

多径向节次拉盖尔-高斯光束旋转多普勒效应分析

朱向阳¹, 邱松¹, 丁友¹, 刘通¹, 刘政良¹, 任元^{2*}¹航天工程大学宇航科学与技术系, 北京 101416;²航天工程大学基础部, 北京 101416

摘要 针对不同径向节次拉盖尔-高斯(LG)光束,首先阐述了其物理意义及强度分布规律,分析了高径向节次LG光束在横向偏移入射条件下的旋转多普勒效应(RDE)。其次,根据散射体模型,设计变量控制实验探究了不同径向节次LG光束对横移条件下RDE的影响,实验结果表明:不同径向节次LG光束虽然能够增强横向往移条件下旋转多普勒信号的光强及幅值,有助于转速信息提取,但二者并非线性关系;随着径向节次的增大,频域信号幅值呈现先增大后减小的规律,存在最佳径向节次值,使得信号幅值最大;LG光束的径向节次并不影响转速测量精度。最后,从理论上分析了LG光束的径向节次影响旋转多普勒信号强度的原因。本研究在拓展涡旋光测速应用范围,增加目标转速探测距离及提高准确度方面具有较大的应用潜力。

关键词 物理光学; 径向节次; 涡旋光; 旋转多普勒效应; 横向偏移

中图分类号 O436 **文献标志码** A

DOI: 10.3788/AOS221762

1 引言

涡旋光束是一种具有螺旋形波前和中心相位奇点的特殊结构光束,其相位因子由 $\exp(il\varphi)$ 来定义,其中 l 表示涡旋光束的拓扑荷数。自1992年Allen等^[1]发现拉盖尔-高斯(LG)模式的涡旋光束可以携带完备的轨道角动量(OAM)以来,这一特殊结构光束受到了国内外学者的广泛关注并在多个领域展现出巨大的应用潜力^[2-5]。与光束的偏振态、振幅、相位类似,OAM是涡旋光束的另一动量维度^[6],但和光束自旋角动量(SAM)不同,OAM模态数不仅限于 ± 1 ,可以无限扩展,不同OAM模态相互正交,理论上能够形成无限大的希尔伯特空间。相较于光束其他维度,OAM具有更大的调控空间,目前已被应用到光学操控^[7-9]、量子通信^[10-11]、遥感测量^[12-14]等领域。

根据光与物质相互作用原理,旋转物体能够对携带OAM的入射涡旋光束进行调制,使得散射光出现频移,与线性多普勒效应原理类似,但又存在显著的区别:线性多普勒效应仅能检测目标沿波源发射方向的速度分量产生的频移^[15],对横向旋转运动并不敏感。由于涡旋光束能流方向($S = E \times H$)与光束传播轴并不重合,因此垂直于光束传播轴方向的目标旋转运动也能够对光频进行调制,这一特性被用于旋转物体的转速测量,被称为“旋转多普勒效应”(RDE)^[16-18]。

1998年,Courtial等^[19]证明携带轨道角动量的光束在以角速度 Ω 旋转时,能够在频域产生频率偏移,大小为 $l\Omega$,其中 l 为光束拓扑荷数,他们首次通过实验证明除线性多普勒频移外,还存在旋转多普勒频移。2011年Belmonte等^[17]指出在涡旋光场中的粒子能够对光场进行调制,并由线性多普勒频移推导得到旋转多普勒频移公式 $\Delta f = m\omega / (2\pi)$,其中 ω 为粒子转速, m 为方位角指数,即拓扑荷数。2013年,Lavery等^[20]进一步研究了物体的RDE,提出系统性的转速测量方案。之后许多研究人员从不同角度对RDE进行解释并扩展了其应用范围^[21-23]。

涡旋光束现已被广泛用于RDE探测^[14,24-27],但目前大多数RDE研究集中于涡旋光束的拓扑荷数 l 这一单一参数与OAM、频移等物理量之间的联系,较少有研究人员关注径向节次 p 。与贝塞尔光束相比^[28],高径向节次LG光束^[29]展现出更好的自愈性,在同等条件下,高径向节次LG光束具有一定的无衍射性,传播过程中光束质量更好^[23]。虽然文献^[30]中探究了非零径向节次 p 对RDE的影响,但仅限于涡旋光束与物体旋转中心重合的情况。本文将不同径向节次的LG光束作为探测光,首先阐述LG光束中径向节次的物理意义,分析径向节次对LG光束强度分布的影响,结合散射点模型,从理论上分析存在横向偏移条件下,径向节次数对旋转多普勒信号的影响并探析其原因;其次,

收稿日期: 2022-09-27; 修回日期: 2022-11-08; 录用日期: 2022-11-18; 网络首发日期: 2022-11-21

基金项目: 国家自然科学基金(11772001,61805283)、基础加强计划重点基础研究项目(2019-JCJQ-ZD)

