

# 基于双重傅里叶分析的光学旋转多普勒频移优化测量

唐若愚<sup>1</sup>, 邱松<sup>1</sup>, 刘通<sup>1</sup>, 李修乾<sup>2</sup>, 刘政良<sup>1</sup>, 任元<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>航天工程大学宇航科学与技术系, 北京 101416;

<sup>2</sup>航天工程大学教务处, 北京 101416;

<sup>3</sup>航天工程大学基础部, 北京 101416

**摘要** 从旋转多普勒频谱展宽的机理出发, 根据轨道角动量模式展开的原理, 分析了展宽频谱的特征, 提出了一种双重傅里叶分析方法, 将展宽的频谱进行处理, 得到具有单一峰值的频谱, 从而更加方便、清晰地提取目标转速, 降低光学旋转多普勒测速技术对光束质量和入射条件的要求。该研究有助于进一步推动旋转多普勒测速技术在实际工程中的应用。

**关键词** 物理光学; 双重傅里叶分析; 涡旋光; 旋转多普勒效应; 轨道角动量; 转速探测

**中图分类号** O436 **文献标志码** A

**DOI:** 10.3788/AOS221734

## 1 引言

1992年, Allen等<sup>[1]</sup>研究并发现光量子不仅可以携带自旋角动量, 还可以携带轨道角动量(OAM), 并提出了一种典型的携带OAM的拉盖尔-高斯(LG)光束, 这种光束由于具有螺旋形相位分布, 被形象地称为涡旋光束, 并在近些年来成为国际光学领域的一个研究热点。涡旋光除了具有螺旋形相位结构外, 还具有中空形式的环状强度分布, 在光场中心有一个相位奇点。除了LG光束外, 常见的涡旋光还包括贝塞尔-高斯光束、圆艾里-高斯光束等。涡旋光在粒子操控、量子通信、目标探测等领域具有广泛的研究价值与重要应用前景<sup>[2]</sup>, 其中涡旋光能应用于目标探测主要是基于其自身的旋转多普勒效应(RDE)<sup>[3-6]</sup>。

根据经典平面波的多普勒效应原理, 当光与接收者之间相互靠近或远离时, 接收者接收到的光频率会发生变化。在涡旋光中, 由于螺旋相位的存在, 其坡印廷矢量方向与光束传播方向并不重合, 而是存在一个夹角<sup>[7-9]</sup>, 当涡旋光垂直照射至旋转物体表面时, 由于该夹角的存在, 旋转物体表面散射点的速度方向与坡印廷矢量的方向并不正交, 因此二者之间便出现了相互“靠近”或“远离”的相对运动, 从而产生了多普勒效应<sup>[10-11]</sup>, 使散射光的频率发生改变。由于这种多普勒效应在产生时, 物体在光束传播方向上没有运动, 而是

只在垂直于光束传播方向的平面内存在旋转运动, 故这种多普勒效应被形象地称为旋转多普勒效应。

2013年, Lavery等<sup>[3]</sup>推导了利用叠加态LG光束产生旋转多普勒频移的表达式, 并进行了实验验证。然而, 在实际探测中, 由于大气湍流扰动及其他技术原因<sup>[12]</sup>, 涡旋光的模式纯度并不能达到100%, 就一般情况而言, 涡旋光的光轴与物体转轴并不能保证严格重合, 同时, 涡旋光在传播时很可能会受到遮挡, 从而导致光斑不完整。这些情况都会使得旋转多普勒频谱发生展宽<sup>[13-15]</sup>。展宽的频谱不仅会降低信噪比, 而且会掩盖物体的真实转速, 增大测量误差, 使提取目标转速变得更加困难。现有的利用旋转多普勒效应测量转速的优化测量方案大多都是对测量光路进行改进, 如利用镜像系统实现旋转多普勒频移的级联加倍<sup>[16]</sup>, 利用平衡探测系统实现共模噪声消除<sup>[17]</sup>、提高系统的信噪比等, 此类方案通过优化光路设计, 得到了具有较高信噪比的信号, 但是对于光束质量和光束入射条件有较高要求。

本文针对光束质量不高、光束入射条件不理想的情况, 在信号处理的层面, 从旋转多普勒频移展宽的机理出发, 根据OAM模式分解的原理, 分析了展宽后的频谱特征, 提出了一种双重傅里叶分析方法, 对展宽的频谱进行二次处理, 使二次频谱仅出现与物体转速相关的单一峰值, 提高了信噪比, 减小了测量误差, 实现

