x^2 + y^2)}{1 + \sqrt{1 - c^2(x^2 + y^2)}} + \frac{1}{\sqrt{1 - c^2(x^2 + y^2)}} \times \left\{ u^2(1 - u^2) \sum_{n=0}^N a_n^0 Q_n^0(u^2) + \sum_{m=1}^M u^m \sum_{n=1}^N [a_n^m \cos(m\theta) + b_n^m \sin(m\theta)] Q_n^m(u^2) \right\}, \quad u = (x^2 + y^2)/R_{\max}, \quad (8)$$

式中:  $a_n^m$  和  $b_n^m$  表示多项式系数;  $N$  表示多项式的最高次幂;  $Q_n^m(u^2)$  表示阶次为  $n$  的正交多项式。式(8)中上标为 0 的参数表示多项式具有旋转对称性质的项。多项式的具体形式请参阅文献[8]。Q-type 多项式自由曲面的多项式系数可以直接用来表征曲面相对于最佳拟合球面的矢高偏差梯度, 其优势是可以简化自由曲面的公差分析过程, 同时进行光学设计和加工检测难度的评价。

### 2.2.9 A-type 多项式自由曲面

A-type 多项式自由曲面是由 Broemel 等<sup>[2]</sup>提出的一种在方形域上具有梯度正交特性的自由曲面描述方法, 它以条纹泽尼克多项式为基函数系, 使用 Bray<sup>[68]</sup> 提出的正交化方法, 将正交特性的定义域由初始的单位圆扩展到外接的单位正方形。因此, A-type 多项式本质上是一种泽尼克多项式的推广形式。根据边界函数和权重因子的不同, 可将 A-type 多项式分为两类。A-type 多项式保持了条纹泽尼克多项式的结构形式和正交特性, 其阶次分布和排列顺序也与条纹泽尼克多项式是等价的, 因此 A-type 多项式中的每一项都与光学系统中的某种像差存在联系并具有直接分析公差的能力。

### 2.2.10 二维切比雪夫和勒让德多项式曲面

二维切比雪夫多项式曲面是一种在方形定义域内具有正交特性的曲面描述方法, 它是两个一维切比雪夫多项式的标量积<sup>[24]</sup>。第一类二维切比雪夫多项式在区间  $\{x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}$  上相对于权重因子  $1/(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$  正交。第二类二维切比雪夫多项式在区间  $\{x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}$  上相对于权重因子  $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$  正交。

正交多项式曲面推广到双变量的一种具有非旋转对称性的曲面描述方法, 它是由一个最佳拟合的球面基底加上一系列圆域内的正交多项式来定义的, 可表示为

勒让德多项式曲面是另外一种具有正交特性的多项式曲面描述方法<sup>[24]</sup>。与切比雪夫多项式类似, 二维勒让德多项式是一维勒让德多项式的标量积。二维勒让德多项式的正交权重因子仅为 1。

## 3 复杂曲面面形优化控制方法

尽管复杂曲面在校正光学系统的像差、减小体积、减少元件数量等方面发挥了重要的作用, 然而在使用它们进行光学系统的优化设计时仍需谨慎。对复杂曲面的形貌进行控制, 一方面是为了确保光学元件的可制造性和可检测性, 另外一方面可以节约相应时间, 降低成本。

为有效控制面形, 设计者们一般使用复杂曲面中的低阶项系数作为变量进行优化设计。然而, 从宏观角度来说, 这种方式减少了设计的自由度, 进而降低了得到更优解的可能性, 这违背了复杂曲面灵活多变、描述能力更强的初衷。设计者们如果对面形具有很强的控制能力, 不妨大胆地使用高阶、多项表面参数进行优化设计。复杂曲面的面形主要通过控制曲面的一阶和二阶偏导数和曲面高斯曲率(最大和最小局部曲率)等来实现。

### 3.1 曲面偏导数计算与优化控制

加工复杂曲面光学元件时, 矢高的剧烈变化可能降低加工精度和效率, 甚至导致零件无法加工。另外, 曲面的凹凸性变化导致加工时间增加。曲面上任意一点沿各个方向矢高变化的快慢和方向, 可以通过曲面的一阶导数来描述。曲面的二阶导数则体现了其凹凸性的变化。以偶次非球面为例, 沿  $x$  方向的一阶偏导数和二阶偏导数分别为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c^3(1+k)x(x^2+y^2)}{\sqrt{1-c^2(1+k)(x^2+y^2)} \left[ 1 + \sqrt{1-c^2(1+k)(x^2+y^2)} \right]^2} + \frac{2cx}{1 + \sqrt{1-c^2(1+k)(x^2+y^2)}} + \sum_{i=2}^p 2ix(x^2+y^2)^{i-1}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = & \frac{4c^3(1+k)x^2}{\sqrt{1-c^2(1+k)(x^2+y^2)} \left[ 1 + \sqrt{1-c^2(1+k)(x^2+y^2)} \right]^2} + \\ & c(x^2+y^2) \left\{ \frac{2c^4(1+k)^2 x^2}{\left[ 1 - c^2(1+k)(x^2+y^2) \right] \left[ 1 + \sqrt{1-c^2(1+k)(x^2+y^2)} \right]^3} + \right. \\ & \left. \frac{c^4(1+k)^2 x^2}{\left[ 1 - c^2(1+k)(x^2+y^2) \right]^{3/2} \left[ 1 + \sqrt{1-c^2(1+k)(x^2+y^2)} \right]^2} + \right. \\ & \left. \frac{c^2(1+k)}{\sqrt{1-c^2(1+k)(x^2+y^2)} \left[ 1 + \sqrt{1-c^2(1+k)(x^2+y^2)} \right]^2} \right\} + \frac{2c}{1 + \sqrt{1-c^2(1+k)(x^2+y^2)}} + \\ & \sum_{i=2}^p \left[ 2i(x^2+y^2)^{i-1} + 4i(i-1)x^2(x^2+y^2)^{i-2} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

式中： $p$  为非球面的最高阶次。在使用复杂曲面进行光学系统设计时，应该注意控制曲面的一阶偏导数绝对值的大小，使曲面矢高的变化趋于平缓；控制一阶偏导数同号来避免曲面发生反向弯曲。另一方面，控制曲面的二阶导数同号，使曲面为完整的凹曲面或凸曲面。

### 3.2 曲面高斯曲率计算与优化控制

通过计算并控制复杂曲面的局部高斯曲率，也可以约束曲面的形貌满足设计、加工要求。曲面上不同位置的曲率大小与观察方向有关，若采用  $k_n$  表示不同方向的曲率，将使得  $k_n$  取得极值（极大值或极小值）的方向称为曲面在该点的主方向，将在主方向上的曲率称为曲面在该点的主曲率<sup>[69]</sup>。曲面上的任一点都存在两个主曲率，分别为该点曲率的极大值  $k_1$  和极小值  $k_2$ 。在微分几何中，将两主曲率的乘积定义为高斯曲率，两主曲率的平均值定义为平均曲率，分别用  $K$  和  $H$  来表示<sup>[70]</sup>：

$$K = k_1 k_2, \quad (11)$$

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2). \quad (12)$$

一般空间中的曲面可以展开，因此曲面实际上是一个二维的量，使用两个坐标即可描述。采用  $u$  和  $v$  来描述展开后的坐标，基于此可以求得曲面微积分和展开后用以描述曲面形状的各种微积分的变量。

对  $x$  的坐标函数分别求关于变量  $u$  和  $v$  的一阶偏导数，就可以得到  $u$  参数曲线和  $v$  参数曲线的切向量，分别记为

$$\mathbf{x}_u = \left( \frac{\partial x^1}{\partial u}, \frac{\partial x^2}{\partial u}, \frac{\partial x^3}{\partial u} \right), \mathbf{x}_v = \left( \frac{\partial x^1}{\partial v}, \frac{\partial x^2}{\partial v}, \frac{\partial x^3}{\partial v} \right), \quad (13)$$

式中： $x^i$  是映射  $x$  的分量函数，计算这些偏微分在点  $(u_0, v_0)$  处的取值，即可得到参数曲线在此点的切向量

$\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$  或速度向量  $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ 。

对于  $M: x(u, v)$ ，当  $x$  是  $M$  的三维曲面到二维平面的正则映射时，可以引出下述惯用符号：

$$E = \mathbf{x}_u \mathbf{x}_u, F = \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v, G = \mathbf{x}_v \mathbf{x}_v, \quad (14)$$

$$l = Ux_{uu}, m = Ux_{uv}, n = Ux_{vv}, \quad (15)$$

$$U = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}, \quad (16)$$

式中： $x_{uu}$ 、 $x_{uv}$  和  $x_{vv}$  为二阶偏导数； $U$  为每点的法向量大小。由此可得到高斯曲率  $K$  和平均曲率  $H$  的计算公式分别为

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}, \quad (17)$$

$$H = \frac{Gl + En - 2Fm}{2(EG - F^2)}. \quad (18)$$

根据两个主曲率与高斯曲率和平均曲率的计算关系，得到曲面主曲率的表达式为

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}. \quad (19)$$

在使用复杂曲面进行光学系统设计时，应根据实际情况控制曲面的局部曲率的大小和正负，保证光学元件的可加工制造性。

现有的商用光学设计软件中已经集成了相关的计算函数。例如，在 CODEV 光学设计软件中可以使用内置的 SDERIVF 函数来计算曲面上任意一点的矢高、一阶导数和二阶导数<sup>[9]</sup>，还可以使用 SASF 函数来计算曲面任意一点的最大和最小曲率<sup>[9]</sup>，并允许将这些局部曲率添加为特殊约束，在优化过程中进行局部面形控制。此外，也可以通过用户自定义宏函数 VFA 约束曲面整体的非球面度，实现面形的整体控制，其与单点局部面形控制方法相结合可以实现更为灵活的面形控制。

## 4 光顺拼接曲面描述方法

将一个完整曲面划分为几个子曲面,并以现有光学曲面分别描述各个子曲面,同时控制相邻子曲面之间保持光滑连接,在数学描述上(物理接触和一阶导数连续)几个子曲面仍构成一个完整的曲面,这是一种实现复杂光学曲面的有效途径。以这种方式生成的复杂曲面描述方法称为拼接曲面。

拼接曲面的光滑性对其应用有着显著影响,不光滑的表面会增加表面加工的难度,并产生杂光以及波前不连续的问题,造成成像质量的下降。以曲面的连续性评价其光滑度,对于连续性的定义如下所述。零阶连续( $C^0$ ):前一段曲线/曲面的终点与后一段曲线/曲面的起点相同;一阶连续( $C^1$ ):连接处一阶导数相同。光学设计应用领域要求拼接曲面至少具有  $C^1$  连续性。这样的拼接曲面对于光学设计和元件加工都有

重要意义:一方面,拼接曲面在不增加光学曲面阶次的前提下,增加了系统的设计变量和自由度;另一方面,光滑曲面不会增加加工难度。

从曲面的灵活性和连续性两方面考虑,分别提出了旋转对称式拼接非球面、旋转对称式分段环形曲面、非旋转对称式拼接自由曲面三种新型的拼接曲面。

### 4.1 旋转对称式拼接非球面(ASAS)

#### 4.1.1 ASAS描述方法

在环形面的基础上,结合偶次非球面提出了 ASAS<sup>[16]</sup>。它既能够适用于环形视场系统,也能用于全视场系统,并且在拼接位置处满足  $C^1$  连续的要求。拼接非球面可以包含一个或多个子曲面,随着子曲面数量的扩展,其可以为光学系统提供足够的设计自由度,以满足设计需求。该曲面仍然具有旋转对称性,它的定义如下:

$$z = \begin{cases} z_1 = \frac{c_1 r^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_1)c_1^2 r^2}} + a_1 r^4 + b_1 r^6 + \dots, & 0 < r \leq r_1 \\ z_2 = \frac{c_2 r^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_2)c_2^2 r^2}} + a_2 r^4 + b_2 r^6 + \dots + \Delta z_1, & r_1 < r \leq r_2 \\ z_3 = \frac{c_3 r^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_3)c_3^2 r^2}} + a_3 r^4 + b_3 r^6 + \dots + \Delta z_2, & r_2 \leq r \leq r_3 \\ \vdots \\ \Delta z_1 = z_1|_{r=r_1} - z_2|_{r=r_1}, \Delta z_2 = z_2|_{r=r_2} - z_3|_{r=r_2}, \dots, \end{cases} \quad (20)$$

式中:对于第一子曲面, $z_1$ 表示矢高, $r_1$ 表示半通光孔径, $c_1$ 表示顶点曲率, $k_1$ 表示二次曲面常数, $a_1$ 、 $b_1$ 分别表示4次、6次非球面系数, $\Delta z_1$ 表示在  $r=r_1$  处第一子曲面和相邻外侧子曲面矢高的差值;下标为2、3、...的参数分别表示向外扩展的子曲面的参数,其物理含义与第一子曲面(下标为1)的参数相对应。图4所示为具有两个子曲面的拼接非球面示意图。

为了使由多个子曲面构成的完整曲面满足  $C^1$  连

续性,需要令相邻子曲面在拼接位置处的矢高等、一阶导数相等。 $C^1$  连续性条件可以表示为

$$z_i|_{r=r_i} = z_{i+1}|_{r=r_i}, \frac{dz_i}{dy}|_{r=r_i} = \frac{dz_{i+1}}{dy}|_{r=r_i} \quad (21)$$

对于拼接非球面,可以在光学设计软件中通过非序列表面(NSS)或者自定义曲面(UDS)的方式进行建模,针对不同的建模方式需要配合相应的优化策略。在优化过程中保证曲面  $C^1$  连续性的伪代码可以表示为

$$c_1 = z_i|_{r=r_i} - z_{i+1}|_{r=r_i}, c_2 = \frac{dz_1}{dy}|_{r=r_i} - \frac{dz_2}{dy}|_{r=r_i}, \\ c_1 = 0, c_2 = 0. \quad (22)$$

#### 4.1.2 ASAS 应用实例

##### 1) 超薄环形物镜系统设计

研究了拼接非球面在超薄环形物镜系统中的应用<sup>[16]</sup>。图5所示为一种环形孔径超薄多反成像系统的光路结构和设计结果。图5(a)所示为该系统的初始结构<sup>[71-72]</sup>。光线由环形孔径进入系统,经过4个同轴偶次非球面的连续反射后,在表面  $S_3$  的中心区域出射并聚焦。该初始结构中表面  $S_1$  和  $S_3$  是两个独立的曲面,表面  $S_2$  和  $S_4$  也是如此。此时系统中共包含4

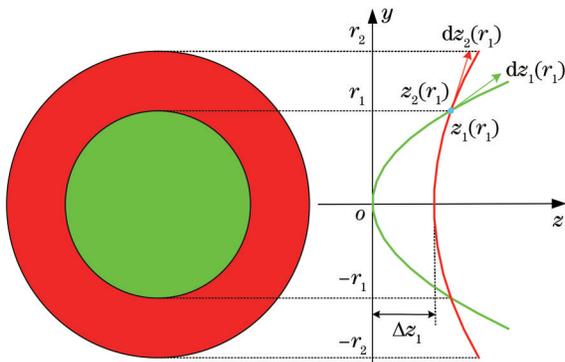


图4 ASAS示意图

Fig. 4 Schematic diagram of ASAS

个独立的光学元件,装调自由度较多。将表面  $S_1$  和  $S_3$ 、表面  $S_2$  和  $S_4$  分别集成为具有两个子曲面的拼接非球面,该系统的光学元件数量可以减少至 2 个。使用 NSS/UDS 的方式对该系统重新进行建模,优化过程中注意控制拼接非球面两个子曲面之间的  $C^1$  连续

性,图 5(b)所示为经过优化后的设计结果,前后两个拼接非球面之间的空气间隔约为 6.5 mm。如图 5(c)所示,系统所有采样视场的调制传递函数(MTF)值在 40 lp/mm 处均高于 0.2,可以满足红外系统的使用要求。