通信作者: *renyuan_823@aliyun.com

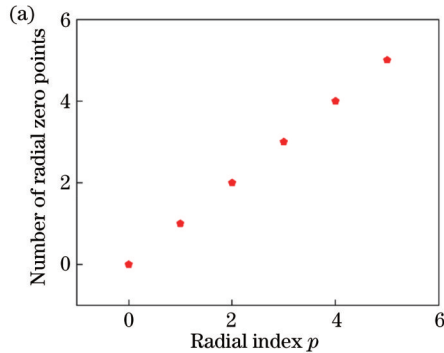
搭建未对准条件下 RDE 探测装置,通过实验分析 LG 光束中心轴与物体旋转中心不共轴条件下,径向节次 p 对目标转速测量准确度和回波信号幅值的影响规律。所得结论扩展了 RDE 实际应用场景,扩大了其适用范围,同时有助于提升其探测距离,对于实际条件下物体转速测量具有较大借鉴意义。

$$\xi_{\text{L.G.}, pl}(r, \varphi, z) = \frac{C_{pl}}{w_0} \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_z}\right)^{|l|} L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{w_z^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w_z^2}\right) \exp\left\{i\left[l\varphi - \frac{kr^2}{2R_z} + (2p + |l| + 1) \arctan \frac{2z}{kw_0^2}\right]\right\}, \quad (1)$$

式中: C_{pl} 为与 p, l 有关的系数; w_0 表示传播距离为 0 时的基模束腰半径; $L_p^{|l|}$ 为缔合拉盖尔多项式,它是调节 LG 光束强度分布的主要数值项; $w_z = w_0\sqrt{1 + z^2/z_R^2}$, 为传播距离 z 处的束腰半径; $R_z = z + z_R^2/z$, 为波前曲率半径; $z_R = kw_0^2/2$, 其中 k 为波数,表示式为 $k = 2\pi/\lambda$ 。从式(1)可以看出,当传播距离 z 、拓扑荷数 l 、基模束腰半径 w_0 确定后, LG 光束径向光强分布就由拉盖尔多项式 $L_p^{|l|}$ 决定,光束周向强度幅值、相位分布由其余因子决定。

缔合拉盖尔多项式 $L_p^{|l|}(2r^2/w_z^2)$ 是分析径向因子的关键项,通过展开 LG 模式,得到不同阶径向节次差分算子 \widehat{P}_z ,其中曲率半径是 \widehat{P}_z 的主要影响因素,具体推导过程见文献[31]。将曲率半径与双曲动量关联,在圆柱坐标系中定义的较为清晰的双曲动量算子为

$$\widehat{G}_r = -i\hbar\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 1\right), \quad (2)$$



2 基本原理

在近轴近似条件下,通过求解一维波动方程可得出 LG 光束的标准形式。在柱坐标系 (r, φ, z) 下 LG 光束的标准形式^[31]一般可记为

式中: \hbar 为约化普朗克常量。将双曲动量算子代替曲率半径,径向节次的实际物理含义便突显出来。分析式(2)发现,双曲线动量会产生膨胀,而不是线性平移。由上述推导可知,径向因子是本征双曲动量指数的外在表现,本征双曲动量指数则是径向因子的本质物理意义。

由拉盖尔函数的性质递推得到的不同径向节次 p 和拓扑荷数 l 的拉盖尔多项式的通用表达式为

$$L_p^{|l|}(x) = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n (p+|l|)! x^n}{(|l|+n)! n! (p-n)!}, & p \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

设定拓扑荷数 $l = 15$, 传播距离 $z = 0.0000001$ m, 结合式(3)与式(1)进行数值模拟,得到拉盖尔函数的零点个数随 p 值的变化曲线以及 LG 光束径向强度随 p 值的变化曲线,如图 1 所示。

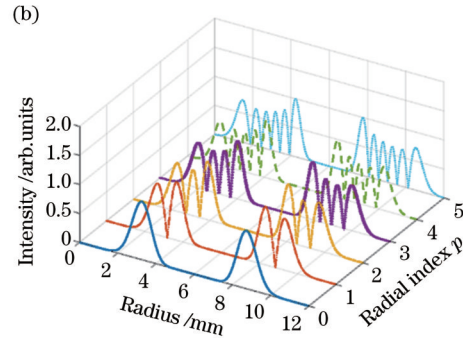


图 1 LG 光束的径向零点与强度分布仿真结果。(a) 当拓扑荷数为 15 时,拉盖尔函数的零点个数随 p 值的变化关系;(b) 当拓扑荷数为 15、径向节次从 0 增大到 5 时, LG 光束的径向剖面强度

Fig. 1 Simulation results of number of radial zero points and intensity distribution of LG beam. (a) Relationship between the number of radial zero points of Laguerre function and the radial index p when topological charge is 15; (b) radial intensity of LG beam with radial index of 0–5 when the topological charge is 15

图 1(b) 中第一条含有 2 个峰值的实线表示径向节次为 0 时 LG 光束的径向剖面强度,第二条含有 4 个峰值的虚线表示径向节次为 1 时 LG 光束的径向剖面强度,以此类推。从图 1 可以看出: p 个零值点将 LG 光束径向强度分割为 $p + 1$ 个峰值,产生 $p + 1$ 个同心涡旋;最内环的涡旋光束强度最大,对光信号收集效果的

影响最大,而中心暗环半径逐渐减小;其余光环除最外环外,强度随径向距离的增大依次减小^[32]。 p 这一径向参数通过影响拉盖尔函数来改变光束的径向光强分布,展现出其对 LG 光束径向强度的强大调节作用。可见,多径向节次涡旋光束径向强度分布的确定,为分析 p 值对横移条件下的旋转多普勒信号幅值的影响提