收稿日期: 2022-09-22; 修回日期: 2022-10-18; 录用日期: 2022-11-15; 网络首发日期: 2022-11-21

基金项目: 国家自然科学基金(11772001, 61805283)

通信作者: \*renyuan\_823@aliyun.com

了旋转多普勒频移的优化测量。与其他优化测量方案相比,本文提出的方法不需要对光路进行改进,仅需要对探测信号进行进一步的处理,且降低了测量时对光束质量和入射条件的要求,使得利用涡旋光探测物体转速更加具有了工程实用性。最后,针对涡旋光模式不纯、涡旋光与物体存在横向位移,以及非完整涡旋光三种使得频移产生展宽的情况,搭建了旋转多普勒效应实验装置,验证了双重傅里叶分析方法的实际效果。

## 2 基本原理

### 2.1 旋转多普勒频谱展宽原理

旋转多普勒频谱展宽的本质是涡旋光束 OAM 谱的展宽。以 LG 光束为例,标准 LG 模式是波动方程的傍轴近似解,同时也是光场的一种本征模式<sup>[15]</sup>。在利用旋转多普勒效应探测旋转目标时,最常用的也是 LG 光束。在笛卡儿坐标系下,在  $z=0$  处,沿  $z$  轴传播的标准 LG 模式的复振幅表达式为

$$E(x, y) = E_0 \left( \frac{x + yi}{\omega_0} \right)^l L_p^{l|l} \left[ \frac{2(x^2 + y^2)}{\omega_0^2} \right] \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2} \right), \quad (1)$$

式中:  $E_0$  为常数;  $\omega_0$  为束腰半径;  $i$  为虚数单位;  $L_p^{l|l}$  为缔合拉盖尔多项式;  $l$  为拓扑荷数;  $p$  为径向节次。一个标准 LG 模式光束携带单一的 OAM, 由拓扑荷数  $l$  决定, 大小为  $lh$  ( $h$  为归一化普朗克常数)。当涡旋光的模式不纯时, 光场包含多个标准 LG 模式, OAM 谱发生展宽, 相应的旋转多普勒频移也会发生展宽。当 LG 光束的光轴相对于定义的  $z$  轴沿  $x$  轴方向发生横向偏移时, 如图 1 所示, 光轴沿  $x$  轴横向偏移  $d$ , 偏移后的 LG 光束的表达式为

$$E_d(x, y) = E_0 \left[ \frac{(x-d) + yi}{\omega_0} \right]^l L_p^{l|l} \left[ \frac{2(x-d)^2 + 2y^2}{\omega_0^2} \right] \times \exp \left[ -\frac{(x-d)^2 + y^2}{\omega_0^2} \right]. \quad (2)$$

令  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , 其中  $r$ 、 $\varphi$  分别为柱坐标系的极径和极角, 得到柱坐标系下的表达式为

$$E_d(r, \varphi) = \frac{E_0}{\omega_0^l} [r \exp(i\varphi) - d]^l \times L_p^{l|l} \left[ \frac{2(r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi)}{\omega_0^2} \right] \times \exp \left( -\frac{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi}{\omega_0^2} \right), \quad (3)$$

式(3)中, 相位信息包含在  $[r \exp(i\varphi) - d]^l$  项中, 将其展开得

$$[r \exp(i\varphi) - d]^l = \sum_{n=0}^l C_l^n r^n \exp(in\varphi) (-d)^{l-n}, \quad (4)$$

式中:  $C_l^n$  为二项式系数。螺旋谐波包含在  $\exp(in\varphi)$

中, 从式(4)可以看出, 偏移后的 LG 光束表现为多个标准 LG 模式的叠加, 每个标准 LG 模式具有不同的拓扑荷数, 因此偏移后的 LG 光束将包含多种不同的 OAM 模式, 而每个模式都会产生其对应的旋转多普勒频移, 造成旋转多普勒频移中包含多个频移成分。

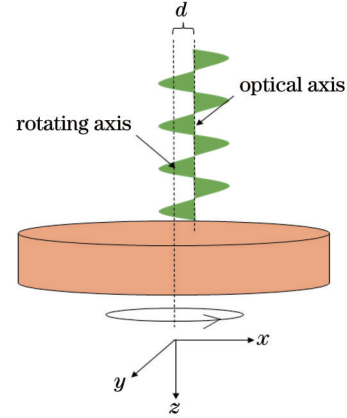


图 1 涡旋光光轴发生横向偏移的示意图  
Fig. 1 Sketch map of lateral displacement of vortex beam optical axis