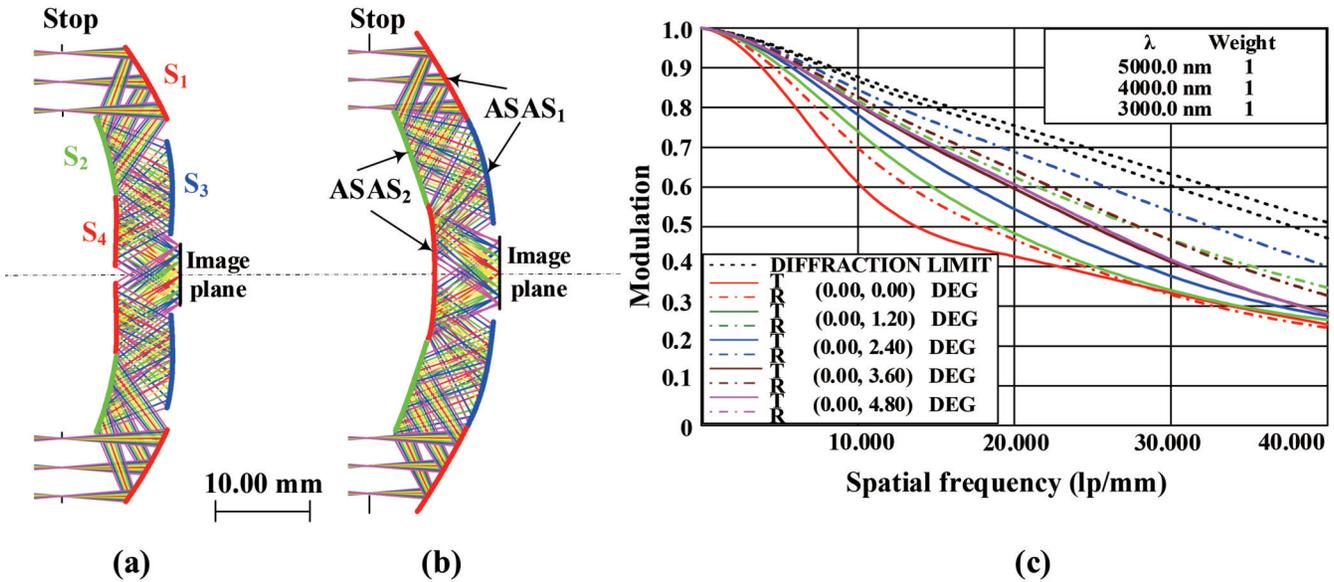


图 5 超薄反射式成像系统<sup>[16]</sup>。(a)偶次非球面初始结构光路图;(b)拼接非球面系统光路图;(c)拼接非球面系统的 MTF 曲线  
Fig. 5 Ultra-thin reflective imaging system<sup>[16]</sup>. (a) Optical layout of initial system using even aspheric surface; (b) optical layout of system using ASAS; (c) MTF curves of system using ASAS

## 2) 超广角物镜系统设计

研究了拼接非球面在超广角物镜系统中的应用<sup>[73]</sup>。图 6 所示为一种超广角成像物镜的光路结构和设计结果。系统光路如图 6(a)所示,半视场角为  $135^\circ$ ,  $0^\circ \sim 50^\circ$  前视场使用折射光路实现成像,  $50^\circ \sim 90^\circ$  侧面视场和  $90^\circ \sim 135^\circ$  后视场通过折反射光路成像。使用偶次非球面优化后镜头的边缘视场成像质量不能满足设计要求,且在优化过程中曲面  $S_1$  的形貌也会随着优化轮次的增加变得难以控制。因此用包含两个子曲面的拼接非球面来描述  $S_1$ :一方面,可以为系统增加优化变量,提升边缘视场像质;另一方面,对  $S_1$  面的两个子区域可以分开进行优化控制,有助于得到更加合理的光路结构。最后将拼接非球面重新拟合为一个偶次非球面,代入 CODEV 中进行简单优化,根据 MTF 评价设计结果的性能。使用偶次非球面的系统 MTF 如图 6(b)所示,在 120 lp/mm 处,各个视场中 MTF 的最小值在 0.1 左右,最大值接近衍射极限,不同视场之间的差异较大。使用拼接非球面的系统 MTF 如图 6(c)所示,其侧面视场及后视场的平均 MTF 值分别较之前都增加了约 0.2,后视场 MTF 的提升更为明显。同时,拼接非球面也为前视场分担了设计压力,前视场的 MTF 平均值也较之前提升了约 0.02。将拼接非球面拟合为偶次非球面并进行优化后的镜头 MTF 曲线如图 6(d)所示,各个视场的 MTF 值基本得到了保持。

个别视场的 MTF 值虽略有降低,但该系统的成像质量仍然明显优于使用偶次非球面的系统。上述设计结果表明拼接非球面明显增大了系统边缘视场,经加工、装调、测试后该折反式广角镜头具有良好的成像效果。

## 4.2 旋转对称式分段环形曲面 (APS)

### 4.2.1 APS 描述方法

在光学设计领域中,多项式曲面是一类应用比较广泛的曲面形式,其结构灵活、容易扩展、优化速度快、像差校正能力强,是一种性能优良的曲面描述方法。基于三次多项式,提出一种具有  $C^1$  连续性的 APS<sup>[18]</sup>,它的定义为

$$z = \begin{cases} z_1 = a_1 r^3 + b_1 r^2 + c_1 r + d_1, & 0 < r \leq r_1 \\ z_2 = a_2 r^3 + b_2 r^2 + c_2 r + d_2, & r_1 < r \leq r_2 \\ z_3 = a_3 r^3 + b_3 r^2 + c_3 r + d_3, & r_2 < r \leq r_3 \\ \vdots \end{cases} \quad (23)$$

式中:对于第一子曲面,  $z_1$  表示曲面矢高,  $r_1$  表示半通光孔径,  $a_1, b_1, c_1, d_1$  分别表示各项系数;下标为 2、3、... 的参数分别表示向外扩展的子曲面的参数,其物理含义与第一子曲面(下标为 1)的参数相对应。分段环形曲面在  $yoz$  平面内的轮廓如图 7 所示,该轮廓绕  $z$  轴旋转后即可得到分段环形曲面。

对于分段环形曲面,可以在光学设计软件中通过自定义曲面的方式进行建模。为保证曲面满足  $C^1$  连

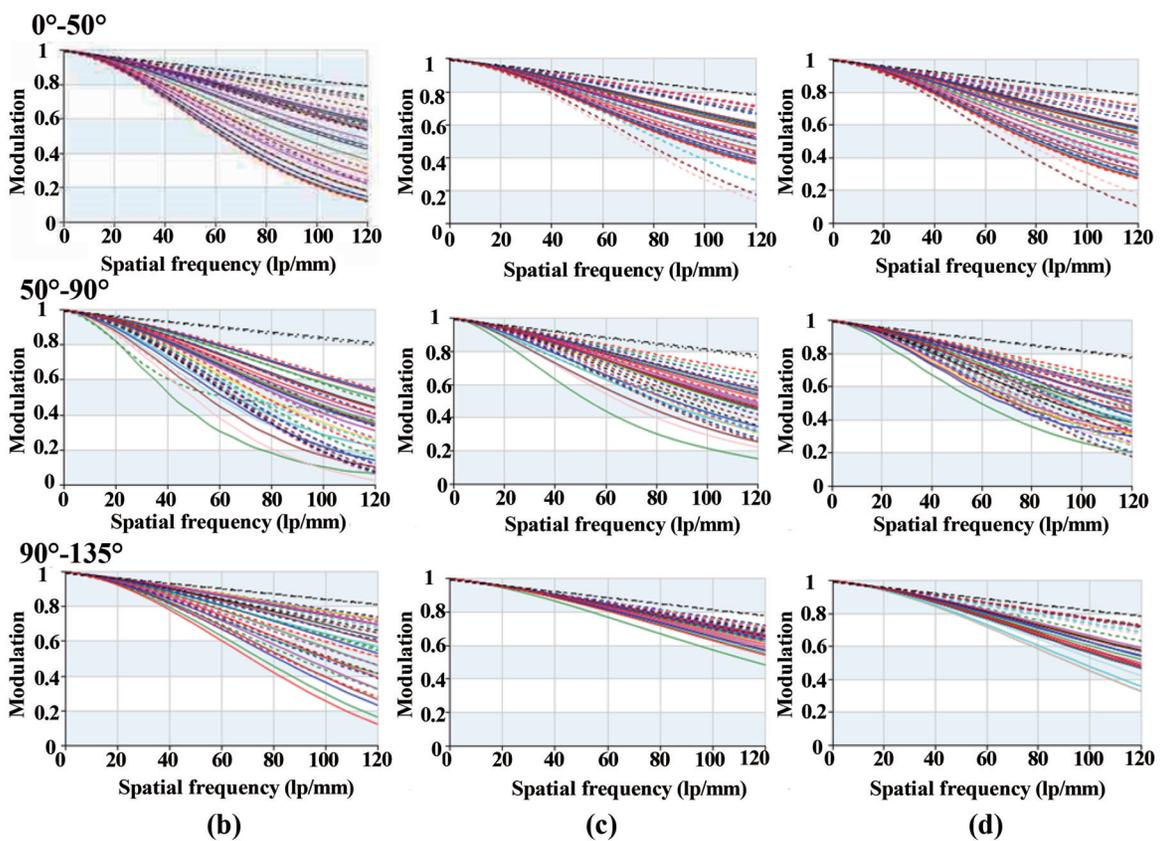
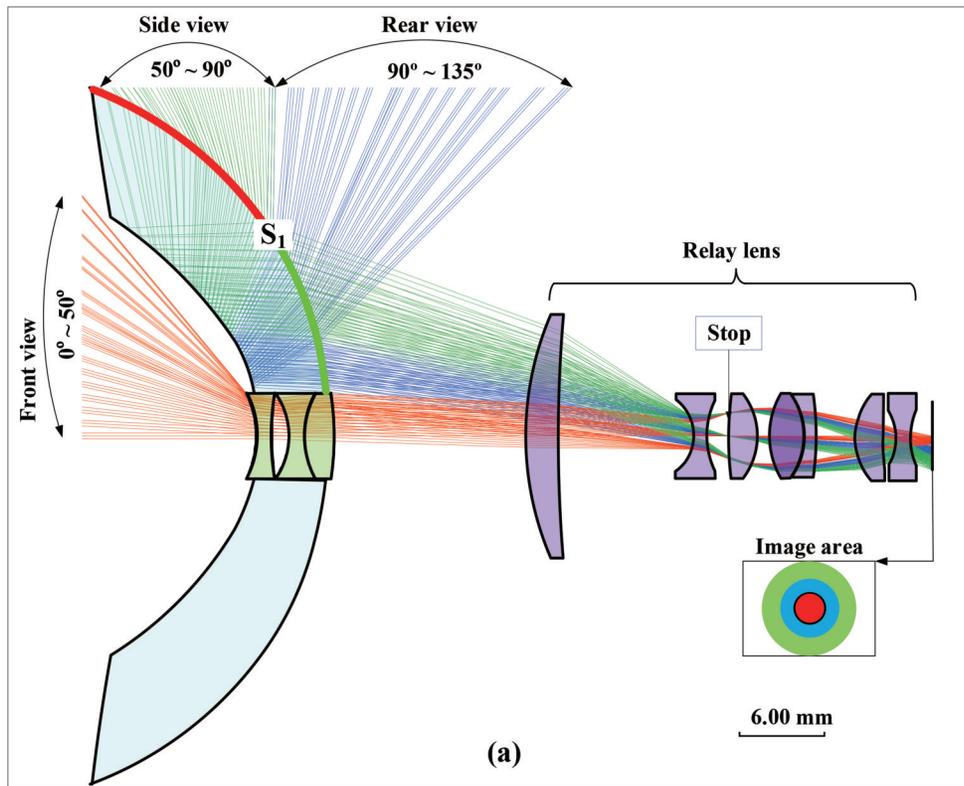


图 6 折反射式超广角成像系统<sup>[73]</sup>。(a)系统光路图;(b)使用偶次非球面的镜头 MTF 曲线;(c)使用 ASAS 的 MTF 曲线;(d)将拼接非球面拟合成一个偶次非球面后的镜头 MTF 曲线

Fig. 6 Catadioptric ultra-wide-angle imaging system<sup>[73]</sup>. (a) Optical layout of system; (b) MTF curves of system using even aspheric surface; (c) MTF curves of system using ASAS; (d) MTF curves of system after fitting ASAS to even aspheric surface

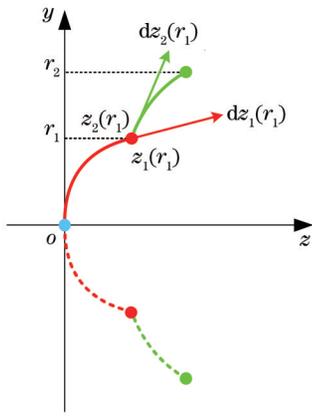


图 7 分段环形曲面在  $yoz$  平面内的轮廓  
Fig. 7 Profile of APS in  $yoz$  plane

续条件,应使其中的各个子曲面满足与拼接非球面类似的条件,即相邻子曲面在拼接位置处的矢高及一阶导数相等。可以使用与式(22)相似的伪代码,控制相邻子曲面之间满足  $C^1$  连续性。

分段环形曲面的每段曲面之间的参数相互独立,很难直接建立满足  $C^1$  连续条件的初始曲面。可以在考虑偶次非球面径向曲率分布的基础上,由现有偶次非球面转换为满足  $C^1$  连续条件的分段环形曲面。在分段数一定的情况下,转换得到的满足  $C^1$  连续条件的

分段环形曲面存在且唯一。

#### 4.2.2 APS 应用实例

研究了分段环形曲面在超短焦投影物镜系统中的应用<sup>[18]</sup>。以专利 US7957078 中结构作为系统的初始结构<sup>[74]</sup>,首先令曲面  $S_2$  为偶次非球面对该系统进行设计,分析设计结果发现最终镜头的 MTF 在 66 lp/mm 处大于 0.30,最大畸变为 2.94%。在优化过程中制约系统性能提升的主要因素为畸变,由于畸变和视场的三次方成正比,因而对具有大视场的超短焦投影来说,边缘视场的畸变很难校正。将  $S_2$  面转换为分段环形曲面,利用不同的子曲面分别调控不同视场的成像质量,可以更好地控制边缘视场的畸变<sup>[18]</sup>。为了保证光线追迹无误,并为系统提供充足的变量,将分段环形曲面的子曲面数量设置为 9。在保持原有约束条件不变的同时,针对分段环形曲面,添加使其满足  $C^1$  连续的约束条件,对分段环形曲面反射镜和透镜组同时进行优化,最终得到系统的结构如图 8(a)所示,系统的总长仅为 155 mm,其中表面  $S_2$  为分段环形曲面。图 8(b)、(c)分别给出了镜头的畸变网格和 MTF 曲线。与使用偶次非球面的系统相比,含有分段环形曲面的系统 MTF 在截止频率处提升至 0.33 以上,系统的畸变值降低至 1.36%,该设计验证了分段环形曲面在实际设计中的可行性和优势。

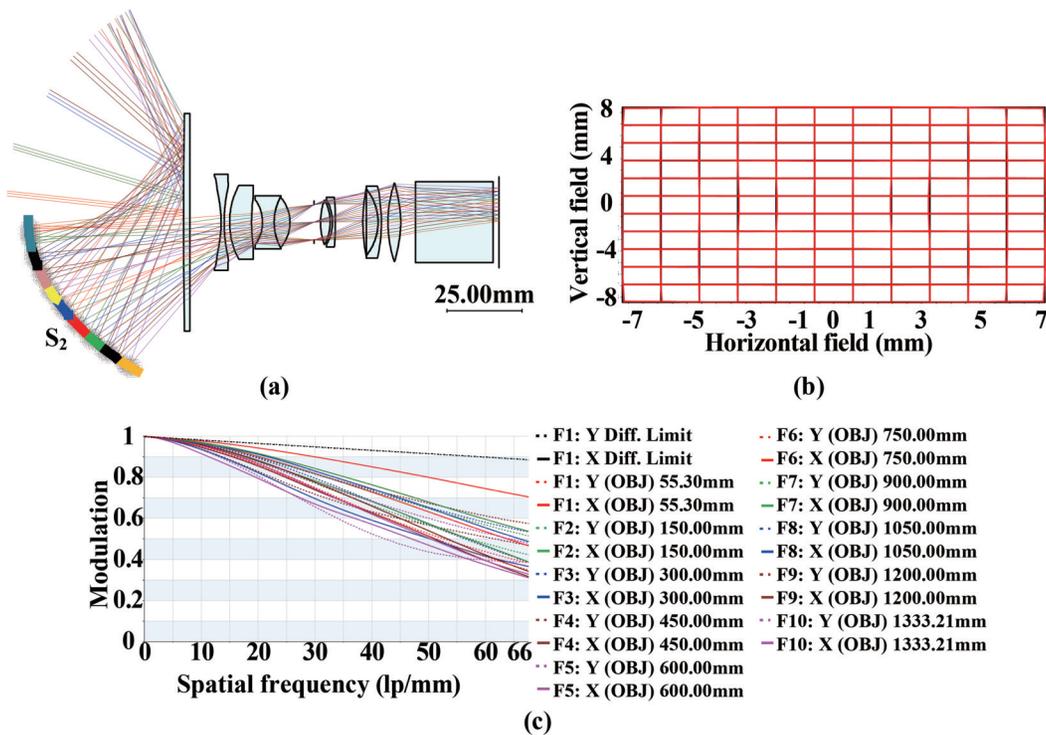


图 8 使用分段环形曲面的超短焦投影物镜光学系统<sup>[18]</sup>。(a)系统光路图;(b)系统畸变网格;(c)系统 MTF 曲线  
Fig. 8 Ultra-short throw ratio projection objective using APS<sup>[18]</sup>. (a) Layout of system; (b) distortion grid of system; (c) MTF curves of system