供了理论指导。

利用 LG 光束进行转速探测时存在两种情况：1) 当涡旋光光轴与物体旋转中心对准时，二者的相对位置如图 2(a) 所示，轨道角动量的存在使得坡印亭矢量与光束传播轴之间存在夹角 $\alpha = \arcsin[\lambda/(2\pi r_B)]$ ，其中 r_B 为涡旋光束半径。设定旋转角速度为 Ω ，根据 RDE 得到频移 Δf 与拓扑荷数、转速之间的关系为

$$\Delta f = \frac{f_0 v}{c} \sin \alpha = \frac{f_0 \Omega r}{c} \cdot \frac{l \lambda}{2\pi r} = \frac{l \Omega}{2\pi}, \quad (4)$$

式中： λ 为光束波长； c 为光束波速； $f_0 = c/\lambda$ ，为光束频率。2) 当存在横向偏移时，涡旋光束与物体旋转中心的相对位置如图 2(b) 所示。根据散射点模型，将物体每个点的线速度 $v = \Omega r_1$ 分解到涡旋光束的切向与径向两个方向，并利用切线方向的速度分量 v' 对光频进行调制，由图 2(b) 的几何关系分析得到旋转多普勒频移为

$$\Delta f = \frac{f_0 v}{c} \sin \alpha \cos \beta = \frac{f_0 \Omega r_1}{c} \cdot \frac{l \lambda}{2\pi r_2} \cdot \cos \beta = \frac{l \Omega}{2\pi} + \frac{l \Omega d}{2\pi r_2} \cos \theta, \quad (5)$$

式中： r_2 为涡旋光束的半径，其定义为在光束截面内，从光斑中心开始光束振幅首次下降至最大值的 $1/e$ 时离光轴的距离^[33]； r_1 为涡旋光束半径； d 为横向偏移值； β 为散射点到光斑中心之间连线的垂直方向与该点线速度的夹角； θ 为光斑中心到散射点的连线与物体旋转中心到光斑中心连线的夹角。从式(5)可以看出，受到横向偏移的影响，旋转多普勒频移以 $l\Omega/(2\pi)$ 为中心上下对称展宽。进一步计算旋转多普勒带宽的中间值作为中心频移 f_δ ，得到

$$f_\delta = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2} = \frac{l \Omega}{2\pi}, \quad (6)$$

式中： f_{\max} 和 f_{\min} 分别为当转速、拓扑荷数、涡旋光束半径、横向偏移值固定时，展宽的旋转多普勒频移的最大值与最小值。

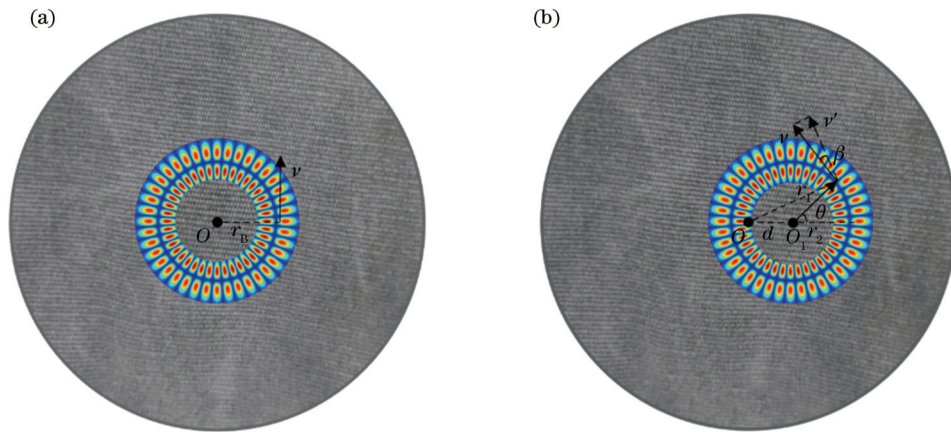


图 2 LG 光束与旋转物体相对位置示意图，其中 O 点为物体旋转中心， O_1 为 OAM 光束中心， $d = |OO_1|$ 为 O 点与 O_1 点的距离。(a) 当 $d = 0$ ，即 O_1 与 O 重合时，LG 光束与旋转物体的相对位置示意图；(b) 当 $d \neq 0$ ，即存在横向偏移，物体旋转中心与 LG 光束中心不重合时，LG 光束与旋转物体的相对位置示意图

Fig. 2 Schematic of relative position of LG beam and rotating object, O is the rotation center of the object, O_1 is the center of the LG beam, and d is the distance between O and O_1 . (a) Schematic of relative position of LG beam and rotating object when $d = 0$, i. e. O_1 and O coincide; (b) schematic of relative position of LG beam and rotating object when the optical axis does not coincide with the rotating axis

在采用径向节次为 p_0 的 LG 光束作为入射光束的条件下，径向的 $p_0 + 1$ 个同心涡旋环的拓扑荷数相同，当涡旋光束中心轴与物体旋转轴未对准时， $p_0 + 1$ 个涡旋产生的旋转多普勒频移相互叠加，频域信号幅值有所提升。若径向节次 p 过大，内环涡旋光束能量更为集中，对散射信号收集效果的影响最强烈，而涡旋光束的内环半径 r_2 明显减小，导致频谱信号逐渐展宽，频域信号的平均幅值逐渐减小。总体平均频域信号幅值随着径向节次的增加呈现先增大后减小的变化趋势，因此存在最佳径向节次值，使得信号幅值最大，信噪比较高，便于信号提取，从而提升转速测量精度，增加探