由于螺旋谐波因子  $\exp(i\varphi)$  的正交性, 所有的 LG 模式构成一组完备的正交基<sup>[18]</sup>, 任一光场都可以表征为不同拓扑荷数的标准 LG 模式的叠加。将式(1)变换至柱坐标系下, 得到柱坐标系下标准 LG 模式的表达式为

$$E(r, \varphi) = \frac{E_0}{\omega_0^l} r^l L_p^{l|l} \left( \frac{2r^2}{\omega_0^2} \right) \exp \left( -\frac{r^2}{\omega_0^2} \right) \exp(i\varphi) = E_{pl}(r) \exp(i\varphi), \quad (5)$$

式中:  $E_{pl}(r)$  表示与相位无关的振幅项。对于任意光场  $U(r, \varphi)$ , 有

$$U(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} K_l E_{pl}(r) \exp(i\varphi), \quad (6)$$

式中:  $K_l$  为各标准 LG 模式的系数, 由于标准 LG 模式具有正交性,  $K_l$  可以通过内积运算求得:

$$K_l = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} U(r, \varphi) E_{pl}(r) \exp(i\varphi) d\varphi dr. \quad (7)$$

基于这种方法, 可以得到任意模式光束的 OAM 谱, 进而可得光束所包含的标准 LG 模式的拓扑荷数分布, 从而得到旋转多普勒频移的分布特征。对于光轴发生偏移、光束模式不纯或者光束受遮挡情况下的涡旋光, 均可采用此方法进行模式分解。利用上述基于标准 LG 模展开的原理, 对具有横向偏移以及非完整的叠加态涡旋光进行了 OAM 谱的计算仿真, 结果如图 2 所示。

从图 2 中可以看出, 横向位移和不完整涡旋光的 OAM 谱在原拓扑荷数附近展开, 相邻拓扑荷数的差值为 1, 这是因为光子的 OAM 是量子的<sup>[1]</sup>, 不同模式的光子之间 OAM 最小差值为  $\hbar$ , 因此当光束 OAM 谱发生

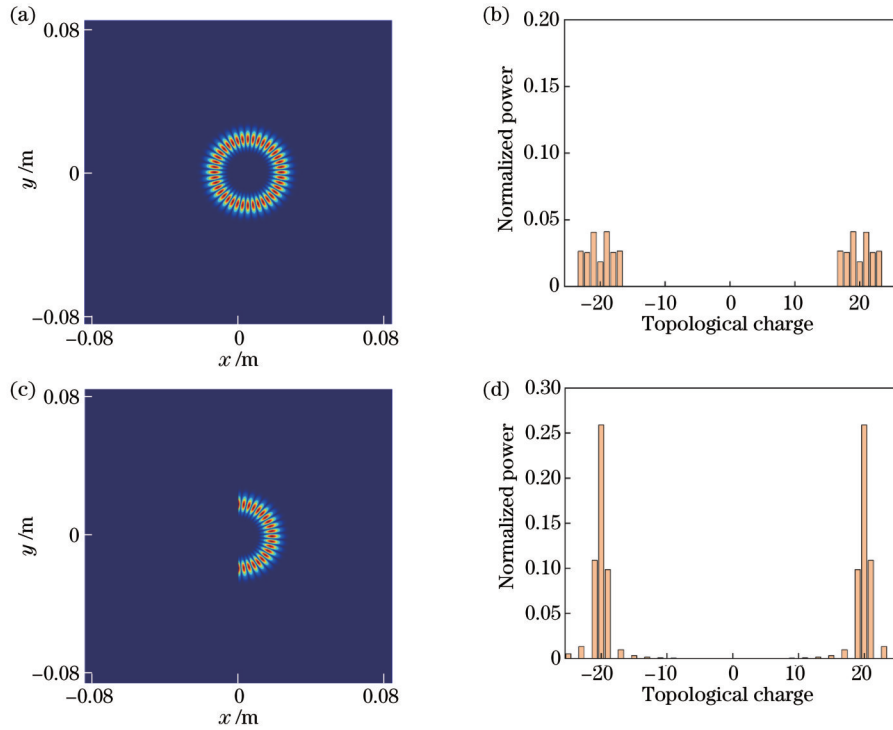


图2 OAM分解仿真结果。(a)  $l = \pm 20, d = 5$  mm的叠加态LG光束;(b)  $l = \pm 20, d = 5$  mm的叠加态LG光束的OAM谱;  
(c)  $l = \pm 20$ ,缺失了一半的叠加态LG光束;(d)  $l = \pm 20$ ,缺失了一半的叠加态LG光束的OAM谱