### 4.3 非旋转对称式拼接自由曲面(SSPS)

#### 4.3.1 SSPS描述方法

在具有旋转对称性的拼接非球面的基础上,进一步考虑以传统 $xy$ 多项式曲面作为子曲面的描述方式,提出一种具有非旋转对称性、包含两个子曲面的SSPS<sup>[22]</sup>。拼接非球面中每个子曲面的基底具有不同的曲率和二次曲面常数,而拼接自由曲面中的两个子曲面的二次曲面基底项具有相同的参数,其定义可以表示为

$$z = \frac{c(x^2 + y^2)}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2(x^2 + y^2)}} + \begin{cases} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p A_{i,j} x^i y^j, & y \geq 0 \\ \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p B_{i,j} x^i y^j, & y < 0 \end{cases}, 1 \leq i+j \leq p, \quad (24)$$

式中: $A_{i,j}$ 、 $B_{i,j}$ 分别表示高阶项系数; $p$ 表示多项式的最高次幂。

图 9 所示为具有两个子曲面的拼接自由曲面示意图。其中,两个子曲面沿 $y$ 轴方向上下排布,两个子曲面的交线 $l$ 为一条平行于 $xoz$ 平面的空间曲线,且经过点 $P(x, y_0, z)$ 。

由于两个子曲面共用同一个二次曲面基底项,因此在拼接时不需要考虑它对曲面连续性的影响,仅需要考虑高阶项部分的连续性。假设两个子曲面的高阶项部分分别为 $z_1(x, y)$ 和 $z_2(x, y)$ 。为了保证曲面在拼接位置处的 $C^1$ 连续性,曲面的高阶多项式应满足:

$$z_1(x, y_0) = z_2(x, y_0), \quad (25)$$

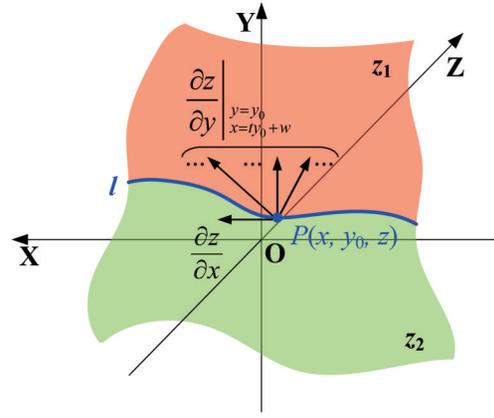


图 9 拼接自由曲面示意图<sup>[22]</sup>

Fig. 9 Schematic diagram of SSPS<sup>[22]</sup>

$$\left. \frac{\partial z_1}{\partial x} \right|_{y=y_0} = \left. \frac{\partial z_2}{\partial x} \right|_{y=y_0}, \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial z_1}{\partial y} \right|_{\substack{y=y_0 \\ x=t y_0 + w}} = \left. \frac{\partial z_2}{\partial y} \right|_{\substack{y=y_0 \\ x=t y_0 + w}} \quad (27)$$

式(25)为两个子曲面在交线处矢高相等的条件,式(26)、(27)为一阶偏导数相等的条件。当式(25)成立时,两个子曲面均通过曲线 $l$ , $z_1(x, y_0)$ 和 $z_2(x, y_0)$ 可以看作是关于自变量 $x$ 的一元函数,且具有相同的定义域和值域。在这种情况下, $z_1(x, y_0)$ 和 $z_2(x, y_0)$ 是完全相同的两个函数,因此它们关于 $x$ 的偏导数也是相同的,即当式(25)成立时,式(26)一定成立。实际上,为了保证曲面具有 $C^1$ 连续性,需令两个子曲面的高阶项系数 $A_{i,j}$ 、 $B_{i,j}$ 满足式(25)、(27),联立两式可得

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p A_{i,j} x^i y_0^j = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p B_{i,j} x^i y_0^j \\ \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p A_{i,j} j (t y_0 + w)^i y_0^{j-1} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p B_{i,j} j (t y_0 + w)^i y_0^{j-1} \end{cases}, 1 \leq i+j \leq p. \quad (28)$$

假设 $B_{i,j}$ 已知,则式(28)中包括的未知数的个数大于方程组的个数,欠定方程组不存在解析解。式(28)中包含常数项 $y_0$ ,如果通过坐标变换的方法消掉所有与 $y_0$ 相关的项,该方程组将会被简化为正定方程组,存在唯一解。对原 $xyz$ 坐标系中的点 $(x, y, z)$ 进行如下的坐标变换:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

在新的坐标系 $x'y'z'$ 中,式(28)可化简为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p A_{i,0} x'^i = \sum_{i=1}^p B_{i,0} x'^i \\ \sum_{i=0}^{p-1} A_{i,1} w^i = \sum_{i=1}^p B_{i,1} w^i \end{cases}. \quad (30)$$

根据正定方程组[式(30)]可以解得,拼接自由曲面满足 $C^1$ 连续性的条件为

$$\begin{cases} A_{i,0} = B_{i,0}, 1 \leq i \leq p \\ A_{i,1} = B_{i,1}, 0 \leq i \leq p-1 \end{cases}. \quad (31)$$

拼接自由曲面是一种不具有旋转对称性的拼接光学曲面,与现有的 $xy$ 多项式曲面相比具有更好的灵活性,可以为光学系统提供更多的优化变量。当多项式的最高阶为10阶时,拼接自由曲面可以为光学系统提供110个变量,比具有相同阶次的 $xy$ 多项式曲面多

45 个。

### 4.3.2 SSPS 应用实例

#### 1) 两镜三反系统设计

研究了拼接自由曲面在离轴两镜三反系统中的应用<sup>[22]</sup>。图 10 所示为一种离轴两镜三反系统的光路结构和设计结果,系统光路结构如图 10(a)所示。该系统的视场角为  $4^\circ \times 3^\circ$ , 焦距为 100 mm,  $F$  数为 2.5。在以往的设计结果中,主镜  $M_1$ 、次镜  $M_2$  分别用一个最高阶均为 5 阶的  $xy$  多项式曲面来描述<sup>[32]</sup>。最终的设计结果如图 10(b)所示,  $M_1$  的尺寸约为 120 mm  $\times$  225 mm,  $M_2$  的尺寸约为 38 mm  $\times$  38 mm。如图 10(d)

所示,该系统的 RMS 波像差约为  $\lambda/50@10 \mu\text{m}$ , 成像质量接近衍射极限。使用拼接自由曲面重新优化设计该系统,为保证可比较性,使用最高阶同样为 5 阶的拼接自由曲面来描述主镜  $M_1$ , 次镜  $M_2$  仍然使用 5 阶  $xy$  多项式曲面描述。经过优化后得到如图 10(c)所示的设计结果。在使用拼接自由曲面的系统中,  $M_1$  的尺寸减小至 116 mm  $\times$  215 mm,  $M_2$  的尺寸减小至 34 mm  $\times$  31 mm。图 10(e)所示系统的 RMS 波像差约为  $\lambda/80@10 \mu\text{m}$ , 相比之前的设计结果降低了约 60%。图 10(f)所示系统的 MTF 接近衍射极限,畸变值也控制得更好,系统的最大畸变仅为 0.4% [图 10(g)]。

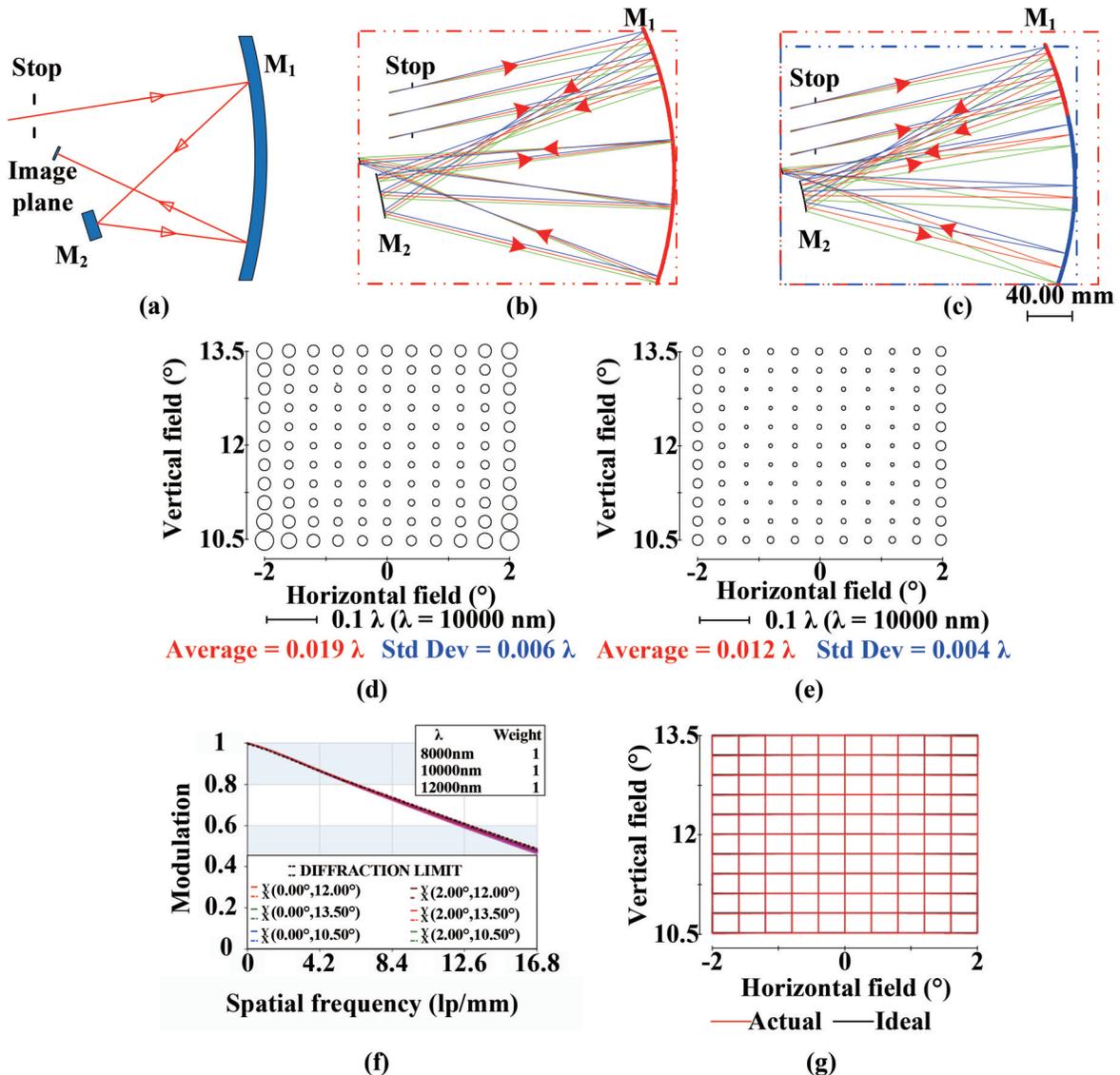


图 10 离轴两镜三反系统<sup>[22]</sup>。(a)系统光路示意图;(b)使用传统  $xy$  多项式曲面的设计结果;(c)使用拼接自由曲面的设计结果;(d)使用传统  $xy$  多项式曲面的 RMS 波像差;(e)使用拼接自由曲面的 RMS 波像差;(f)使用拼接自由曲面的 MTF 曲线;(g)使用拼接自由曲面的畸变网格

Fig. 10 Off-axis system with two mirrors and three reflections<sup>[22]</sup>. (a) Optical layout of system; (b) design result using traditional  $xy$  polynomial surface; (c) design result using SSPS; (d) RMS wavefront error of system using traditional  $xy$  polynomial surface; (e) RMS wavefront error of system using SSPS; (f) MTF curves of system using SSPS; (g) distorted grids of system using SSPS

### 2) 三镜四反系统设计

研究了拼接自由曲面在离轴三镜四反系统中的应用<sup>[22]</sup>。图 11 所示为一种离轴三镜四反光学系统的光路结构和设计结果,系统的光路结构如图 11(a)所示,该设计的  $F$  数为 2.5,其中包含三个反射镜以及四次反射,主镜  $M_1$  为凸面反射镜,次镜  $M_2$  使用了两次<sup>[75]</sup>。分别使用  $xy$  多项式曲面和拼接自由曲面设计该系统。图 11(b)中  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$  均使用 5 阶  $xy$  多项式曲面进行描述。图 11(c)中  $M_2$  使用一个 5 阶的拼接自由曲面来描

述,其他两个镜片的描述方式保持不变。对两个系统设置相同的物理结构和光学参数约束,经过优化后得到两个系统的设计结果。图 11(d)为  $M_2$  使用  $xy$  多项式曲面设计结果的 RMS 波像差,全视场平均值为  $\lambda/6@546.1\text{ nm}$ ,使用拼接自由曲面的设计结果中,RMS 波像差的平均值仅为  $\lambda/10@546.1\text{ nm}$ ,减小了约 37%。设计结果说明,在复杂的自由曲面光学系统中使用拼接自由曲面可以实现更优的设计结果,拼接自由曲面拥有比传统  $xy$  多项式曲面更好的优化潜能。

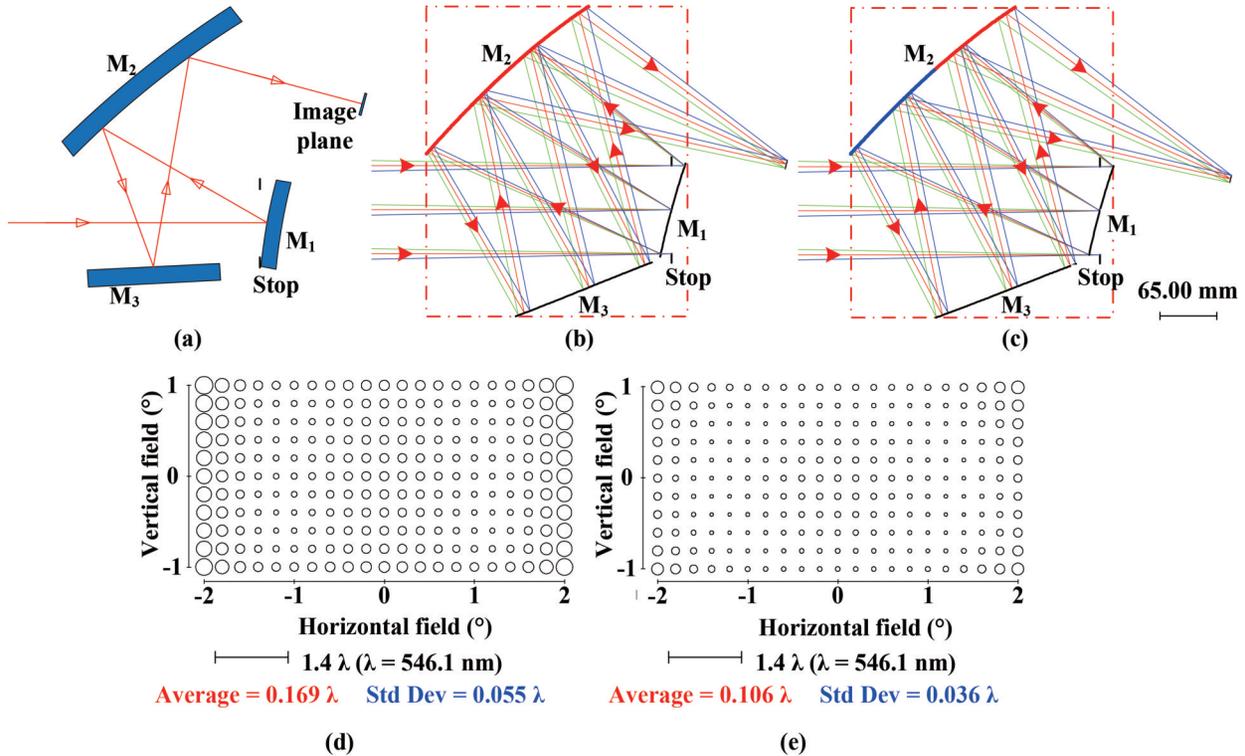


图 11 离轴三镜四反系统<sup>[22]</sup>。(a)系统光路示意图;(b)使用传统  $xy$  多项式曲面的设计结果;(c)使用拼接自由曲面的设计结果;(d)使用传统  $xy$  多项式曲面的 RMS 波像差;(e)使用拼接自由曲面的 RMS 波像差  
 Fig. 11 Off-axis system with three mirrors and four reflections<sup>[22]</sup>. (a) Optical layout of system; (b) design result using traditional  $xy$  polynomial surface; (c) design result using SSPS; (d) RMS wavefront error of system using traditional  $xy$  polynomial surface; (e) RMS wavefront error of system using SSPS