测距离。

3 实验分析

3.1 实验装置

为验证以上理论分析结果，设计了以多径向节次 LG 光束为入射光，光束传播轴与物体转轴存在横移情况下的 RDE 探测实验，实验装置如图 3(a) 所示。

由固体激光器 (CNI MSL-FN-532) 产生波长为 532 nm 的高斯激光束，该光束经过水平偏振片 (Pol)，调制产生水平偏振光，以确保空间光调制器 (SLM) (滨松 X15213) 实现最大衍射效率；水平偏振光经过由

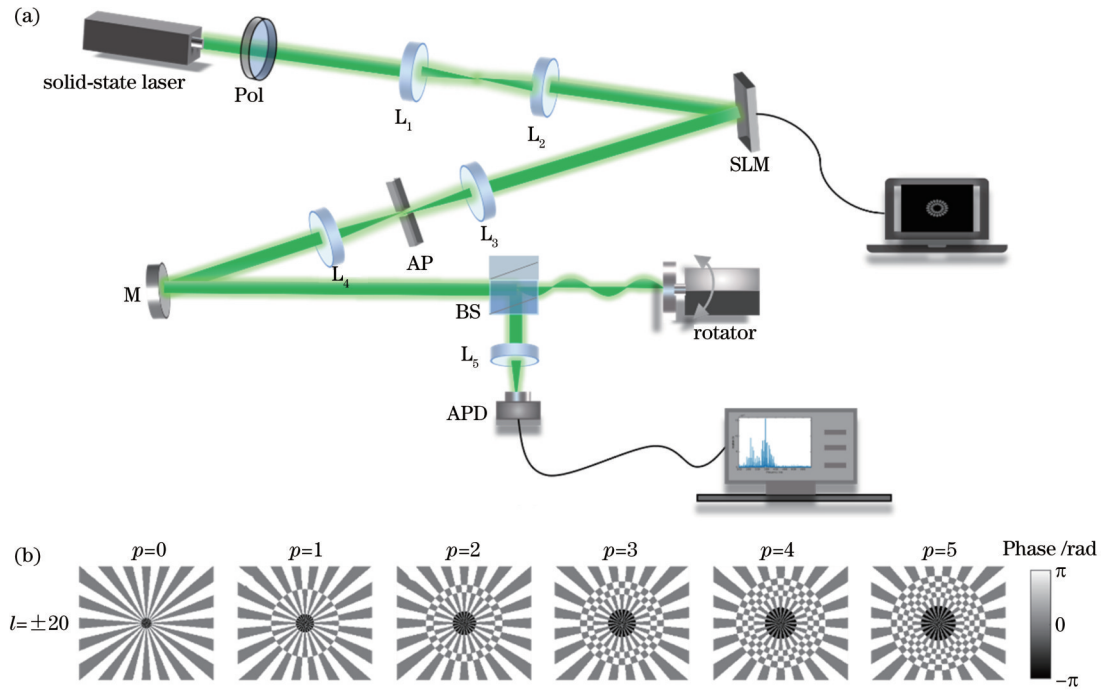


图3 实验装置及相位分布图。(a)多径向节次LG光束的RDE实验装置图;(b)拓扑荷数 $l = \pm 20$,径向节次从0到5的LG光束的相位结构

Fig. 3 Experiment setup and phase distribution diagrams. (a) Schematic of RDE experiment setup of LG beam with different radial indices; (b) phase distribution diagrams of LG beam with radial index from 0 to 5 when the topological charge is ± 20

透镜 L_1 、 L_2 组成的 $4f$ 系统扩束准直后,均匀覆盖在SLM上。在SLM上加载不同拓扑荷数、径向节次的叠加态全息图,光束经过SLM后,在闪耀光栅作用下衍射产生多个级次。为确保LG光束的纯度与强度最高,使衍射光束依次经过由透镜 L_3 、光阑(AP)和透镜 L_4 组成的 $4f$ 系统,挑选出第一级衍射光,不同径向节次涡旋光束的相位如图3(b)所示。涡旋光束经反射镜(M)调整为水平光后,穿过分束镜(BS)照射到旋转物体上,产生的反射光经过BS、透镜 L_5 会聚到硅基雪崩光电探测器(APD)上,经放大后完成信号收集,通过频域变换得到旋转多普勒频谱,其中透镜 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 的焦距均为100 mm,透镜 L_5 的焦距为50 mm。将旋转物体固定在可移动平台上,通过移动平台可以精确控制旋转物体的横向移动距离,而物体转速则由控制器调节。

3.2 实验结果与讨论

为探究径向节次这一单一因素对横移条件下RDE的影响,设定加载在SLM上的全息图的初始束腰半径、拓扑荷数、光束传播距离等因素完全相同,仅径向节次为唯一变量。实验中确保激光发射功率相同,设定叠加态LG光束的拓扑荷数 $l = \pm 20$,制备出径向节次 p 为0~5的叠加态涡旋光束,其强度分布如图4(a1)、(a2)所示。可以看出,当径向涡旋环数量为 $p+1$ 时,最内环涡旋光束的强度最大,其余同心涡旋环除最外环外,强度随径向距离的增大逐渐减小。该实验结果与理论分析结果一致。实际上,不同拓扑荷