Fig. 2 Simulation results of OAM decomposition. (a) Superposition-mode LG beam with  $l = \pm 20$  and  $d = 5$  mm; (b) OAM spectrum of superposition-mode LG beam with  $l = \pm 20$  and  $d = 5$  mm; (c) superposition-mode LG beam with half of it missing for  $l = \pm 20$ ; (d) OAM spectrum of superposition-mode LG beam with half of it missing for  $l = \pm 20$

展宽时,不同LG模式之间拓扑荷数的最小间隔为1,这是OAM谱的重要特征,该特征也决定了展宽频谱的特征。同理,由于模式纯度不纯的叠加态涡旋光的光强分布不均匀性,分解得到的OAM谱也是在理论上的拓扑荷数附近展开,与横向位移条件下和不完全条件下的OAM谱具有相同特征。OAM谱发生展宽,光束包含的标准LG模式不唯一,导致旋转多普勒频谱发生了展宽。2.2节将分析光束OAM谱特征对于旋转多普勒频移的影响以及由此带来的旋转多普勒频谱的特征。

## 2.2 展宽频谱的特征与双重傅里叶分析方法

利用旋转多普勒效应进行转速测量时,通常使用拓扑荷数大小相等、符号相反的两束涡旋光组成的叠加态涡旋光作为探测光<sup>[19-21]</sup>。当使用拓扑荷数为 $\pm l$ 的叠加态涡旋光探测旋转物体时,两束光产生的旋转多普勒频移分别为<sup>[3]</sup> $\Delta f_1 = +l\Omega/2\pi$ 与 $\Delta f_2 = -l\Omega/2\pi$ ,其中 $\Omega$ 为旋转物体的转速。根据拍频效应的原理,频移后的叠加态涡旋光对光强的调制频率 $f_{\text{mod}} = l\Omega/\pi$ 。综合2.1节中所述,对于模式不纯的涡旋光、横向位移的涡旋光和非完整的涡旋光,OAM谱出现展宽。例如,对于拓扑荷数为 $l = \pm 10$ 的叠加态涡旋光,OAM谱出现展宽后,包含的标准LG模式可能为-9、-10、-11、9、10、11,根据拍频原理,对 $l = -9$ 与 $l = 9$ 的模式成分进行拍频时光强产生 $f_{\text{mod}} = 18\Omega/2\pi$ 的调制频率, $l = -9$ 与 $l = 10$ 时光强产生 $f_{\text{mod}} = 19\Omega/2\pi$ 的调制

频率,以此类推,光强的调制频率可能有 $18\Omega/2\pi$ 、 $19\Omega/2\pi$ 、 $20\Omega/2\pi$ 、 $21\Omega/2\pi$ 、 $22\Omega/2\pi$ 。将光电探测器探测到的光强信号进行傅里叶变换后,频谱上出现多个峰值,此时的频谱是经过一次傅里叶变换后得到的频谱,称为一次频谱。值得注意的是,相邻峰值间的频率差为 $\Omega/2\pi$ ,这正是物体的转速频率 $\omega$ ,这是展宽频谱的一个重要特征。

由于这些峰值的频率间隔是相同的,从周期函数角度来看,这些离散等间隔分布的峰值使得一次频谱具有了明显的周期性特征,故可以认为一次傅里叶变换后的频谱包含一个周期函数 $C_T(f)$ ,其中 $f$ 为频率,周期 $T$ 为峰值间的频率间隔,即 $T = \omega$ 。由于OAM谱中各拓扑荷数的强度大小不同,各频率处的峰值大小也不同,整个展宽的多普勒频谱的包络线可以近似看作拱形,即关于频率的周期函数 $C_T(f)$ 还叠加上了一个幅度调制函数,假设幅度调制函数为 $a(f)$ ,则一次频谱可以表示为 $C(f) = a(f)C_T(f)$ 。对一次频谱信号取对数得

$$C'(f) = \lg C(f) = \lg a(f) + \lg C_T(f). \quad (8)$$

对取对数后的一次频谱 $C'(f)$ 再次进行傅里叶变换,得到的频谱称为二次频谱。由于 $C'(f)$ 包含 $\lg C_T(f)$ 这个周期分量,二次频谱会在对应的频率 $f' = 1/T$ 处出现一个峰值,而峰值所对应频率的倒数就是