## 5 多项式曲面描述方法及应用

现有的光学曲面描述方法经常采用多项式来扩展曲面的自由度,理论上来说多项式的阶次可以无限扩展,因此这种描述方法具有较好的灵活性。为了解决实际应用中的设计问题,提出双曲率二次曲面基底多项式曲面、离轴二次曲面基底多项式曲面,并对 Alvarez 特殊变焦系统的优化设计进行了研究。

### 5.1 双曲率二次曲面基底 $xy$ 多项式曲面 ( $axyp$ )

#### 5.1.1 $axyp$ 描述方法

结合双曲率二次曲面和  $xy$  多项式曲面各自的优势,提出双曲率二次曲面基底  $xy$  多项式曲面 ( $axyp$ )<sup>[76]</sup>。该曲面的基底项与变形非球面相同,可以校正系统中存在的低阶像散,高阶项为一系列  $x$  与  $y$  的

多项式之和。该曲面能够为光学设计提供更多的设计自由度,提高变形非球面和  $xy$  多项式曲面之间的转换效率和精度,弥补了现有曲面描述方式的不足,简化了自由曲面光学系统尤其是离轴棱镜系统的设计流程,并提高了优化设计的效率,其定义为

$$z = \frac{c_x x^2 + c_y y^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_x)c_x^2 x^2 - (1 + k_y)c_y^2 y^2}} + \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p C_{i,j} x^i y^j, \quad 1 \leq i + j \leq p, \quad (32)$$

式中:  $C_{i,j}$  表示高阶项系数;  $p$  表示多项式的最高次幂。

考虑到很多实际系统具有面对称性,可将双曲率二次曲面基底  $xy$  多项式曲面进一步改写成关于  $yoz$  平面对称的  $x-axy$  曲面和关于  $xoz$  平面对称的  $y-axy$  多项

式曲面。 $x$ - $axy$  多项式曲面可以描述为

$$z_{x-axy} = \frac{c_x x^2 + c_y y^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_x) c_x^2 x^2 - (1 + k_y) c_y^2 y^2}} + \sum_{i=0}^{p/2} \sum_{j=0}^p C_{i,j} x^{2i} y^j, 1 \leq 2i + j \leq p, \quad (33)$$

即在原有双曲率二次曲面基底  $xy$  多项式曲面方程的基础上去掉所有关于  $x$  的奇次幂项式。

$y$ - $axy$  多项式曲面可以描述为

$$z_{y-axy} = \frac{c_x x^2 + c_y y^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + k_x) c_x^2 x^2 - (1 + k_y) c_y^2 y^2}} + \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{p/2} C_{i,j} x^i y^{2j}, 1 \leq i + 2j \leq p, \quad (34)$$

即在原有双曲率二次曲面基底  $xy$  多项式曲面方程的基础上去掉所有关于  $y$  的奇次幂项式。

在最高次幂均为 10 阶的情况下, 双曲率二次曲面基底  $xy$  多项式曲面比双曲率二次曲面多 57 个变量, 比传统  $xy$  多项式曲面多 2 个变量, 光线追迹速度与  $xy$  多项式曲面大致相同, 并且它能够直接从双曲率二次曲面和  $xy$  多项式曲面无误差转换而来。同时,  $y$ - $axy$  多项式曲面和  $x$ - $axy$  多项式曲面也能够向  $xy$  多项式曲面高精度转换, 也就能够协助将双曲率二次曲面高精度转换成  $xy$  多项式曲面。

### 5.1.2 $axy$ 应用实例

#### 1) $axy$ 曲面棱镜系统设计

研究了双曲率二次曲面基底  $xy$  多项式自由曲面在棱镜系统设计中的应用<sup>[76]</sup>。为了校正离轴光学系统中的像散, 自由曲面在两个方向的曲率通常不一致。如果用球面去拟合弧矢/子午方向曲率相差很大的自由曲面, 需要对两个方向的曲率进行折中, 这势必会产生很大的拟合误差, 因此不能准确地描述光学系统的初阶光学特性, 此时需要采用双曲率二次曲面来拟合自由曲面两个方向的曲率<sup>[76]</sup>。图 12(a) 所示为一个自由曲面楔形棱镜的二维光路图, 其理论焦距为 15 mm, 图 12(b) 为将图 12(a) 中的自由曲面简化为最佳双曲率二次曲面后的棱镜系统。两者的形状相近, 但是前者显示的焦距为 7.93 mm, 仅为理论值的一半, 而简化成最佳双曲率二次曲面后系统的焦距为 16.07 mm, 更为接近理论值。图 12(c)、(d) 分别给出了楔形棱镜中表面  $S_3$  的最佳逼近二次曲面和最佳逼近双曲率二次曲面的高斯曲率分布图, 可以看到二次曲面在  $x$  和  $y$  两个方向的曲率分布情况是一致的, 而双曲率二次曲面的曲率分布差异明显, 可以更好地模拟自由曲面楔形棱镜的一阶光学特性。

#### 2) $axy$ 与 $xyp$ 光学曲面间的转换方法及精度

研究了双曲率二次曲面基底  $xy$  多项式曲面与其他现有光学曲面的转换方法<sup>[76]</sup>。球面转换成非球面, 同阶非球面升级到双曲率二次曲面或  $xy$  多项式曲面

都有解析表达式, 因此可实现无误差转换。然而, 从双曲率二次曲面到  $xy$  多项式曲面的转换却没有解析解, 因为双曲率二次曲面有两个方向的曲率和二次曲面常数, 而  $xy$  多项式曲面只有一个曲率。双曲率二次曲面、 $xy$  多项式曲面、 $x$ - $axy$  多项式曲面和  $y$ - $axy$  多项式曲面等的使用频率非常高, 且在优化中有各自的优势, 从双曲率二次曲面到  $xy$  多项式曲面的演变可采用以下两种途径:

(1) 在优化设计过程中分别保持双曲率二次曲面两个方向的曲率和二次曲面常数一致 ( $c_x = c_y, k_x = k_y$ ), 即保持基底项为旋转对称二次曲面, 则双曲率二次曲面到  $xy$  多项式曲面的过渡有直接的数学解析表达式, 将双曲率二次曲面的各项系数展开合并同类项, 就可完成向  $xy$  多项式曲面的无误差转换。

(2) 如果保持双曲率二次曲面两个方向的曲率和二次曲面常数相同, 将使双曲率二次曲面的像差校正能力大打折扣。因为两个方向的曲率和二次曲面常数通常差别很大, 双曲率二次曲面到  $xy$  多项式曲面的升级过程中必然会产生误差。这种情况下, 可以使用最小二乘法和奇异值分解法来求解  $xy$  多项式曲面的各项系数。

双曲率二次曲面到  $x$ - $axy$  多项式曲面或  $y$ - $axy$  多项式曲面的转换, 仅需将双曲率二次曲面方程中的多项式系数展开合并同类项即可, 理论上不存在转换误差, 但是可能会出现因数据截断而产生的误差。由于双曲率二次曲面关于两个平面对称, 转换过程中可选取  $xy$  多项式曲面中的有关  $x$  和  $y$  的偶次幂项。但是, 考虑到双曲率二次曲面可能会偏心使用, 实际系统仅有一个对称面, 同时由于双曲率二次曲面两个方向的曲率不相同, 实际情况下使用  $x$ - $axy$  多项式曲面或  $y$ - $axy$  多项式曲面, 即选用  $x$  的偶次幂项或  $y$  的偶次幂项。

同阶双曲率二次曲面基底  $xy$  多项式曲面比  $xy$  多项式曲面多出了弧矢方向的曲率和二次曲面常数两个参数, 两者之间的转换会存在一定的误差。然而,  $x$ - $axy$  多项式曲面或  $y$ - $axy$  多项式曲面比  $xy$  多项式曲面的系数少, 可以通过调整  $xy$  多项式曲面的各项系数实现高精度的过渡。转换精度既受到拟合方法的影响, 也受到拟合转换区域位置和大小影响, 在该实验中选择的  $x$  方向范围为  $-10 \sim 10$  mm,  $y$  方向的范围为  $0 \sim 15$  mm。图 13 分别为采用最小二乘法、奇异值分解法和优化方法进行拟合的三维误差图。最小二乘法拟合误差的 RMS 值为  $8.40 \times 10^{-6}$  mm; 奇异值分解方法拟合误差的 RMS 值比最小二乘法小一个数量级, 为  $1.95 \times 10^{-7}$  mm; 如果直接转换成  $x$ - $axy$  多项式曲面, 其 RMS 误差为  $3.95 \times 10^{-16}$  mm, 完全可以忽略不计, 如果进一步将  $x$ - $axy$  多项式曲面转换成  $xy$  多项式曲面, 其 RMS 转换误差为  $1.67 \times 10^{-8}$  mm, 仍然比奇异值分解方法的精度高一个数量级。

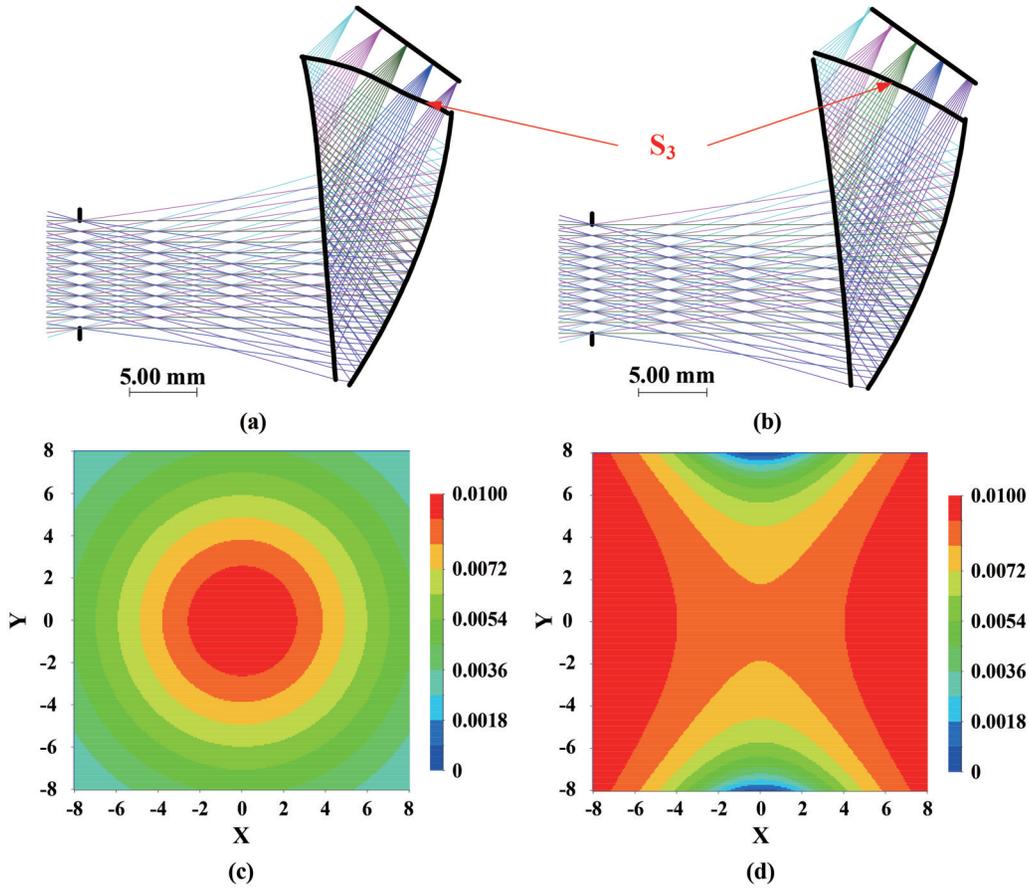


图 12 自由曲面初阶光学特性描述<sup>[76]</sup>。(a)自由曲面棱镜光路;(b)最佳逼近双曲率二次曲面棱镜光路;(c)  $S_3$ 的最佳逼近二次曲面的高斯曲率分布;(d)  $S_3$ 的最佳逼近双曲率二次曲面的高斯曲率分布  
 Fig. 12 Description of first-order data of system using freeform surface<sup>[76]</sup>. (a) Optical layout of freeform prism; (b) optical layout of system using best-fitting double-curvature biconic surface; (c) Gaussian curvature distribution of best-fitting conic surface of  $S_3$ ; (d) Gaussian curvature distribution of best-fitting double-curvature biconic surface of  $S_3$

## 5.2 Alvarez 变焦系统应用

### 5.2.1 Alvarez 描述方法

20 世纪 60 年代, Alvarez<sup>[77]</sup>提出了一种变焦系统,区别于传统的通过轴向移动透镜来变焦的光学系统,该系统仅包含两片紧靠的透镜,通过在垂直于光轴的方向反向移动两片透镜实现连续变焦。Alvarez 系统中包含的两个相对移动的透镜  $L_1$  和  $L_2$  均由一个平面和一个自由曲面组成,通过两片透镜的相对移动即可实现系统光焦距的变化。Alvarez 系统原理示意图如图 14 所示,其中两个透镜沿  $x$  轴方向进行相对平移。两个镜片的相邻表面为紧靠的平面,外侧两个表面为自由曲面。当两个镜片沿着  $x$  轴相对移动时,整个系

统从凹透镜状态逐渐过渡到凸透镜状态。

在笛卡儿坐标系下,透镜  $L_1$  和  $L_2$  的外表面可分别描述为

$$\begin{cases} z_1(x, y) = a(xy^2 + x^3/3) + bx + t_0 \\ z_2(x, y) = -a(xy^2 + x^3/3) - bx + t_0 \end{cases}, \quad (35)$$

式中:  $a$  为光焦距缩放比率;  $b$  为面形倾斜系数;  $t_0$  为透镜中心厚度。  $b$  值的对应项可减小系统的总厚度,  $t_0$  值保证透镜有合适的可加工的最小厚度。

当  $L_1$  沿  $x$  轴移动距离  $\Delta d$ ,  $L_2$  沿  $x$  轴移动距离  $-\Delta d$  时,两个透镜的矢高变为

$$\begin{cases} z_1(x - \Delta d, y) = a(x - \Delta d)y^2 + 1/3a(x - \Delta d)^3 + b(x - \Delta d) + t_0 \\ z_2(x + \Delta d, y) = -a(x + \Delta d)y^2 - 1/3a(x + \Delta d)^3 - b(x + \Delta d) + t_0 \end{cases}. \quad (36)$$

系统的总体描述为

$$z_c = z_1(x - \Delta d, y) + z_2(x + \Delta d, y) = -2a\Delta d(x^2 + y^2) - 2/(3a\Delta d^3) - 2b\Delta d + 2t_0. \quad (37)$$

根据 Blendowske<sup>[78]</sup>中的推导,透镜的表面光焦距和像散均与面形表达式的二阶偏导成比例,若透镜的矢高表达式为  $z$ , 折射率为  $n$ , 可得透镜的光焦距  $P$  和