数的高径向节次LG光束的径向强度分布规律相同。调整转机旋转平台,使旋转物体中心与光束传播轴横向偏移 $d = 1.25$ mm;调节控制器,保持物体转速为50 Hz;依次使用不同径向节次LG光束照射旋转物体表面,反射光由光电探测器接收。根据式(5),理论旋转多普勒展宽范围为1200~2800 Hz,中心频移为2000 Hz。实验中设定采样时长 t 为1 s,得到不同径向节次LG光束回波的时域信号如图4(b1)、(b2)所示,频域信号如图4(c1)、(c2)所示。在频域中,截取所有展宽范围内的信号值,并取其平均值作为回波信号强弱的衡量标准,中心频移点由展宽频带的中间值确定。图4(b1)、(b2)中,虚线代表平均时域信号强度;图4(c1)、(c2)中,圆点为中心频移点,虚线框内为旋转多普勒频移展宽带,实直线代表频谱展宽范围内的平均信号功率值。根据图4中不同径向节次的中心频移值得测得转机的转速,其中最大转速误差为2.5%,与理论频移值分析结果基本一致,证明LG光束的径向节次不会影响转速的测量精度,且平均信号功率值随径向节次 p 的增加先增大后减小。实验结果表明,当 $p \geq 0$ 时,旋转多普勒信号的平均时域强度、平均频谱功率值均随径向节次的增加先增大后减小,这是因为开始时径向节次的增加使得同心涡旋数量增多,光束强度逐渐增大,有效反射信号增强,频域幅值逐渐增大;随着径向节次再增加,中心光环能量集中,同时内侧暗环半径逐渐减小。根据式(5),当半径明显减小时,旋转多普勒频谱逐渐展宽,平均频域幅值强度减小,这与理论

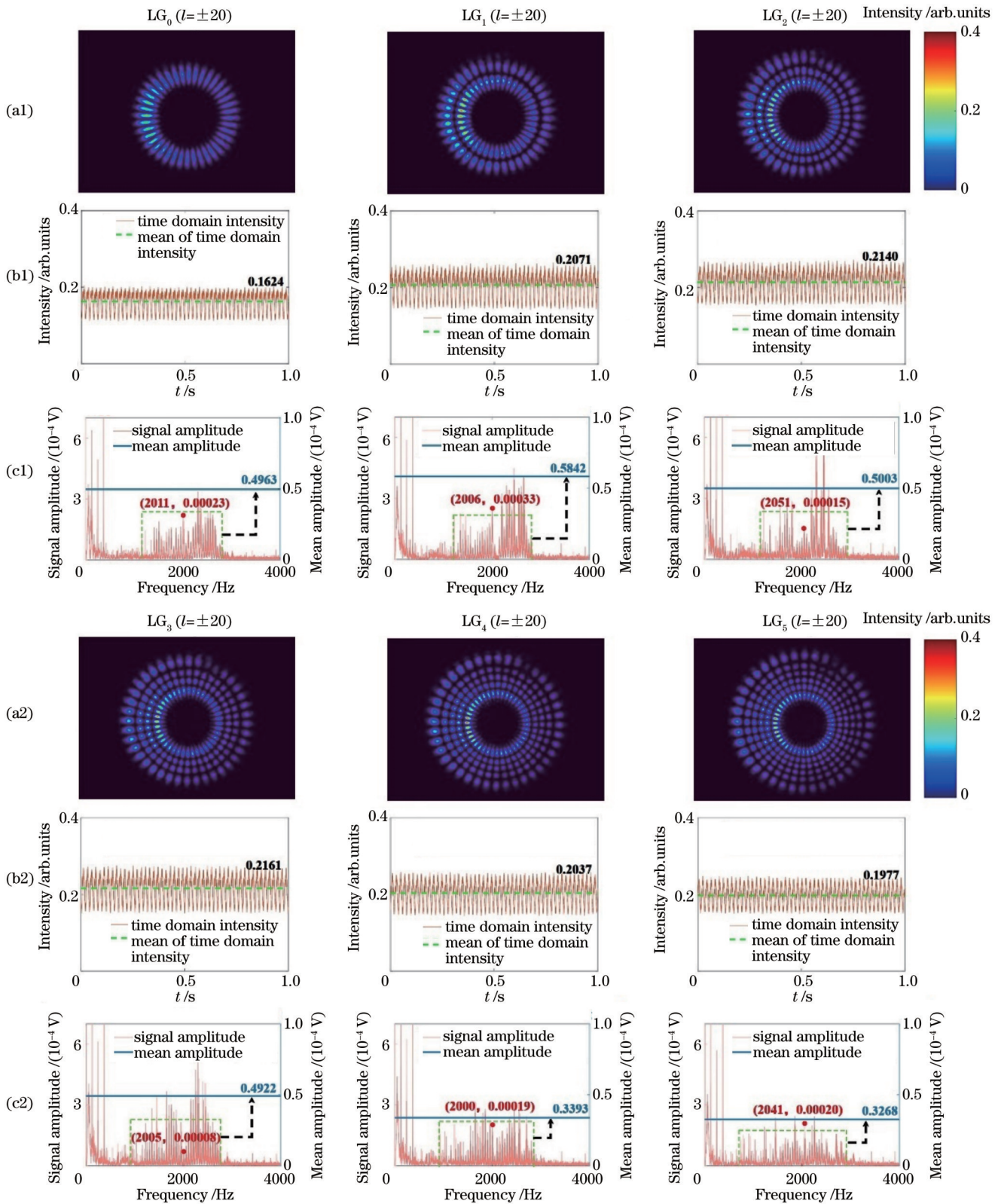


图 4 实验结果。(a1)(a2)不同径向节次的 LG 光束强度;(b1)(b2)反射光的时域强度图,虚线代表平均时域信号强度;(c1)(c2)变换后的旋转多普勒频谱,虚线框内为旋转多普勒频谱展宽带,实直线代表虚线框内频谱展宽范围的平均信号功率值,圆点为中心频移点