物体的转速。由于对原始信号进行了两次傅里叶变换,将这种方法称为双重傅里叶分析方法。该方法利用了展宽的一次频谱中相邻峰值间隔为旋转频率这一特征,将其变为一个只在单一频率上出现峰值的二次频谱。受频谱展宽的影响,只通过一次频谱提取被测物体转速会产生较大误差,并且受人为主观因素影响较大。而经过双重傅里叶变换得到二次频谱则可通过单一的峰值提取物体的转速,该方法能够减小测量误差,更有

利于实现转速自适应提取。

### 3 实验结果与讨论

为了验证双重傅里叶分析方法的实际效果,设计了旋转多普勒效应测量实验。针对涡旋光模式不纯、涡旋光与物体存在横向位移以及非完整涡旋光三种使得频谱产生展宽的情况,利用双重傅里叶分析方法进行信号处理,提取物体转速,实验装置如图 3 所示。

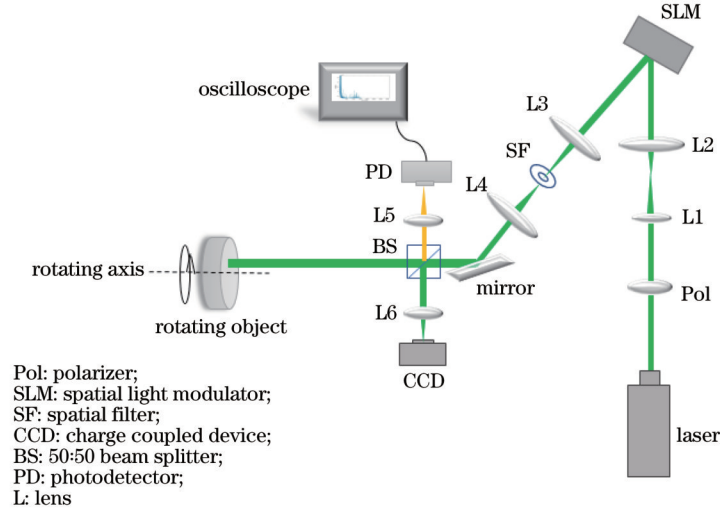


图 3 旋转多普勒效应测量实验装置图

Fig. 3 Experimental setup of measurement of RDE

激光器产生的波长为 532 nm 的激光束透过偏振片,由透镜 L1 和 L2 进行扩束准直,照射至空间光调制器上,在空间光调制器上依次加载完整叠加态涡旋光全息图和非完整叠加态涡旋光全息图。激光束经空间光调制器的调制后,透过由透镜 L3、L4 和光阑组成的 4f 空间滤波系统,挑选出一级衍射光。光束通过分光棱镜,一束光经透镜 L6 会聚至 CCD,另一束光垂直照射至旋转物体,旋转物体可在垂直于激光束的面内横向移动,光束经旋转物体反射后,通过分光棱镜和透镜 L5 会聚到光电探测器上,示波器对光电探测器输出的信号进行采样。

空间光调制器上加载拓扑荷数  $l = \pm 20$  的完整叠加态涡旋光全息图,CCD 采集到的光强分布如图 4 所示,可以看出光强分布并不均匀,说明实验制备的涡旋光包含多种模式成分。设置物体转动频率为 30 r/s,调整电机位置,使得涡旋光的光轴与旋转物体转轴重合,此时,从理论上讲,一次频谱会在  $f_{\text{mod}} = l\Omega/\pi = 1200$  Hz 处出现单一峰值。然而,受模式纯度的影响,涡旋光 OAM 谱展宽,一次频谱中出现多个峰值,如图 5(a) 所示,相邻峰值的频率间隔约为 30 Hz,这与第 2 节中分析的结果一致。

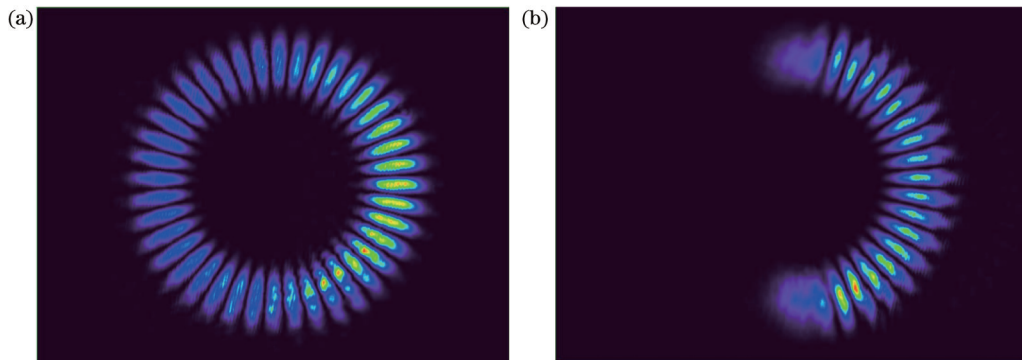


图 4 CCD 采集的光强分布 ( $l = \pm 20$ )。(a) 模式不纯的完整涡旋光实际光强分布;(b) 非完整涡旋光的实际光强分布

Fig. 4 Light intensity distributions collected by CCD ( $l = \pm 20$ ). (a) Intensity distribution of holonomic vortex beam with impure mode; (b) intensity distribution of nonholonomic vortex beam