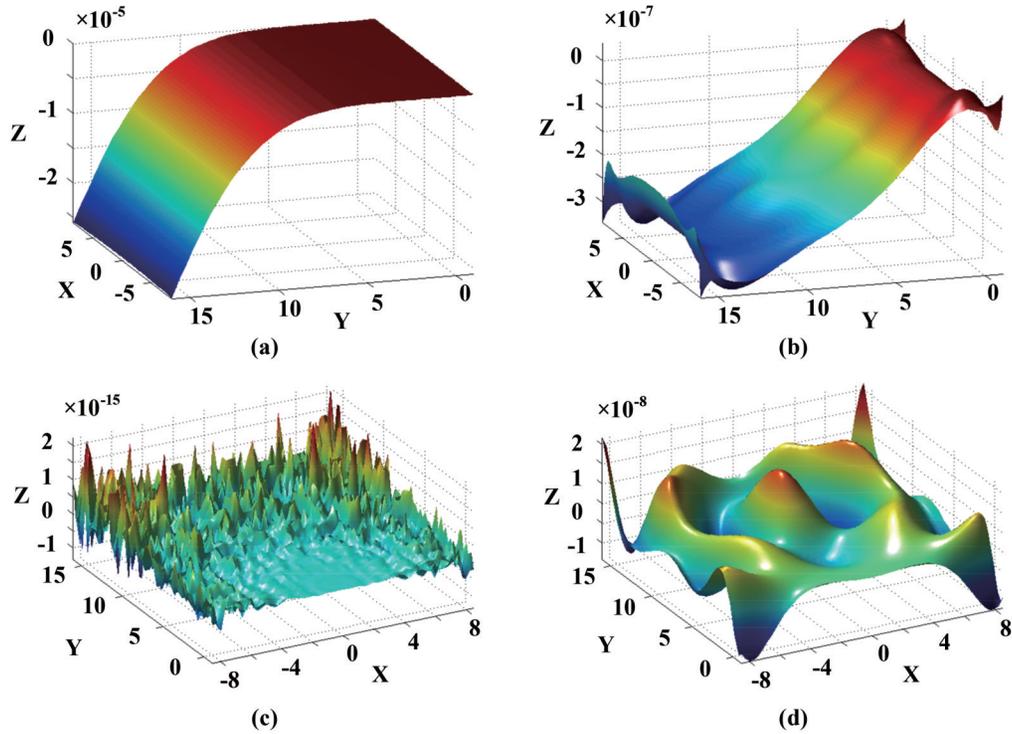


图 13 采用不同方法将双曲率二次曲面基底  $xy$  多项式曲面转换为  $xy$  多项式曲面后的拟合误差图<sup>[76]</sup>。(a)最小二乘法;(b)奇异值分解方法;(c)双曲率二次曲面基底  $xy$  多项式曲面直接转换为  $x-axy$  多项式曲面;(d)将转换后的  $x-axy$  多项式曲面进一步优化成  $xy$  多项式曲面

Fig. 13 Fitting error diagram of  $xy$  polynomial surface of double-curvature biconic surface converted into  $xy$  polynomial surface by different methods<sup>[76]</sup>. (a) Least squares method; (b) singular value decomposition method; (c)  $xy$  polynomial surface of double-curvature biconic surface is directly converted into  $x-axy$  polynomial surface; (d) converted  $x-axy$  polynomial surface is further optimized into  $xy$  polynomial surface

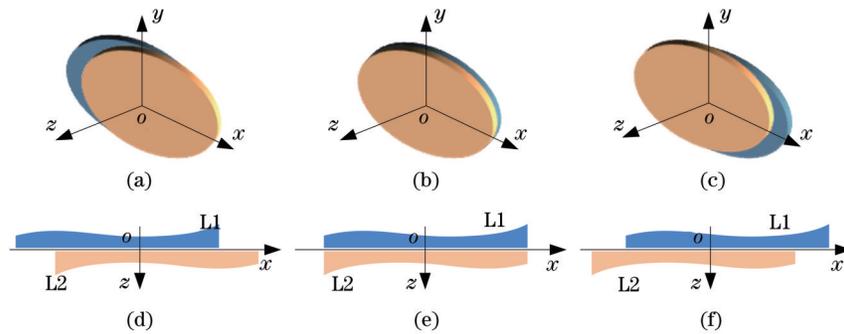


图 14 Alvarez 系统原理示意图。(a)(d)系统为凹透镜状态,发散光束;(b)(e)系统为初始状态,可设计为平行玻璃板状态,也可包含初始光焦度;(c)(f)系统为凸透镜状态,会聚光束

Fig. 14 Schematic diagrams of Alvarez system. (a)(d) System is equivalent to negative lens and diverges beam; (b)(e) initial statement of system can be designed as parallel glass plate state or with initial optical power; (c)(f) system is equivalent to positive lens and converges beam

像散  $A$  分别为

$$P = \frac{n-1}{2} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), \quad (38)$$

$$A = (n-1) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \quad (39)$$

根据面形表达式与透镜光焦度和像散的关系,可以推导得出面形表达式中的  $x^2$  和  $y^2$  项与光焦度有关,

而  $xy$  项则与像散有关。由式(38)、(39)分析计算可知, Alvarez 系统的光焦度与  $-4(n-1)a\Delta d$  呈线性关系。一般而言,会聚透镜的光焦度为正值,发散透镜的光焦度为负值,与  $-2a\Delta d(x^2 + y^2)$  项的符号相反。若  $a$  为正值,当  $\Delta d$  取负值时,光焦度与  $-a\Delta d$  成比例,相当于一个凸透镜;而当  $\Delta d$  取正值时,光焦度与  $a\Delta d$  成比例,相当于一个凹透镜。若  $a$  为负值,当  $\Delta d$  取负值时,系统相当于一个凸透镜;而当  $\Delta d$  取正值时,系统相

相当于一个凹透镜。由此可知,通过改变  $\Delta d$  的值即可实现系统的连续线性变焦。

若  $\Delta X$  为透镜的最大平移量,  $\Delta P$  为对应的光焦度变化量,  $P_0$  为光焦度初始值, 则 Alvarez 系统中每片透镜的移动范围为  $-\Delta X/2 \leq \Delta d \leq \Delta X/2, \Delta X \geq 0$ ; 对应的光焦度变化范围为  $-\Delta P/2 \leq P - P_0 \leq \Delta P/2, \Delta P \geq 0$ 。因为光焦度的变化和透镜的位移呈线性关系,  $a$  可以根据  $\Delta X$  和  $\Delta P$  确定, 即

$$a = \frac{\Delta P}{4(n-1)\Delta X} \quad (40)$$

为了减小两个透镜相对横向移动时的摩擦, 可以在两个透镜之间留有一定的空隙。但空隙的增大会影响光学系统的成像质量<sup>[79]</sup>, 因此两片透镜应当尽可能贴近。

### 5.2.2 Alvarez 应用实例

研究了 Alvarez 系统的光焦度和像散分布的优化设计方法<sup>[80]</sup>。对于 Alvarez 系统, 除了需要对传统的像差进行评估外, 还需要保证不同变焦状态下光焦度的准确性, 以及光焦度和像散的均匀性。在 Alvarez 系统

中, 镜片相对移动产生光焦度的变化后, 在整个视场范围内, 光焦度应该准确且分布均匀, 像散应该尽可能小。

为了分析自由曲面的光焦度和像散, 通过计算表面的高斯曲率和平均曲率, 实现对实际光焦度和像散的分析。若透镜折射率为  $n$ , 则透镜表面某一点处的光焦度和像散分别为

$$P = \frac{1}{2}(n-1)(k_1 + k_2), \quad (41)$$

$$A = (n-1)(k_1 - k_2), \quad (42)$$

式中:  $k_1, k_2$  分别表示表面某点的两个主曲率。

优化的过程中通过约束系统的像高实现对焦距的控制, 通过约束  $x$  和  $y$  方向像高的差值来实现对像散的控制。此外, 为了保证系统物理结构的合理性, 还对描述面形的多项式系数的变化范围进行了限制。如图 15 所示, 优化后的 Alvarez 系统视场范围得到了扩大, 光焦度值与设计值保持一致, 点列图半径明显减小, 成像质量有所提高。最终设计得到的系统变焦范围为  $-100 \sim 500$  mm, 平移距离为  $-5 \sim 5$  mm。

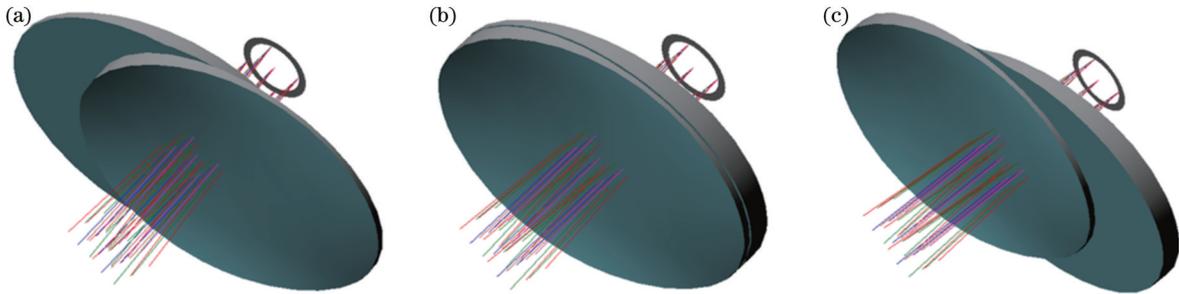


图 15 优化后的 Alvarez 系统。(a) 理论光焦度  $P$  为  $-10 \text{ m}^{-1}$ ; (b) 理论光焦度  $P$  为  $-4 \text{ m}^{-1}$ ; (c) 理论光焦度  $P$  为  $2 \text{ m}^{-1}$   
Fig. 15 Optimized Alvarez system. (a) Theoretical optical power  $P$  is  $-10 \text{ m}^{-1}$ ; (b) theoretical optical power  $P$  is  $-4 \text{ m}^{-1}$ ; (c) theoretical optical power  $P$  is  $2 \text{ m}^{-1}$

优化后, Alvarez 系统中透镜  $L_1$  的光焦度等值线和像散等值线的分布如图 16 所示。与优化之前相比, 除了等值线的数值有所变化外, 光焦度的等值线在边缘区域发生弯曲, 但是中心区域的等值线依然垂直于  $x$  轴, 并能够保持平行关系; 而像散等值线图的分布情况

基本没有发生改变, 依然垂直于  $y$  轴, 同时关于  $x$  轴维持对称的关系。为了平衡像差, 光焦度等值线图发生了一定的变化, 但是整体趋势依然与基本原理相符合, 从而能够保证变焦功能的实现。

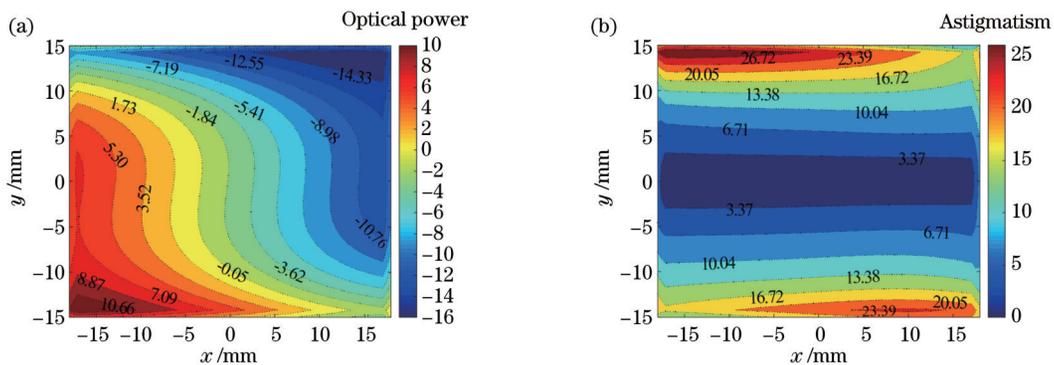


图 16 优化后的 Alvarez 系统中单个镜片的光焦度和像散分布。(a) 光焦度分布图; (b) 像散分布图  
Fig. 16 Optical power and astigmatism distributions of single lens in optimized Alvarez system. (a) Distribution of optical power; (b) distribution of astigmatism

### 5.3 离轴二次曲面基底自由曲面(CBF)

#### 5.3.1 CBF 描述方法

在 Schiesser 等的研究发表之前,许晨等<sup>[19,63]</sup>研究了利用焦点信息来表示坐标原点位于椭球面或者双曲面上任意位置处的离轴二次曲面(CBS)。在笛卡儿坐标系下,假设坐标原点位于椭球面和双曲面上的任意一点,如图 17 所示。

对于椭球面上任意一点  $P$ ,存在如下所示的几何关系:

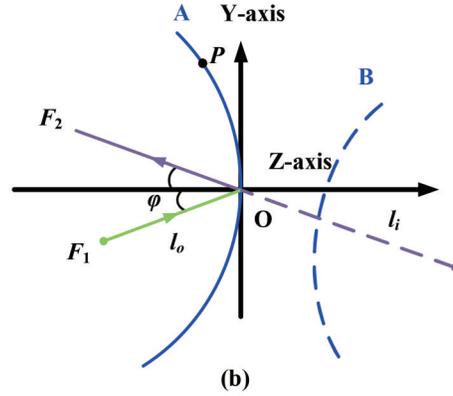
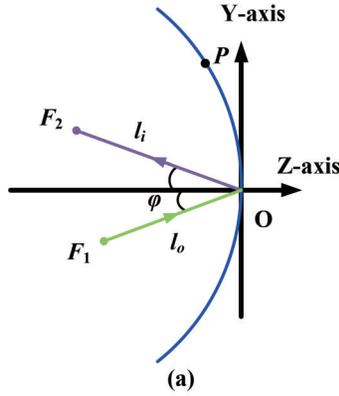


图 17 离轴二次曲面<sup>[63]</sup>。(a)离轴椭球面;(b)离轴双曲面

Fig. 17 Off-axis conic surface<sup>[63]</sup>. (a) Off-axis ellipsoid; (b) off-axis hyperboloid

$$\begin{cases} |F_1P| + |PF_2| = l_o + l_i \\ F_1 = (0, -l_o \sin \varphi, -l_o \cos \varphi) \\ F_2 = (0, l_i \sin \varphi, -l_i \cos \varphi) \\ O = (0, 0, 0) \end{cases}, \quad (43)$$

式中: $F_1, F_2$ 为椭球面的两个焦点; $l_i$ 为焦点 $F_1$ 至坐标系原点的距离; $l_o$ 为焦点 $F_2$ 至坐标系原点的距离; $\varphi$ 为焦点至坐标原点的连线与 $z$ 轴的夹角。经过整理后,离轴椭球面的显式表达式为

$$\begin{aligned} z_e = & \left[ l_o^2 + 6l_o l_i + l_i^2 - (l_o - l_i)^2 \cos 2\varphi \right]^{-1} \left\{ (l_o + l_i) \left[ -4l_o l_i \cos \varphi + (l_o - l_i) y \sin 2\varphi \right] + \right. \\ & \left. \left\{ 2 \left[ (l_o + l_i) 2 \left[ -l_i^2 x^2 + l_o^2 (4l_i^2 - x^2) - 2l_o l_i (3x^2 + 2y^2) + l_i^2 x^2 + l_o^2 (4l_i^2 + x^2) - 2l_o l_i (x^2 + 2y^2) \right] \cos 2\varphi + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. 8l_o l_i (-l_o + l_i) y \cos^2 \varphi \sin \varphi \right\}^{1/2} \right\} \right\}. \quad (44) \end{aligned}$$

类似地,对于双曲面上任意一点  $P$ ,存在如下所示的几何关系:

$$\begin{cases} |F_1P| - |PF_2| = l_o - l_i \\ F_1 = (0, -l_o \sin \varphi, -l_o \cos \varphi) \\ F_2 = (0, -l_i \sin \varphi, l_i \cos \varphi) \\ O = (0, 0, 0) \\ l_o < l_i \end{cases}. \quad (45)$$

经过整理后离轴双曲面的显式表达式为

$$\begin{aligned} z_h = & \left[ l_o^2 + 6l_o l_i + l_i^2 - (l_o - l_i)^2 \cos 2\varphi \right]^{-1} \left\{ 2(l_o - l_i) \cos \varphi \left[ 2l_o l_i + (l_o + l_i) y \sin \varphi \right] + \right. \\ & \left. \sqrt{2} \left\{ (l_o - l_i)^2 \left[ -l_i^2 x^2 + l_o^2 (4l_i^2 - x^2) + 2l_o l_i (3x^2 + 2y^2) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left[ l_i^2 x^2 + l_o^2 (4l_i^2 + x^2) + 2l_o l_i (x^2 + 2y^2) \right] \cos 2\varphi + 8l_o l_i (l_o + l_i) y \cos^2 \varphi \sin \varphi \right\}^{1/2} \right\} \right\}. \quad (46) \end{aligned}$$

传统二次曲面基底只能表示原点位于椭球面或双曲面长轴顶点的情形,而以上公式通过将坐标原点取在曲面任意位置,可以表示任意点附近的区域。描述圆锥曲面的坐标系离轴,为自由曲面光学系统的设计提供了更多的便利,可以使基底曲面在优化过程中保持更好的稳定性。另外,利用离轴二次曲面可以得到

比传统二次曲面更优的设计初始解,使附加高阶项对曲面的矢高贡献保持较小,降低了光学元件的检测难度<sup>[81]</sup>。以离轴二次曲面作为基底项,可以生成自由曲面(CBF)。由于基底已经是非旋转对称的形状,因而即使附加高阶项为旋转对称的形式,最终的面形也是非旋转对称的自由曲面,在这种情形下实现了用较少

面形参数表示非旋转对称的自由曲面,提升优化设计中的面形稳定性。

在离轴二次曲面基底的基础上,可以通过增加旋转对称的高阶项生成自由曲面(CBR):

$$z_{\text{CBR}} = \begin{cases} z_e + \sum_i a_i (x^2 + y^2)^i & \tau = 1 \\ z_h + \sum_i a_i (x^2 + y^2)^i & \tau = -1 \end{cases}, 1 \leq i \leq p, \quad (47)$$