Fig. 4 Experimental results. (a1)(a2) Intensity of LG beam with different radial indices; (b1)(b2) signal intensity of the reflected light in the time domain, dotted line indicates the mean of time domain signal intensity; (c1)(c2) rotational Doppler spectra in the frequency domain after transformation, dotted frame is the frequency domain signal broadening area, the straight solid line represents the average signal power value of the spectrum broadening range in the dotted frame, and the dot is the central frequency shift point

分析结果吻合。本次实验的平均频谱信号功率值在径向节次为 1 和 2 处最大,这一发现有助于增大信号幅值,增加探测距离,扩大涡旋光束在转速探测上的应用范围。

为验证不同径向节次涡旋光束对横移条件下旋转多普勒频谱影响的一般性,设定拓扑荷数 $l = \pm 20$,调整转机转速分别为 20、30、40、50、60 Hz,并控制其他变量相同进行重复实验,得到不同径向节次光束实际转速值的测量结果,如图 5 所示。结果表明:在横向偏移情况下,由 RDE 测得的最大转速误差为 2.7%;涡旋光束的径向节次不影响转速的测量精度。可见,实验与理论结果符合得较好。

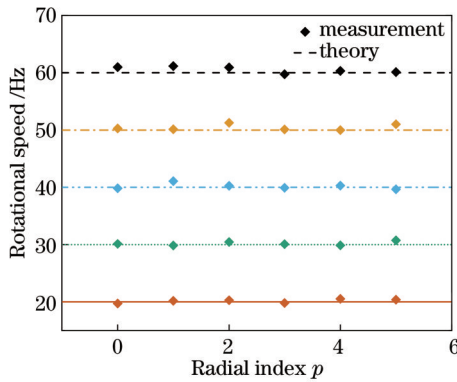


图 5 $l = \pm 20$ 时不同径向节次的 LG 光束作为入射光,旋转物体中心与 LG 光束中心存在横向偏移情况下测量的转速随径向节次的变化曲线

Fig. 5 Curves of measured rotational speed changed with radial index when the different radial index LG beam whose topological charge is ± 20 is used as incident light and there is lateral misalignment between the center of rotating object and the center of LG beam

之后设定转速为 50 Hz,拓扑荷数分别为 ± 10 、 ± 20 、 ± 30 、 ± 40 、 ± 50 ,得到不同径向节次处频谱展宽范围内的平均频域幅值,其变化曲线如图 6 所示。实验结果表明,在存在横向偏移的情况下,平均 RDE 信号幅值随径向节次的增大均呈现先增大后减小的趋势,当径向节次为 1 和 2 时幅值最大。实验结果证明了在 LG 探测光束与物体转轴未对准的条件下,涡旋光存在最佳径向节次,使得散射光频域幅值信号最强这一规律的一般性,有助于扩大 RDE 的应用场景,增加探测距离及提高识别准确度。

上述分析结果对非合作目标转速测量的实际工程应用具有较大的参考意义,通过采用合适的非零径向节次涡旋光束能够提高光束强度,增加探测距离,同时增大频域幅值和信噪比,有助于转速信息的提取。在旋转物体表面材料为锡纸的情况下, p 值取 1 或 2 时频率幅值最大。值得注意的是,考虑径向节次的影响时一定不能忽略旋转物体表面的材料和形态分布,不同材料、形态分布的物体所对应的最优径向节次具有特

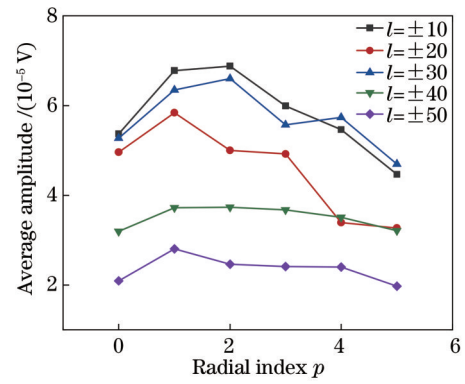


图 6 当转机速度为 50 Hz 时,不同拓扑荷数条件下平均 RDE 信号幅值随径向节次的变化曲线

Fig. 6 Average RDE signal amplitude varied with radial index under different topological charges when the rotating speed is 50 Hz

殊性,使用涡旋光束 RED 对物体转速进行提取测量时需具体考虑。

4 结 论

从理论上研究了 LG 光束径向节次的物理意义,证明了径向节次的本质意义是本征双曲动量;结合 LG 的振幅表达式,阐明了高径向指数涡旋光径向方向上的多个相位环的强度分布规律;通过实验分析了光束传播轴与物体旋转中心存在横向偏移情况下,不同径向节次 LG 光束对 RED 的影响,实现了多径向节次 LG 光束为探测光源的目标转速测量。结果表明,在非共轴条件下的情况下,涡旋光束的径向节次不影响转速的测量精度,对于不同的旋转物体材料,选取适当的径向节次可提升旋转多普勒频谱幅值,增大信噪比,增加涡旋光束的探测距离,扩大涡旋光束探测的应用范围。本研究对现实条件下旋转物体转速探测工程化具有较大借鉴意义,在涡旋光束与旋转物体转轴未对准等实际条件下,所提方法有助于提升物体转速信息的识别准确度。此外,高径向节次 LG 光束由于具有更大的辐照面积,能够增大目标捕捉概率。

参 考 文 献

- [1] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J, et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes[J]. Physical Review A, 1992, 45(11): 8185-8189.
- [2] Paterson L, MacDonald M P, Arlt J, et al. Controlled rotation of optically trapped microscopic particles[J]. Science, 2001, 292(5518): 912-914.
- [3] Harwit M. Photon orbital angular momentum in astrophysics[J]. The Astrophysical Journal Letters, 2003, 597(2): 1266-1270.
- [4] Wang J, Yang J Y, Fazal I M, et al. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing [J]. Nature Photonics, 2012, 6(7): 488-496.
- [5] Devlin R C, Ambrosio A, Rubin N A, et al. Arbitrary spin-to-orbital angular momentum conversion of light[J]. Science, 2017, 358(6365): 896-901.