从图 5(a)可以看出,各个峰值所对应的频率满足 2.2 中所述的一次频谱的特征,频率间隔与物体转速基本一致。对一次频谱取对数后再次进行傅里叶变换,得到的二次频谱如图 5(b)所示,二次频谱中在  $f' = 0.033$  Hz 处出现单一峰值,取峰值频率的倒数,得到转速为 30.30 r/s,这与电机设定转速一致,测量相对误差为 1%。与传统的一次傅里叶变换信号提取方法相比,

经过双重傅里叶变换后的信号在频谱中存在明显的单一峰值,易于辨识且信噪比较高。改变旋转物体的频率分别为 40 Hz 和 50 Hz,得到的一次频谱和二次频谱如图 5(c)~(f)所示,所得测量转速分别为 40.82 Hz 和 50.50 Hz,相应的测量误差分别为 2.05% 和 1%,可以看出:在涡旋光模式不纯的情况下,采用双重傅里叶变换处理后的测量结果具有较高的准确率。

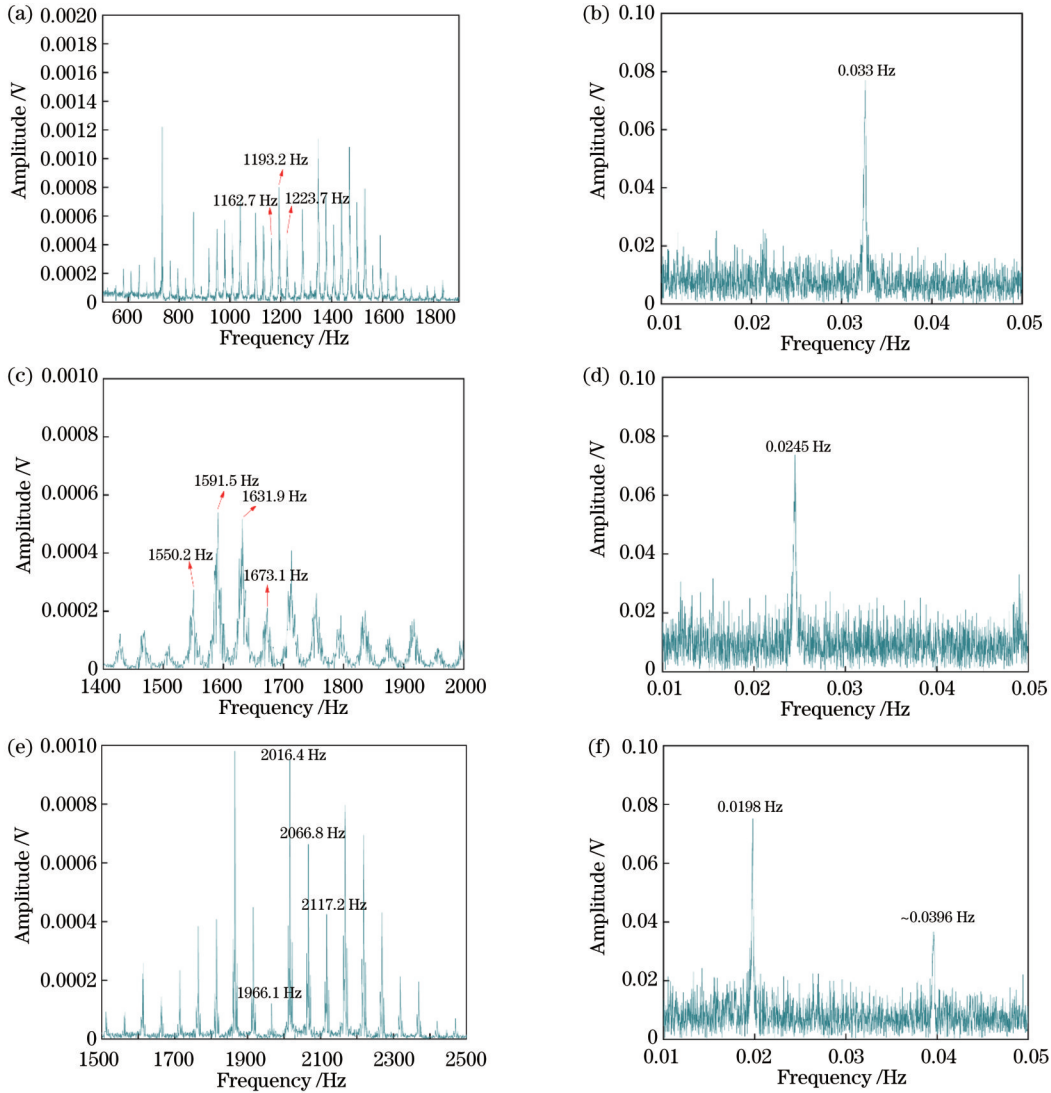


图 5 涡旋光模式不纯时信号经双重傅里叶分析的结果。(a)  $\omega=30$  Hz、(c)  $\omega=40$  Hz、(e)  $\omega=50$  Hz 时的一次频谱;  
(b)  $\omega=30$  Hz、(d)  $\omega=40$  Hz、(f)  $\omega=50$  Hz 时的二次频谱

Fig. 5 Results of dual Fourier analysis of signal by using impure optical vortex. Primary frequency spectra at (a)  $\omega=30$  Hz, (c)  $\omega=40$  Hz, and (e)  $\omega=50$  Hz; secondary frequency spectra at (b)  $\omega=30$  Hz, (d)  $\omega=40$  Hz, and (f)  $\omega=50$  Hz

图 5(f)中除在 0.0198 Hz 处出现最高能量的峰值之外,在约 0.0396 Hz 处也出现一个能量较小的峰值,这是因为:根据傅里叶变换的原理,一个非正弦周期信号可以用一系列频率与之成整数倍的正弦波来表示,这些不同频率的正弦波称作该信号的谐波分量,其中与原信号频率相同的正弦波称为基波或一次谐波,频率为原信号频率的 2 倍及以上的正弦波称为高次谐波,谐波的能量随谐波次数的增加而减小,0.0396 Hz

为 0.0198 Hz 的 2 倍,且 0.0396 Hz 处的能量比 0.0198 Hz 处的能量小,可以判断该峰值对应的正是原信号(一次频谱)的二次谐波分量,在频谱中出现高次谐波分量是由于傅里叶变换是采用正弦波作为基底对信号进行分解而造成的。

横向移动旋转物体的转轴,使得光束传播轴与物体转轴不重合,根据之前的测量工作,在涡旋光传播轴与目标转轴不重合的条件下,旋转多普勒频移将会发

生展宽,但频谱展宽间隔始终与目标转速相一致。设置物体的转速分别为 30 Hz、40 Hz 和 50 Hz,对光电探测器采集的信号进行处理,得到的一次频谱与二次频谱如图 6 所示,所得测量转速分别为 30.30 Hz、40.49 Hz 和 50.50 Hz,测量转速与电机设定的转速基

本一致,测量相对误差分别为 1%、1.2% 和 1%。可以看出,在涡旋光光轴与物体转轴不重合时,采用双重傅里叶分析方法能够得到一个准确度较高的测量结果,且信噪比较高,信号相对一次频谱更易于辨识。