或通过增加  $x$  与  $y$  不同次幂的多项式生成自由曲面(CBN):

$$z_{\text{CBN}} = \begin{cases} z_e + \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p C_{i,j} x^i y^j, & \tau = 1 \\ z_h + \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p C_{i,j} x^i y^j, & \tau = -1 \end{cases}, 1 \leq i + j \leq p, \quad (48)$$

式(48)中  $\tau = 1$  表示基底项为离轴椭球面,  $\tau = -1$  表示基底项为离轴双曲面。

该面形参数中直接包含了物方与像方焦点的位置

信息,因而可以快速地实现光学系统初始结构的建立。

5.3.2 CBF 应用实例

1) 焦点传递建立初始结构

利用离轴二次曲面的焦点关系可以快速实现光学系统初始结构的建立<sup>[19,63]</sup>。抛物面、椭球面和双曲面的光学特性如图 18 所示。椭球面和双曲面作为反射面均能够将有限距离的物点理想成像在有限距离。抛物面能够将无限远的物点理想成像在有限距离处。

对于大孔径小视场系统,在建立初始结构时,可以利用二次曲面反射镜的焦点传递使得中心视场成理想像。图 19(a)给出了一个对无限远物体成像、满足焦点传递条件的离轴三反系统,其主镜  $M_1$  为抛物面,它的焦点  $F_1$  同时也是椭球面次镜  $M_2$  的物方焦点,  $M_2$  的像方焦点  $F_2$  为椭球面三镜  $M_3$  的物方焦点,最终  $M_3$  的像方焦点即为理想成像的像点  $F_3$ 。图 19(b)给出了另外一个由抛物面、双曲面、椭球面构成的满足焦点传递关系的离轴三反系统。采用二次曲面建立系统的优势在于:相对孔径的大小不影响系统对单视场的理想成像,因而能够使得系统具有较大的相对孔径。

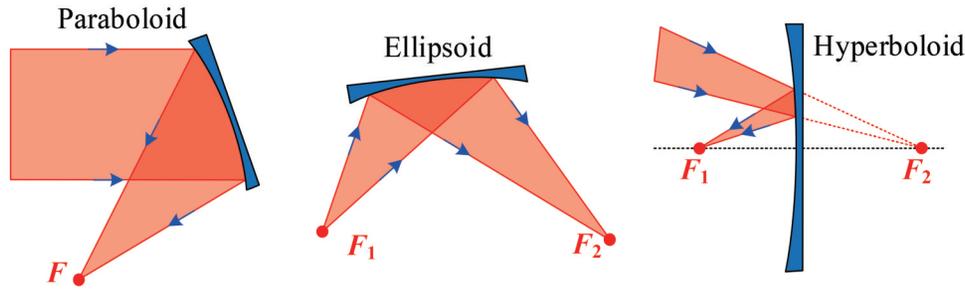


图 18 二次曲面反射镜的光学特性<sup>[19]</sup>  
Fig. 18 Optical properties of conic mirrors<sup>[19]</sup>

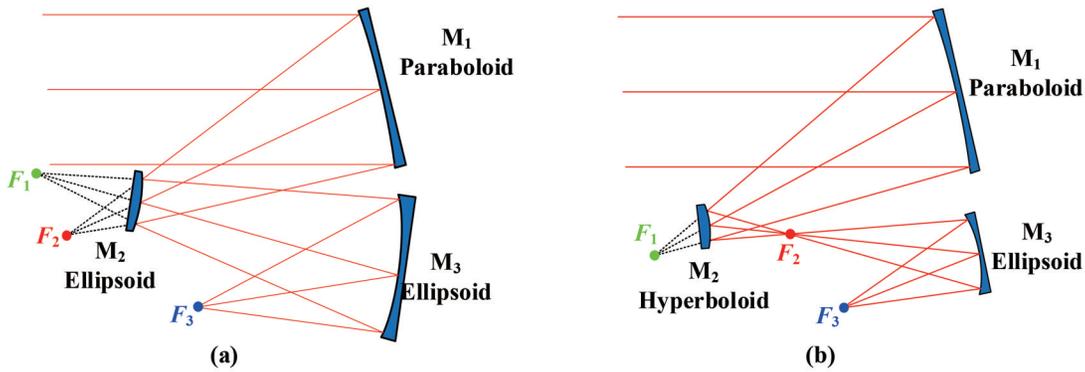


图 19 使用焦点传递建立理想成像离轴三反系统<sup>[19]</sup>。(a)抛物面-椭球面-椭球面;(b)抛物面-双曲面-椭球面  
Fig. 19 Ideal imaging off-axis three-mirror system using focus transfer<sup>[19]</sup>. (a) Paraboloid-ellipsoid-ellipsoid; (b) paraboloid-hyperboloid-ellipsoid

对于离轴反射系统,近轴焦距可以表示为第一片焦距与后续各个光学面的垂轴放大率的乘积,其中各个面的垂轴放大率通过近轴计算获得。对于满足焦点传递条件的二次曲面系统,任何一个面的垂轴放大率

在数值上等于该面的像方焦距与物方焦距的比值。所以,对于无限远成像的离轴焦点传递二次曲面系统,其近轴焦距可以表示成

$$f_{\text{total}} = f_1 \cdot \prod_{k=2}^n \beta_k = f_1 \cdot \prod_{k=2}^n \frac{l_{ik}}{l_{ok}}, \quad (49)$$

式中:  $n$  为系统的总反射面数;  $f_1 = l_1/l_0$  为第一个反射镜的像方焦距;  $\beta_k$  表示第  $k$  个反射面的垂轴放大率;  $l_{ok}$  和  $l_{ik}$  分别表示第  $k$  个反射面的物方焦距和像方焦距。

## 2) 紧凑型离轴三反系统设计

研究了离轴二次曲面基底自由曲面在紧凑型离轴三反光学系统中的应用。系统的设计参数为: 视场角为  $6^\circ \times 5^\circ$ ,  $F$  数为 1.5, 系统焦距为 150 mm<sup>[19]</sup>。该系统

的设计过程包括采用 CBS 曲面的初始结构搜寻、采用 CBR 曲面的优化设计与采用 CBN 曲面的优化设计三个阶段。

在离轴初始结构搜寻过程中, 系统中的三个光学元件均采用 CBS 曲面进行描述。采用模拟退火法优化获取像质较好的离轴初始结构, 其光路如图 20(a) 所示。初始系统的 RMS 光斑大小如图 20(b) 所示, 全视场内平均值为 0.66 mm, 未达到设计要求。

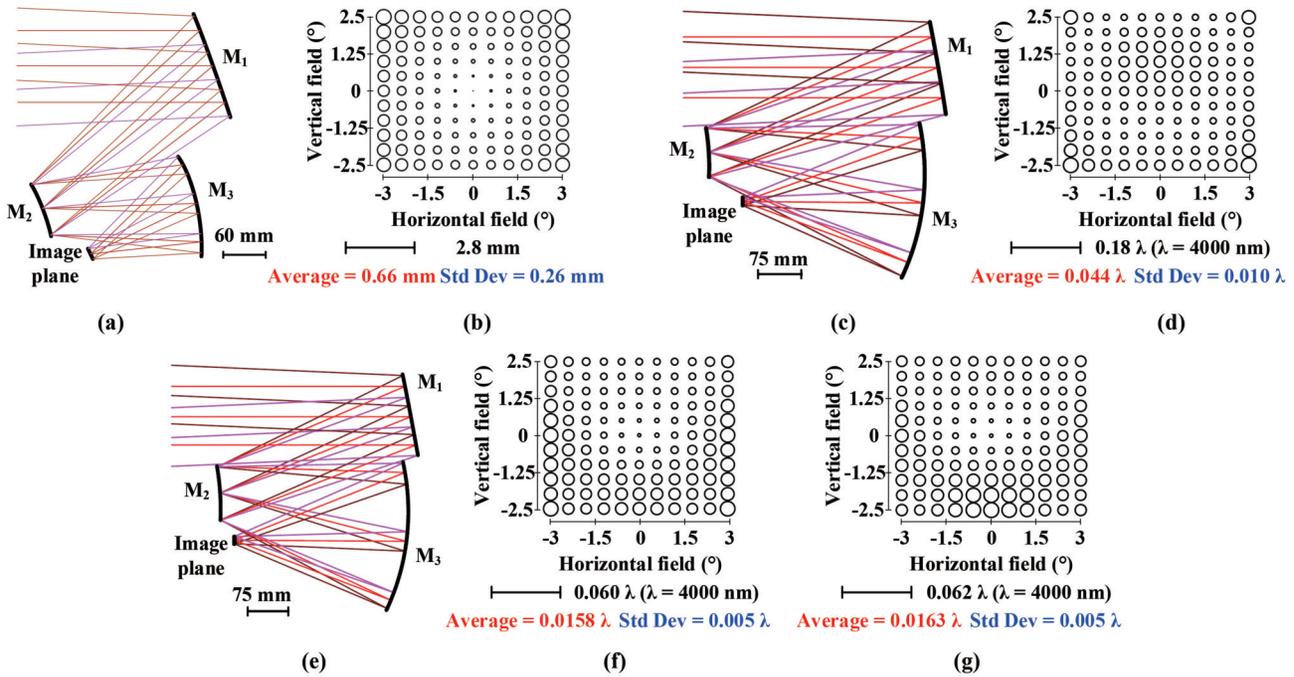


图 20 紧凑型离轴三反系统设计过程<sup>[19]</sup>。(a)采用 CBS 面形的初始结构的光路图;(b)初始结构的 RMS 光斑图;(c)采用 CBR 面形设计的光路图;(d)采用 CBR 面形设计结果的 RMS 波像差;(e)采用 CBN 面形设计结果的光路图;(f)采用 CBN 面形设计的 RMS 波像差;(g)光学面均转换成传统  $xy$  多项式曲面后的系统 RMS 波像差

Fig. 20 Design process of compact off-axis three-mirror system<sup>[19]</sup>. (a) Optical layout of initial system using CBS; (b) RMS spot diagram of initial system; (c) optical layout of design using CBR; (d) RMS wavefront error of system using CBR; (e) optical layout of design result using CBN; (f) RMS wavefront error of system using CBN; (g) RMS wavefront error of system after CBNs are converted to traditional  $xy$  polynomial surfaces

在上述初始结构的基础上, 将系统中各个元件的面形修改为 CBR 曲面, 对系统进行进一步优化。优化后的系统光路如图 20(c) 所示。系统的 RMS 波像差分布如图 20(d) 所示, 全视场内平均值为  $0.044\lambda @ 4 \mu\text{m}$ , 整个视场范围内像质比较均匀。本系统中所使用的 CBR 曲面最高阶为 10 阶, 较少的变量数目降低了解空间的维数, 有利于提高优化迭代运算的速率。同时, 采用旋转对称的非球面偏离量更容易实现面形控制。

最后采用 CBN 曲面描述系统中的三个元件, 增加设计自由度, 进一步减小或平衡像差。考虑到系统关于  $yo z$  平面对称, 本例中的非旋转对称偏离量只采用含  $x$  偶次幂的多项式。通过优化迭代, 设计结果的像质得到进一步提升, 最终设计的光路如图 20(e) 所示,

RMS 波像差分布如图 20(f) 所示, 全视场内平均值为  $0.0158\lambda @ 4 \mu\text{m}$ , 达到设计要求。

为了验证结果的正确性, 将紧凑型离轴三反系统中的三个 CBN 曲面转换成  $xy$  多项式曲面, 并比较面形转换前后的像质差别。转换成  $xy$  多项式面形之后系统的波像差分布如图 20(g) 所示。对比图 20(e)、(f) 可知, 转换为  $xy$  多项式曲面前后, 系统的 RMS 波像差分布情况相近, 全视场内的平均值由  $0.0158\lambda @ 4 \mu\text{m}$  略微增大至  $0.0163\lambda @ 4 \mu\text{m}$ 。转换过程一方面验证了 CBF 的曲面表达式与光线追迹的正确性, 另一方面也验证了面形转换过程的正确性。

## 6 面形局部描述曲面及应用

在此之前描述的曲面, 如果其中一个参数发生改

变,整体面形均会受到影响。面形局部描述曲面可以控制曲面局部的面形变化,而不影响离它有一定距离的其他区域,具有非常优秀的灵活性。但目前对其应用的研究较少,且缺少基础理论支撑。提出基于高斯基函数自由曲面的光学元件集成化设计方法,研究了非均匀有理 B 样条曲面在曲面拟合、快速光线追迹等方面的应用。

## 6.1 高斯基函数自由曲面(GFFS)

### 6.1.1 GFFS 描述方法

2008年,Cakmakci等<sup>[11]</sup>提出将一组按照一定规律分布的高斯基函数叠加到二次曲面基底上,得到一种高斯基函数自由曲面(GFFS),其定义为

$$z = \frac{c(x+y)^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2(x+y)^2}} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} \phi_{i,j}(x+x_i, y+y_j), \quad (50)$$

式中: $\phi_{i,j}(x, y)$ 为高斯基函数; $\omega_{i,j}$ 为每个基函数的权重系数; $m \times n$ 为高斯基函数的个数; $(x_i, y_j)$ 为第 $(i, j)$ 个高斯基函数的对称轴在 $xOy$ 平面内的坐标。高斯基函数的具体形式为

$$\phi_{i,j}(x, y) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(x-x_i)^2 + (y-y_j)^2\right]\right\}. \quad (51)$$

高斯基函数自由曲面的优化速度快,像差校正能力强。但是,目前这种面形应用还不广泛,主要是难以确定基函数的数量和分布形态,而且没有较好的设计理论指导。

### 6.1.2 GFFS 应用实例

对高斯基函数自由曲面用于多个离散光学元件的集成化设计方法进行了探索<sup>[21]</sup>。集成过程如图 21(a)~(c)所示。首先获取待集成曲面的位置分布,在同一坐标系下划分采样点网格,通过记录每个格点位置处所有待集成曲面的矢高和法向量,获得一组离散点数据集合。然后根据所有待集成曲面的离散点坐标,将其拟合为一个最接近的球面,并计算离散点与最佳球面基底的矢高残差与法向残差。据此确定高斯径向基函数的分布方式,通过最小二乘法等确定各个基函数的权重系数。最后将高斯基函数自由曲面的各个参数作为优化变量,进一步调整各个曲面的形貌参数,使集成后系统的物理参数及成像性能均达到设计指标的要求。

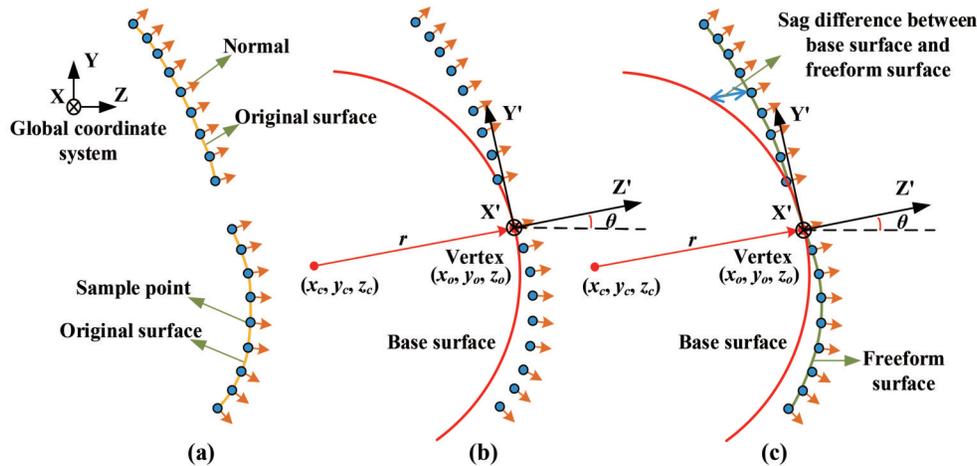


图 21 将两个曲面集成为一个曲面的过程<sup>[21]</sup>。(a)两个原始表面采样点的坐标和法线;(b)基底球面和自由曲面局部坐标系;(c)基于残差和离散点的法线拟合得到自由曲面

Fig. 21 Process of integrating two surfaces into single surface<sup>[21]</sup>. (a) Coordinates and the normals of sampling points from two original surfaces; (b) local coordinate system of base sphere and freeform surface; (c) freeform surface is obtained by fitting based on the normal of discrete points and residual

## 6.2 非均匀有理 B 样条自由曲面(NURBS)

### 6.2.1 NURBS 描述方法

样条函数自由曲面包括 B 样条曲面和非均匀有理 B 样条表面。1971 年和 1984 年就有对样条函数在光学设计中应用的研究<sup>[82-83]</sup>。随后在 2002 年有文献讨论了样条函数在光学设计软件中的应用<sup>[84]</sup>。在同一年,