- [6] 陆璇辉, 黄慧琴, 赵承良, 等. 涡旋光束和光学涡旋[J]. 激光与光电子学进展, 2008, 45(1): 50-56.
Lu X H, Huang H Q, Zhao C L, et al. Optical vortex beams and optical vortices[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2008, 45(1): 50-56.
- [7] Padgett M, Bowman R. Tweezers with a twist[J]. Nature Photonics, 2011, 5(6): 343-348.
- [8] Phillips D B, Lee M P, Speirits F C, et al. Rotational Doppler velocimetry to probe the angular velocity of spinning microparticles[J]. Physical Review A, 2014, 90(1): 011801.
- [9] Zhang Y Q, Shi W, Shen Z, et al. A plasmonic spanner for metal particle manipulation[J]. Scientific Reports, 2015, 5: 15446.
- [10] Willner A E, Huang H, Yan Y, et al. Optical communications using orbital angular momentum beams[J]. Advances in Optics and Photonics, 2015, 7(1): 66-106.
- [11] Eyyuboğlu H T. Mutual coherence function based topological charge detection in a Gaussian vortex beam optical communication system[J]. Physica Scripta, 2022, 97(9): 095507.
- [12] Rosales-Guzmán C, Hermosa N, Belmonte A, et al. Direction-sensitive transverse velocity measurement by phase-modulated structured light beams[J]. Optics Letters, 2014, 39(18): 5415-5418.
- [13] Zhou H L, Fu D Z, Dong J J, et al. Orbital angular momentum complex spectrum analyzer for vortex light based on the rotational Doppler effect[J]. Light: Science & Applications, 2017, 6(4): e16251.
- [14] Zhai Y W, Fu S Y, Zhang J Q, et al. Remote detection of a rotator based on rotational Doppler effect[J]. Applied Physics Express, 2020, 13(2): 022012.
- [15] Yang Z H, Zhang Y K, Zhou J, et al. Real-time wind field measurements using all-fiber mobile Doppler wind lidar[J]. Optical Engineering, 2020, 59(3): 034107.
- [16] Bialynicki-Birula I, Bialynicka-Birula Z. Rotational frequency shift[J]. Physical Review Letters, 1997, 78(13): 2539-2542.
- [17] Belmonte A, Torres J P. Optical Doppler shift with structured light[J]. Optics Letters, 2011, 36(22): 4437-4439.
- [18] Zhou H L, Fu D Z, Dong J J, et al. Theoretical analysis and experimental verification on optical rotational Doppler effect[J]. Optics Express, 2016, 24(9): 10050-10056.
- [19] Courtial J, Dholakia K, Robertson D A, et al. Measurement of the rotational frequency shift imparted to a rotating light beam possessing orbital angular momentum[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(15): 3217-3219.
- [20] Lavery M P J, Speirits F C, Barnett S M, et al. Detection of a spinning object using light's orbital angular momentum[J]. Science, 2013, 341(6145): 537-540.
- [21] Fang L, Padgett M J, Wang J. Sharing a common origin between the rotational and linear Doppler effects[J]. Laser & Photonics Reviews, 2017, 11(6): 1700183.
- [22] Qiu S, Liu T, Li Z M, et al. Influence of lateral misalignment on the optical rotational Doppler effect[J]. Applied Optics, 2019, 58(10): 2650-2655.
- [23] Mendoza-Hernández J, Arroyo-Carrasco M L, Iturbe-Castillo M D, et al. Laguerre-Gauss beams versus Bessel beams showdown: peer comparison[J]. Optics Letters, 2015, 40(16): 3739-3742.
- [24] Zhai Y W, Fu S Y, Yin C, et al. Detection of angular acceleration based on optical rotational Doppler effect[J]. Optics Express, 2019, 27(11): 15518-15527.
- [25] Ren Y, Qiu S, Liu T, et al. Compound motion detection based on OAM interferometry[J]. Nanophotonics, 2022, 11(6): 1127-1135.
- [26] Cheng T Y, Wang W Y, Li J S, et al. Rotational Doppler effect in vortex light and its applications for detection of the rotational motion[J]. Photonics, 2022(9): 441.
- [27] 邱松, 任元, 刘通, 等. 基于涡旋光多普勒效应的旋转柱体转速探测[J]. 光学学报, 2020, 40(20): 2026001.
Qiu S, Ren Y, Liu T, et al. Detection of rotational cylinder speed using Doppler effect of optical vortex[J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(20): 2026001.
- [28] Fu S Y, Wang T L, Zhang Z Y, et al. Non-diffractive Bessel-Gauss beams for the detection of rotating object free of obstructions[J]. Optics Express, 2017, 25(17): 20098-20108.
- [29] 湛娟, 柯熙政, 杨一明. 拉盖尔高斯光的衍射和轨道角动量的弥散[J]. 光学学报, 2014, 34(4): 0427001.
Chen J, Ke X Z, Yang Y M. Laguerre-Gaussian beam diffraction and dispersion of the orbital angular momentum[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(4): 0427001.
- [30] Qiu S, Ren Y, Liu T, et al. Rotational Doppler effect detection by LG beams with a nonzero radial index[J]. Optics Express, 2021, 29(7): 10275-10284.
- [31] Plick W N, Krenn M. Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams[J]. Physical Review A, 2015, 92(6): 063841.
- [32] Haddadi S, Louhibi D, Hasnaoui A, et al. Spatial properties of a diffracted high-order radial Laguerre-Gauss LG_{p0} beam[J]. Laser Physics, 2015, 25(12): 125002.
- [33] Twamley J. Quantum distribution functions for radial observables[J]. Journal of Physics A, 1998, 31(20): 4811-4819.