Chase<sup>[85]</sup>提出了旋转对称的 NURBS 用于光学系统设计。2011 年, Jester 等<sup>[86]</sup>提出适用于 B 样条曲面的光线追迹算法,并为光学系统的公差分析提供了新的思路。目前,贝塞尔样条、均匀 B 样条和非均匀有理 B 样条等曲面都被统一到 NURBS 曲面中, NURBS 曲面是参数空间的双变量向量值分段有理函数,它的定义为

$$\left\{ \begin{aligned}
S(u, v) &= \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \omega_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \omega_{i,j}} \\
N_{i,0}(u) &= \begin{cases} 1, & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, & \text{else} \end{cases} \\
N_{i,p}(u) &= \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \\
N_{j,0}(v) &= \begin{cases} 1, & v_j \leq v \leq v_{j+1} \\ 0, & \text{else} \end{cases} \\
N_{j,q}(v) &= \frac{v - v_j}{v_{j+q} - v_j} N_{j,q-1}(v) + \frac{v_{j+q+1} - v}{v_{j+q+1} - v_{j+1}} N_{j+1,q-1}(v)
\end{aligned} \right. \quad (52)$$

式中： $P_{i,j}$ 为  $u$  和  $v$  两个方向上  $(m+1) \times (n+1)$  个控制点坐标组成的矩阵的元素； $\omega_{i,j}$  为每个控制节点的权重； $N_{i,p}(u)$  和  $N_{j,q}(v)$  分别表示  $u$  方向上  $p$  次的规范 B 样条基函数和  $v$  方向上  $q$  次的规范 B 样条基函数。

NURBS 曲面具有诸多优秀的特性,其在计算机图像学中的成功应用刺激了光学研究者将其引入到光学设计中来,其具有的局部可调性允许对面形进行局部修改,使局部满足特定要求的同时不影响光学曲面的其他部分,这在光学设计中是极其诱人的。但是,由于 NURBS 曲面参数多,面形设计优化较为困难且速度慢。

### 6.2.2 NURBS 应用实例

#### 1) NURBS 曲面拟合复杂形状

研究了 NURBS 曲面描述复杂形状的能力(图 22)<sup>[15]</sup>。根据 Lee 等<sup>[87]</sup>于 1997 年提出的多分辨率 B 样条拟合算法(MBA),使用 NURBS 曲面对如图 22(a)所示的 Peaks 曲面进行拟合。首先对 Peaks 曲面进行均匀随机采样,然后使用 NURBS 曲面对点云数据进行多分辨率拟合,最终得到拟合误差的 RMS 值为  $9.69 \times 10^{-5}$  mm;而使用泽尼克多项式前 65 项对点云数据进行拟合,得到拟合误差的 RMS 值为 0.31 mm。NURBS 比泽尼克多项式精度提高 4 个数量级,说明在描述复杂的曲面时,NURBS 比泽尼克多项式更有优势。另一方面,NURBS 曲面可以用于光学系统热分析时描述局部面形的变化。NURBS 曲面可以精确地描述曲面局部精细几何特征,因此在对自由曲面光学系统进行热分析时,基于 NURBS 的曲面拟合更有优势。

#### 2) NURBS 曲面快速光线追迹

由于 NURBS 曲面是隐式描述曲面,需要研究快速的光线与曲面求解交点的空间坐标转换方法,以提升设计、分析和加工的转换速度<sup>[15]</sup>。当 NURBS 曲面应用于光学设计和加工时,需要先将物理空间坐标值  $(x, y)$  转换成对应的参数空间坐标  $(u, v)$ ,再根据  $(u, v)$  值求解出该点的物理空间坐标  $(x, y, z)$ 。参数空间

到坐标空间的转化只能通过反复迭代的方法求解。Piegl 等<sup>[88]</sup>提出 NURBS 曲面从物理空间到参数空间的最小矢量算法,但这种方法需要计算曲面的二阶偏导,因而速度较慢。为提升计算速度,提出基于光线曲面求交方法的坐标转换方法。

为了求取 NURBS 曲面上横纵坐标为  $(x, y)$  的点的  $z$  值,假设有一条光线从  $(x, y, 0)$  点以方向为  $(0, 0, 1)$  出射并与曲面相交,则光线与曲面的交点即为所求的点。

如图 23 所示,光线矢量用两个空间平面的交线表示。两个平面分别表示为  $P_1 = (N_1, d_1)$ ,  $P_2 = (N_2, d_2)$ ,其中  $N_i$  为平面的法线向量,是与光线方向垂直的单位向量, $d_i$  为原点与平面的距离, $i=1,2$ 。

当曲线上的点  $S(u, v)$  为光线与曲面的交点时,应满足以下判断条件:

$$R(u, v) = \begin{bmatrix} N_1 S(u, v) + d_1 \\ N_2 S(u, v) + d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

式中： $N_i$  为平面的法线向量的大小； $R(u, v)$  表示两个平面与曲线上的点  $S(u, v)$  之间的距离。

根据三维空间的牛顿迭代法的规则,上述方程解可表示为

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} - J^{-1} R(u, v), \quad (54)$$

式中： $u_n$  为第  $n$  次迭代时  $u$  方向的坐标； $v_n$  为第  $n$  次迭代时  $v$  方向的坐标； $J$  为  $R$  的雅可比矩阵,可表示为

$$J = \begin{bmatrix} N_1 S_u(u, v) & N_1 S_v(u, v) \\ N_2 S_u(u, v) & N_2 S_v(u, v) \end{bmatrix}, \quad (55)$$

式中： $S_u(u, v)$  和  $S_v(u, v)$  分别是曲面方程关于  $u, v$  的一阶偏导,表示曲面沿着  $u, v$  方向的切线向量大小。

由于该方法不需要计算曲面的二阶偏导数,因此速度较前一种方法有较大提高。为了实现快速的迭代求解,初值  $(u_0, v_0)$  的选取非常关键。为了减少迭代次数,需要选取合适的初值,使初值在精确解的附近。在 NURBS 曲面中,参数空间  $(u, v)$  和  $(x, y)$  是一一对应

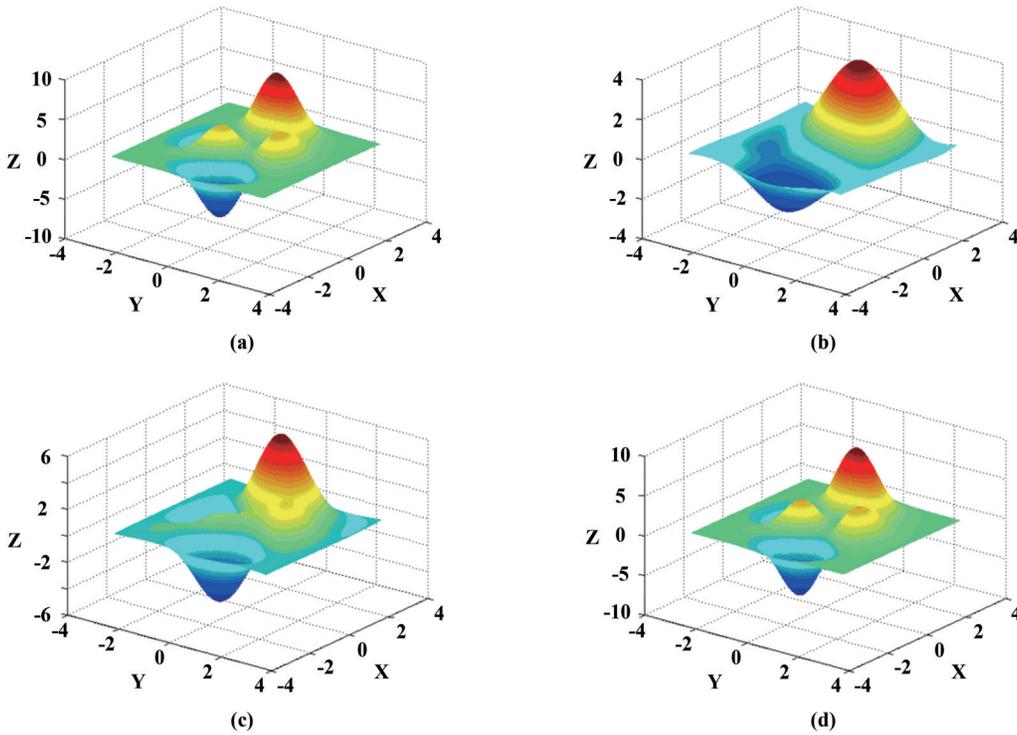


图 22 使用MBA算法将Peaks曲面拟合为NURBS曲面<sup>[15]</sup>。(a)待拟合的Peaks曲面；(b)第3次拟合结果；(c)第4次拟合结果；(d)第5次拟合结果

Fig. 22 NURBS surface fitted with Peaks surface based on MBA algorithm<sup>[15]</sup>. (a) Peaks surface to be fitted; (b) result of 3rd fitting; (c) result of 4th fitting; (d) result of 5th fitting

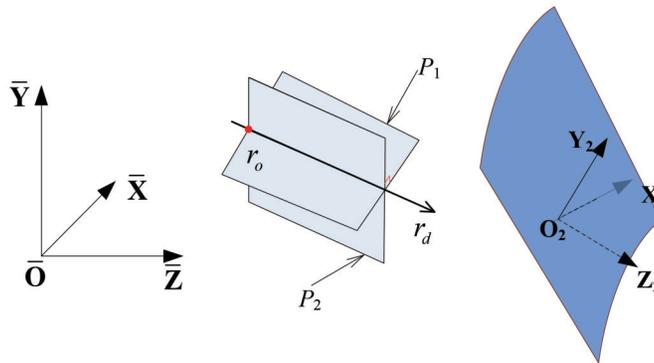


图 23 光线追迹法示意图<sup>[15]</sup>

Fig. 23 Schematic diagram of ray tracing process<sup>[15]</sup>

的非线性关系。为此,可预先由 $(u, v)$ 计算出 $(x, y)$ ,然后将它们拟合成多项式函数关系 $u=f(x), v=g(y)$ ,只要知道 $(x, y)$ 就能快速得到 $(u, v)$ 的初值。

对距离矢量算法和基于光线曲面求交的算法进行

实验,计算机CPU为Intel(R) Core(TM) i7-2600 CPU @ 3.40 GHz 四核,内存为3.5 GB。对NURBS曲面上3000个均匀随机分布的点进行计算,各种条件下所需时间如表1所示。

表 1 各算法的NURBS参数空间到坐标空间转化效率<sup>[15]</sup>  
Table 1 NURBS inversion algorithm's efficiency<sup>[15]</sup>

Inverse 3000 random point	Total time /s	Average time /s
Minimal distance algorithm (with fixed initial value)	3.7925	0.001264
Ray tracing algorithm (with fixed initial value)	1.1137	0.000371
Minimal distance algorithm (with estimated initial value)	3.0793	0.001026
Ray tracing algorithm (with estimated initial value)	0.8954	0.000298

从表 1 可以看出,在对  $u$ 、 $v$  的初值进行估计的情况下,光线追迹的方法所需的时间最短,求取 NURBS 曲面上 3000 个随机点的用时仅为 0.9 s,平均每点耗时仅为 0.3 ms,说明该方法可以满足光学设计和分析的速度要求,也可以用于 NURBS 光学自由曲面的在线加工。

## 7 总 结

对光学曲面数理描述方法的研究进展进行了总结。综述了光顺拼接曲面、旋转对称基底多项式曲面、离轴基底多项式曲面和局部面形可控描述曲面的数学描述方法和应用实例。虽然在过去的几十年间,从光学曲面的描述方法到其实际应用都有了巨大的突破,但是复杂光学曲面的描述、设计、加工和检测仍然面临许多的问题和挑战,存在诸多亟待解决的难题以及值得探索的方向,例如:研究面形表达能力更强、适用范围更广的曲面描述方法;研究能够同时兼顾像差优化和公差分配的曲面描述方法;研究利于曲面加工误差补偿的曲面描述方法;研究加快曲面的光线追迹速度以及与商用光学软件的集成;研究在光学设计软件、加工设备之间的数据传递效率和精度等。总之,通过研究灵活可控的复杂光学曲面数理描述方法以及面形控制及设计方法,设计师就可大幅增加有效的设计自由度,设计出更高性能的光学系统,促进光电设备的快速发展。

## 参 考 文 献

- [1] 杨通, 段瓌哲, 程德文, 等. 自由曲面成像光学系统设计: 理论、发展与应用[J]. 光学学报, 2021, 41(1): 0108001.  
Yang T, Duan Y Z, Cheng D W, et al. Freeform imaging optical system design: theories, development, and applications [J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(1): 0108001.
- [2] Broemel A, Lippmann U, Gross H. Freeform surface descriptions. Part I: mathematical representations[J]. Advanced Optical Technologies, 2017, 6(5): 327-336.
- [3] Broemel A, Liu C, Zhong Y, et al. Freeform surface descriptions. Part II: application benchmark[J]. Advanced Optical Technologies, 2017, 6(5): 337-347.
- [4] Rodgers J M. Nonstandard representations of aspheric surfaces in optical design[D]. Tucson: The University of Arizona, 1984.
- [5] Sasian J M. Annular surfaces in annular field systems[J]. Optical Engineering, 1997, 36(12): 3401-3403.
- [6] Lerner S A. Optical design using novel aspheric surfaces[D]. Tucson: The University of Arizona, 2000.
- [7] Forbes G W. Shape specification for axially symmetric optical surfaces[J]. Optics Express, 2007, 15(8): 5218-5226.
- [8] Forbes G W. Characterizing the shape of freeform optics[J]. Optics Express, 2012, 20(3): 2483-2499.
- [9] Inc.Synopsys. CODE V Product Literature[EB/OL]. (2023-01-14)[2023-01-14]. <https://www.synopsys.com/optical-solutions/codev/product-literature.html>.
- [10] Cakmakci O, Vo S, Foroosh H, et al. Application of radial basis functions to shape description in a dual-element off-axis magnifier[J]. Optics Letters, 2008, 33(11): 1237-1239.
- [11] Cakmakci O, Moore B, Foroosh H, et al. Optimal local shape description for rotationally non-symmetric optical surface design and analysis[J]. Optics Express, 2008, 16(3): 1583-1589.
- [12] Rogers J R. A comparison of anamorphic, keystone, and Zernike surface types for aberration correction[J]. Proceedings of SPIE, 2010, 7652: 76520B.
- [13] 王庆丰, 程德文, 王涌天. 双变量正交多项式描述光学自由曲面[J]. 光学学报, 2012, 32(9): 0922002.  
Wang Q F, Cheng D W, Wang Y T. Description of free-form optical curved surface using two-variable orthogonal polynomials [J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(9): 0922002.
- [14] Kaya I, Rolland J P. Hybrid RBF and local  $\phi$ -polynomial freeform surfaces[J]. Advanced Optical Technologies, 2013, 2(1): 81-88.
- [15] 周伟, 程德文, 许晨, 等. NURBS自由曲面在光机设计和分析中的应用[J]. 红外与激光工程, 2014, 43(10): 3313-3320.  
Zhou W, Cheng D W, Xu C, et al. Application of NURBS free-form surface in optomechanical design and analysis[J]. Infrared and Laser Engineering, 2014, 43(10): 3313-3320.
- [16] Cheng D W, Chen X J, Xu C, et al. Optical description and design method with annularly stitched aspheric surface[J]. Applied Optics, 2015, 54(34): 10154-10162.
- [17] Sasian J, Yan Y F. Miniature camera lens design with a freeform surface[J]. Proceedings of SPIE, 2017, 10590: 1059012.
- [18] 陈海龙, 高阳, 程德文, 等. 分段环形曲面的光学描述和设计方法[J]. 光学学报, 2018, 38(5): 0522002.  
Chen H L, Gao Y, Cheng D W, et al. Optical description and design method of annularly piecewise surface[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(5): 0522002.
- [19] 许晨. 自由曲面无遮挡离轴反射系统的设计方法和应用研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2018.  
Xu C. Study on design method and application of freeform unobscured off-axis reflective systems[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2018.
- [20] Schiesser E M, Takaki N, Stone B. Representations of off-axis conics for lens design[J]. Proceedings of SPIE, 2021, 12078: 120781F.
- [21] Yang T, Zhou L J, Cheng D W, et al. Designing reflective imaging systems with multiple-surfaces-integrated elements using a Gaussian function freeform surface[J]. Applied Optics, 2022, 61(17): 5215-5225.
- [22] Cheng D W, Chen H L, Shen W R, et al. Optical description and design method of smoothly stitched polynomial freeform surfaces[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2023, 162: 107349.
- [23] Zhu J, Wu X F, Yang T, et al. Generating optical freeform surfaces considering both coordinates and normals of discrete data points[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2014, 31(11): 2401-2408.
- [24] Ye J F, Chen L, Li X H, et al. Review of optical freeform surface representation technique and its application[J]. Optical Engineering, 2017, 56(11): 110901.
- [25] Rolland J P, Davies M A, Suleski T J, et al. Freeform optics for imaging[J]. Optica, 2021, 8(2): 161-176.
- [26] James B H. Lens of variable focal power having surfaces of involute form: US2475275[P]. 1949-07-05.
- [27] Plummer W T. Free-form optical components in some early commercial products[J]. Proceedings of SPIE, 2005, 5865: 586509.
- [28] Plummer W T. Unusual optics of the Polaroid SX-70 Land camera[J]. Applied Optics, 1982, 21(2): 196-208.
- [29] Bauer A, Pesch M, Muschaweck J, et al. All-reflective electronic viewfinder enabled by freeform optics[J]. Optics Express, 2019, 27(21): 30597-30605.
- [30] Bauer A, Rolland J P. Design of a freeform electronic viewfinder coupled to aberration fields of freeform optics[J]. Optics Express, 2015, 23(22): 28141-28153.
- [31] Zhu J, Hou W, Zhang X D, et al. Design of a low F-number freeform off-axis three-mirror system with rectangular field-of-

- view[J]. *Journal of Optics*, 2015, 17(1): 015605.
- [32] Yang T, Zhu J, Jin A G. Compact freeform off-axis three-mirror imaging system based on the integration of primary and tertiary mirrors on one single surface[J]. *Chinese Optics Letters*, 2016, 14(6): 60801-60805.
- [33] Schiesser E M, Bauer A, Rolland J P. Effect of freeform surfaces on the volume and performance of unobscured three mirror imagers in comparison with off-axis rotationally symmetric polynomials[J]. *Optics Express*, 2019, 27(15): 21750-21765.
- [34] Geyl R, Ruch E, Bourgeois R, et al. Freeform optics design, fabrication and testing technologies for space applications[J]. *Proceedings of SPIE*, 2019, 11180: 111800P.
- [35] Reimers J, Bauer A, Thompson K P, et al. Freeform spectrometer enabling increased compactness[J]. *Light: Science & Applications*, 2017, 6(7): e17026.
- [36] Cheng D W, Wang Q W, Liu Y, et al. Design and manufacture AR head-mounted displays: a review and outlook[J]. *Light: Advanced Manufacturing*, 2021, 2(3): 336-355.
- [37] Cheng D W, Wang Y T, Hua H, et al. Design of an optical see-through head-mounted display with a low F-number and large field of view using a freeform prism[J]. *Applied Optics*, 2009, 48(14): 2655-2668.
- [38] Cheng D W, Wang Y T, Hua H, et al. Design of a wide-angle, lightweight head-mounted display using free-form optics tiling[J]. *Optics Letters*, 2011, 36(11): 2098-2100.
- [39] Cheng D W, Wang Y T, Xu C, et al. Design of an ultra-thin near-eye display with geometrical waveguide and freeform optics [J]. *Optics Express*, 2014, 22(17): 20705-20719.
- [40] Wei L D, Li Y C, Jing J J, et al. Design and fabrication of a compact off-axis see-through head-mounted display using a freeform surface[J]. *Optics Express*, 2018, 26(7): 8550-8565.
- [41] Wilson A, Hua H. Design and demonstration of a vari-focal optical see-through head-mounted display using freeform Alvarez lenses[J]. *Optics Express*, 2019, 27(11): 15627-15637.
- [42] Cheng D W, Duan J X, Chen H L, et al. Freeform OST-HMD system with large exit pupil diameter and vision correction capability[J]. *Photonics Research*, 2022, 10(1): 21-32.
- [43] Cheng D W, Chen H L, Yao C, et al. Design, stray light analysis, and fabrication of a compact head-mounted display using freeform prisms[J]. *Optics Express*, 2022, 30(20): 36931-36948.
- [44] Watanabe T, Kawai S. Projection type image display apparatus: US20030063264[P]. 2003-04-03.
- [45] Nie Y F, Mohedano R, Benítez P, et al. Multifield direct design method for ultrashort throw ratio projection optics with two tailored mirrors[J]. *Applied Optics*, 2016, 55(14): 3794-3800.
- [46] Yu B H, Tian Z H, Su D Q, et al. Design and engineering verification of an ultrashort throw ratio projection system with a freeform mirror[J]. *Applied Optics*, 2019, 58(13): 3575-3581.
- [47] Mann H J, Ulrich W, Muellender S, et al. Imaging optical system and projection exposure installation for microlithography with an imaging optical system of this type: US20120008124[P]. 2012-01-12.
- [48] Liu Y, Li Y Q, Cao Z. Design method of off-axis extreme ultraviolet lithographic objective system with a direct tilt process [J]. *Optical Engineering*, 2015, 54(7): 075102.
- [49] Mao S S, Li Y Q, Jiang J H, et al. Design of a hyper-numerical-aperture deep ultraviolet lithography objective with freeform surfaces[J]. *Chinese Optics Letters*, 2018, 16(3): 030801.
- [50] 毛姗姗, 李艳秋, 刘克, 等. 高数值孔径自由曲面极紫外光刻物镜光学设计[J]. *红外与激光工程*, 2019, 48(8): 0814002.  
Mao S S, Li Y Q, Liu K, et al. Optical design of high numerical aperture extreme ultraviolet lithography objective with freeform surfaces[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2019, 48(8): 0814002.
- [51] Wu X F, Zhu J, Yang T, et al. Transverse image translation using an optical freeform single lens[J]. *Applied Optics*, 2015, 54(28): E55-E62.
- [52] Ma T, Yu J C, Liang P, et al. Design of a freeform varifocal panoramic optical system with specified annular center of field of view[J]. *Optics Express*, 2011, 19(5): 3843-3853.
- [53] Yang T, Jin G F, Zhu J. Automated design of freeform imaging systems[J]. *Light: Science & Applications*, 2017, 6(10): e17081.
- [54] Bauer A, Schiesser E M, Rolland J P. Starting geometry creation and design method for freeform optics[J]. *Nature Communications*, 2018, 9: 1756.
- [55] Duerr F, Thienpont H. Freeform imaging systems: Fermat's principle unlocks "first time right" design[J]. *Light: Science & Applications*, 2021, 10: 95.
- [56] Chen L, Gao Z S, Ye J F, et al. Construction method through multiple off-axis parabolic surfaces expansion and mixing to design an easy-aligned freeform spectrometer[J]. *Optics Express*, 2019, 27(18): 25994-26013.
- [57] Qin Z C, Wang X D, Ren C M, et al. Design method for a reflective optical system with low tilt error sensitivity[J]. *Optics Express*, 2021, 29(26): 43464-43479.
- [58] Chrisp M. Method of and system for optimizing NURBS surfaces for an imaging system: US20170242941[P]. 2017-08-24.
- [59] Jester P, Menke C, Urban K. Wavelet methods for the representation, analysis and simulation of optical surfaces[M]// Günther M, Bartel A, Brunk M, et al. *Progress in industrial mathematics at ECMI 2010. Mathematics in industry*. Heidelberg: Springer, 2012, 17: 357-363.
- [60] Sasian J M. Method of confocal mirror design[J]. *Optical Engineering*, 2019, 58(1): 015101.
- [61] Sasian J M. How to approach the design of a bilateral symmetric optical system[J]. *Optical Engineering*, 1994, 33(6): 2045-2061.
- [62] Reshidko D, Sasian J M. Method for the design of nonaxially symmetric optical systems using free-form surfaces[J]. *Optical Engineering*, 2018, 57(10): 101704.
- [63] Cheng D W, Xu C, Yang T, et al. Off-axis reflective imaging system design with a conicoid-based freeform surface[J]. *Optics Express*, 2022, 30(6): 9590-9603.
- [64] 王涌天. 复杂面型的实际光路追迹[J]. *光学技术*, 1990, 16(5): 2-8.  
Wang Y T. Ray-tracing formulae for optical surfaces of unusual shape[J]. *Optical Technique*, 1990, 16(5): 2-8.
- [65] Zernike F. Inflection theory of the cutting method and its improved form, the phase contrast method [J]. *Physica*, 1934, 1(7): 689-704.
- [66] Shannon R R. *The art and science of optical design*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- [67] Fuerschbach K, Rolland J P, Thompson K P. Theory of aberration fields for general optical systems with freeform surfaces[J]. *Optics Express*, 2014, 22(22): 26585-26606.
- [68] Bray M. Orthogonal polynomials: a set for square areas[J]. *Proceedings of SPIE*, 2004, 5252: 314-321.
- [69] Oprea J. *Differential geometry and its applications*[M]. Providence: American Mathematical Society, 2007.
- [70] 王佩昌, 师帅兵. 自由曲面的高斯曲率计算方法[J]. *西北农业大学学报*, 2000, 28(6): 150-153.  
Wang K C, Shi S B. An algorithm of Gauss curvature on free-surface[J]. *The Journal of Northwest Agricultural University*, 2000, 28(6): 150-153.
- [71] Pan B Z, Cheng H B, Tam H Y, et al. Design strategy for broadband or dual-band ultrathin imaging system[J]. *Optik*, 2013, 124(18): 3282-3286.
- [72] 张蕊蕊, 沈为民. 环型孔径折折叠型超薄镜头[J]. *红外与激光工程*, 2012, 41(5): 1306-1310.  
Zhang R R, Shen W M. Ultrathin lenses using annular folded optics[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(5): 1306-1310.
- [73] Cheng D W, Gong C, Xu C, et al. Design of an ultrawide angle

- catadioptric lens with an annularly stitched aspherical surface[J]. *Optics Express*, 2016, 24(3): 2664-2677.
- [74] Minefujii N. Projection optical system and projection type image display device: US7957078[P]. 2011-06-07.
- [75] Shafer D R. More of a new family of freeform mirror telescopes [EB/OL]. (2019-05-07) [2022-11-02]. <https://www.slideshare.net/operacrazy/more-of-a-new-family-of-freeform-mirror-telescopes>.
- [76] 程德文. 自由曲面光学系统设计方法及其应用研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2011.  
Cheng D W. Study on design methods of free-form imaging systems and their applications[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2011.
- [77] Alvarez L W. Two-element variable-power spherical lens: US3305294[P]. 1967-02-21.
- [78] Blendowske R, Villegas E A, Artal P. An analytical model describing aberrations in the progression corridor of progressive addition lenses[J]. *Optometry and Vision Science*, 2006, 83(9): 666-671.
- [79] Smilie P J, Suleski T J, Dutterer B, et al. Design and characterization of an infrared Alvarez lens[J]. *Optical Engineering*, 2012, 51(1): 013006.
- [80] Lou W, Cheng D W, Gu L, et al. Optical design and evaluation of Alvarez-type vision-training system[J]. *Chinese Optics Letters*, 2018, 16(7): 072201.
- [81] Takaki N, Papa J C, Bauer A, et al. Off-axis conics as base surfaces for freeform optics enable null testability[J]. *Optics Express*, 2020, 28(8): 10859-10872.
- [82] Rigler A K, Vogl T P. Spline functions: an alternative representation of aspheric surfaces[J]. *Applied Optics*, 1971, 10(7): 1648-1651.
- [83] Stacy J E. Asymmetric spline surfaces: characteristics and applications[J]. *Applied Optics*, 1984, 23(16): 2710-2714.
- [84] Gregory G G, Freniere E R, Gardner L R. Using spline surfaces in optical design software[J]. *Proceedings of SPIE*, 2002, 4769: 75-83.
- [85] Chase H. Optical design with rotationally symmetric NURBS [C]//International Optical Design Conference, June 3-5, 2002, Tucson, Arizona. Washington, D.C.: Optica Publishing Group, 2002: IMA2.
- [86] Jester P, Menke C, Urban K. B-spline representation of optical surfaces and its accuracy in a ray trace algorithm[J]. *Applied Optics*, 2011, 50(6): 822-828.
- [87] Lee S, Wolberg G, Shin S Y. Scattered data interpolation with multilevel B-splines[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1997, 3(3): 228-244.
- [88] Piegl L A, Tiller W. *The NURBS book*[M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1997.

## Mathematical Description and Design Methods of Complex Optical Surfaces

Cheng Dewen\*, Chen Hailong, Wang Yongtian, Yang Tong

*School of Optics and Photonics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*

### Abstract

**Significance** Aberration correction results and imaging performance of the optical systems are partly determined by the mathematical description method of the optical element surfaces. For example, a lens with the surface described by an even asphere equation can effectively correct the spherical aberration. Also, the mathematical expression determines the speed of ray tracing and optimization convergence affects the difficulty in surface processing and testing. Hence, it affects the overall development cycle and cost of the optoelectronic system. It is important to explore the novel optical surface description method to obtain an optical imaging system with higher performance. The optical surface should have more degrees of freedom to describe the complex shapes and correct the optical aberrations, and the optimization of the parameters should converge quickly with an acceptable result in the design process.

Since the 16th century, researchers have been investigating description methods of the optical surface. Especially since the end of the last century, various novel description methods have been proposed. They have played an active role in different optical systems and have effectively improved the system's performance. Novel optical surfaces are effective in practical applications such as periscopes, progressive addition lenses, viewfinders, remote sensing, projection, and lithography.

Optical surfaces can be divided into two categories: explicitly and implicitly defined surfaces according to the mathematical expression. In the process of optimization, it is necessary to calculate the intersection point of the rays with the surface and the first partial derivative of the surface at the intersection point to determine the propagation direction of the rays after passing through the optical surface. For surfaces with explicit definitions, it is easy to get the calculation result through explicit expressions. However, for surfaces with implicit definitions, finite difference or other methods are utilized to trace rays. Hence, the ray tracing speed of an explicitly defined surface is larger. Almost all optical surfaces are defined by explicit expressions. A typical implicitly defined surface is a non-uniform rational B-Spline surface.

Depending on the effect of parameters on the sag of the surface, mathematical descriptions of optical surfaces may be local or global. For the global descriptions, the sag and partial derivative on the whole surface will be changed when the

arbitrary parameter of the optical surface is adjusted. The local descriptions have a more powerful ability to tune the local shape. Each parameter of local descriptions has a limited range of influence on the shape of the surface, so the local curvature of the surface can be adjusted without affecting the shape of the surface outside its area of action. Spline surface, Gaussian basis function surface, and wavelet function surface are local descriptions. Moreover, the stitched surface also can be considered a local description.

To control the surface shape effectively, designers would like to use the low-order parameters of the mathematical descriptions during optimization. However, from a macroscopic point of view, this approach reduces the degrees of freedom, which goes against the original intention of using a complex optical surface to be flexible and more descriptive. If the designer can control the surface shape strongly, it may be bold to optimize the optical system with high-order parameters. The surface shape of a complex optical surface can be constrained by controlling the first and second partial derivatives and the local Gaussian curvature of the optical surface.

To meet the design requirements of optical systems with high performance, it is necessary to extend the mathematical description and design methods of optical surfaces. Complex optical surfaces with additional degrees of freedom can effectively improve the performance of the optical system.

**Progress** The developing status of mathematical description and design methods for complex optical surfaces is summarized. First, the mathematical description methods of optical surfaces are briefly discussed. Currently, most mathematical descriptions of optical surfaces are global and explicit. For optical surfaces with explicit definitions, Cartesian coordinates are generally applied to model them (Fig. 1). The mathematical expression of a complex optical surface can be decomposed into two main parts: the base term and the deformation term. Sphere, conic, and bi-conic are common basic terms, which mainly contain the second-order components and express the main shape of the surface. Deformation terms, such as polynomials, describe additional, and asymmetric surface shapes are responsible for the aberration correction. Then, the state of the art and progress in the mathematical description of optical surfaces are elaborated. With the increasing complexity of optical systems, conventional spherical and aspherical surfaces severely lack degrees of freedom and are hard to meet design requirements. Researchers have proposed various expressions to describe optical surfaces. The basic terms and complex optical surfaces are listed separately. Subsequently, methods on how to control the local or global shape of complex optical surfaces are introduced. Controlling the shape of complex optical surfaces is important. On the one hand, it ensures the manufacturability and detectability of optical components. On the other hand, a reasonable shape can save processing time and costs. In the end, the mathematical formalisms of the novel optical surfaces are given. Practical examples are listed to demonstrate the feasibility and effectiveness of these surfaces. The future research directions for the mathematical description method of the complex optical surface are discussed and analyzed.

**Conclusions and Prospects** Benefiting from the development of processing techniques, complex optical surfaces are widely applied in practice. In summary, the mathematical description and design methods of complex optical surfaces still need in-depth and detailed explorations to promote the achievement of high-performance optical systems.

**Key words** optical design; geometric optics; imaging system; optical surface; mathematical description