Rotational Doppler Effect Analysis of Multi-Radial Index Laguerre-Gaussian Beam

Zhu Xiangyang¹, Qiu Song¹, Ding You¹, Liu Tong¹, Liu Zhengliang¹, Ren Yuan^{2*}

¹Department of Aerospace Science and Technology, Space Engineering University, Beijing 101416, China;

²Department of Basic Course, Space Engineering University, Beijing 101416, China

Abstract

Objective Based on the rotational Doppler effect (RDE), the vortex beam carrying orbital angular momentum (OAM) can be sensitive to the rotation movement along the normal direction, so the vortex beam is widely used for measuring the rotational speed. At present, the commonly used beam in RDE research is the Laguerre-Gaussian (LG) beam. However, most studies focus on the relationship between the azimuthal index in the vortex beam and OAM, frequency shift, and

other physical quantities. Few researchers have paid attention to the radial index. Compared with Bessel beams, the LG beam with a high radial index shows better self-healing. Under equal conditions, the LG beam with a high radial index shows a certain degree of nondiffracting characteristics, and the beam quality is better during propagation. Although the influence of the non-zero radial index on RDE has been explored in previous literature, it is only limited to the case where the vortex beam coincides with the rotational center of the object. In practical noncooperative measurement, it is more common that the LG beam does not coincide with the object's rotating axis. Therefore, this research mainly explores the influence of the LG beam's radial index on the rotational Doppler signal under the misaligned condition. It is found that different from the alignment condition, although the radial index of the LG beam can enhance the amplitude of the rotational Doppler signal under the condition of lateral misalignment, which is helpful for rotational speed extraction, the relationship is not linear. With the increase in the radial index, the amplitude of the frequency signal increases first and then decreases. There is an optimal radial index, which maximizes the signal amplitude. This discovery expands the practical application range of RDE and helps to select the appropriate radial index, so as to improve the detection range under the condition of lateral misalignment. Therefore, it is of great significance for reference.

Methods In the study, LG beams with different radial indexes are used as the detection light source. First, the physical meaning of the radial index is described, and the influence of the radial index on the intensity distribution of the LG beam is analyzed. Combined with the small scattering model, we have theoretically analyzed the influence of radial index on the rotational Doppler signal under the misalignment condition and the reason. Second, a proof-of-concept experiment is designed for rotational speed detection by using different radial indexes. The experiment shows that the radial index affects the accuracy of target speed measurement and the amplitude of the frequency signal when the LG beam axis is not coaxial with the rotation axis of a spinning object. The experimental results are in good agreement with the theory. Third, different conditions are set to verify the generality and correctness of the rule through repeated experiments.

Results and Discussions By comparing the experimental results (Fig. 4), it is found that the average amplitude of the rotational Doppler signal first increases and then decreases with the increase in the radial index. When the radial index is 1 or 2, the effective average frequency amplitude is maximum. This is because, in the beginning, the increase in the radial index makes the number of concentric vortices increase. In addition, the beam intensity gradually increases, and the effective reflected signal and the frequency amplitude rise. Then, with the increase in the radial index, the energy of the central optical ring is concentrated, but the radius of the innermost ring gradually decreases. On the basis of the small scattering model, the radius decreases obviously, the rotational Doppler spectrum gradually broadens, and the average frequency amplitude decreases. After that, we change the topological charge of the vortex beam and do several repeated experiments. The measurement results (Fig. 6) have shown the same rule and proved the generality and correctness of the rule.

Conclusions This study analyzes the influence of the radial index in the LG beam on the rotational Doppler signal under the condition that the object rotation axis is misaligned with the vortex beam axis. The experimental results show that with the increase in the radial index, the average signal frequency amplitude increases first and then decreases. Therefore, there is an optimal radial index to maximize the signal amplitude. Under the condition that the surface material of the rotating object is tinfoil, the average frequency signal is maximum when the radial index is 1 or 2. It is worth noting that when the influence of the radial index is considered, the material and shape distribution on the surface of the spinning object cannot be ignored. The optimal radial index for different materials has its particularity, which needs to be specifically considered when the rotational speed of the object based on RDE is measured. This research provides a reference for improving the rotational speed measurement ability in practical engineering, expands the practical application range of RDE, and contributes to selecting the appropriate radial index to increase the detection range of the spinning object. Therefore, it is of great reference significance for the engineering of rotational speed detection of spinning objects.

Key words physical optics; radial index; vortex light; rotational Doppler effect; lateral misalignment