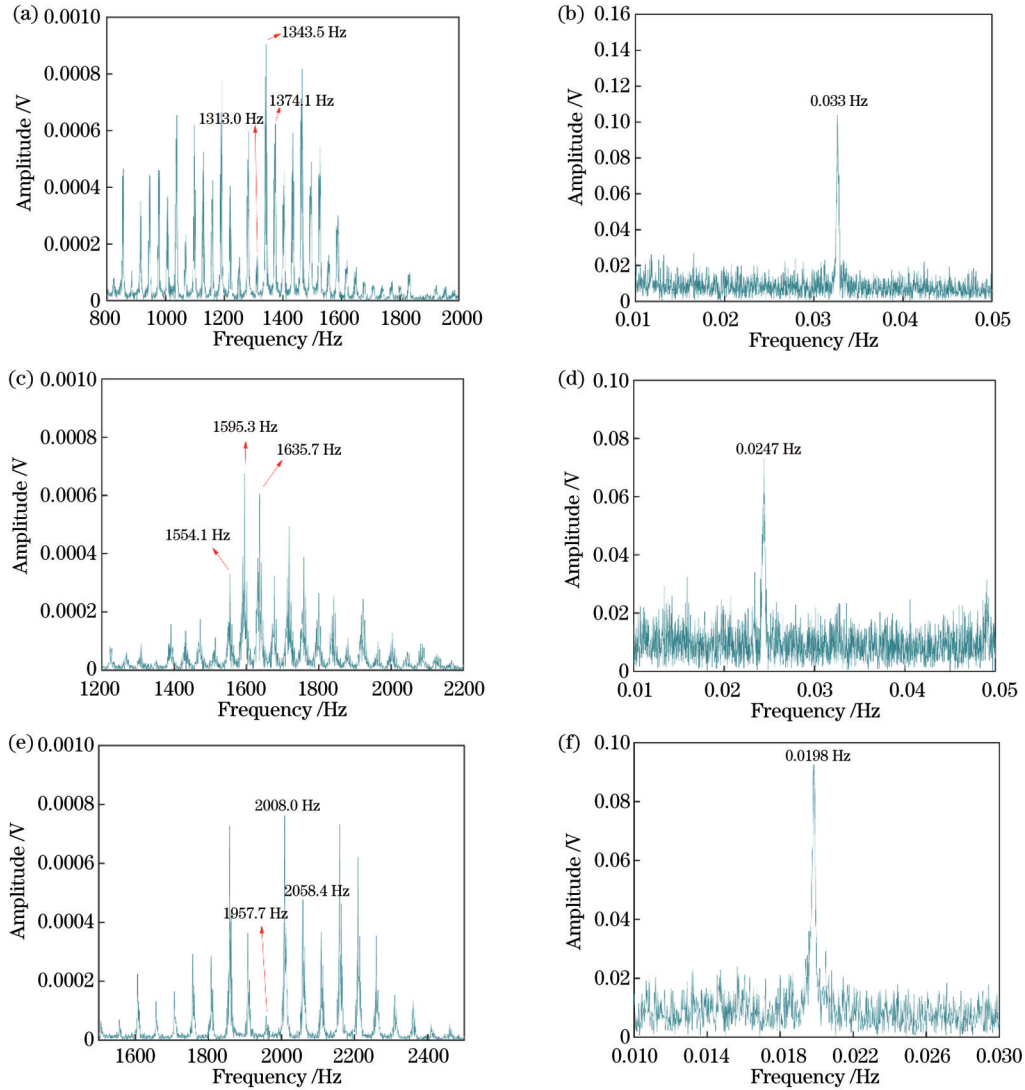


图 6 光轴相对转轴发生横向位移时的信号经双重傅里叶分析的结果。(a)  $\omega=30$  Hz、(c)  $\omega=40$  Hz、(e)  $\omega=50$  Hz 时的一次频谱; (b)  $\omega=30$  Hz、(d)  $\omega=40$  Hz、(f)  $\omega=50$  Hz 时的二次频谱

Fig. 6 Results of dual Fourier analysis of signal by using vortex beam with lateral displacement. Primary frequency spectra at (a)  $\omega=30$  Hz, (c)  $\omega=40$  Hz, and (e)  $\omega=50$  Hz; secondary frequency spectra at (b)  $\omega=30$  Hz, (d)  $\omega=40$  Hz, and (f)  $\omega=50$  Hz

在空间光调制器上加载遮挡了一半的拓扑荷数为  $l=\pm 20$  的非完整叠加态涡旋光,CCD 采集到的光强信息如图 4(b) 所示,设置物体的转速分别为 30 Hz、40 Hz 和 50 Hz,对光电探测器采集的信号进行处理,得到的一次频谱与二次频谱如图 7 所示,所得测量转速分别为 30.30 Hz、40.30 Hz 和 50.10 Hz,测量相对误差分别为 1%、0.75% 和 0.2%。可以看出,在涡旋光被遮挡了一半时,采用双重傅里叶分析方法能够得到较高的信噪比测量出物体转速,且准确度较高。

通过上述实验结果可以看出,仅经过单次傅里叶

变换后得到的一次频谱在理论频移附近具有多个峰值,并且有些时候,理论频移不一定出现在峰值频率处,因此在实际测量应用中,若直接通过单一峰值来确定频移并计算物体转速,有可能会产生较大误差,且人为因素会干扰测量结果。而经过双重傅里叶分析得到的二次频谱具有与转速相关的单一峰值,可以从中更方便、清晰地提取目标转速,并且测量误差能够保持在较低的水平,说明双重傅里叶分析方法实现了旋转变化的优化测量。

进行了两次傅里叶变换:第一次傅里叶变换时,频



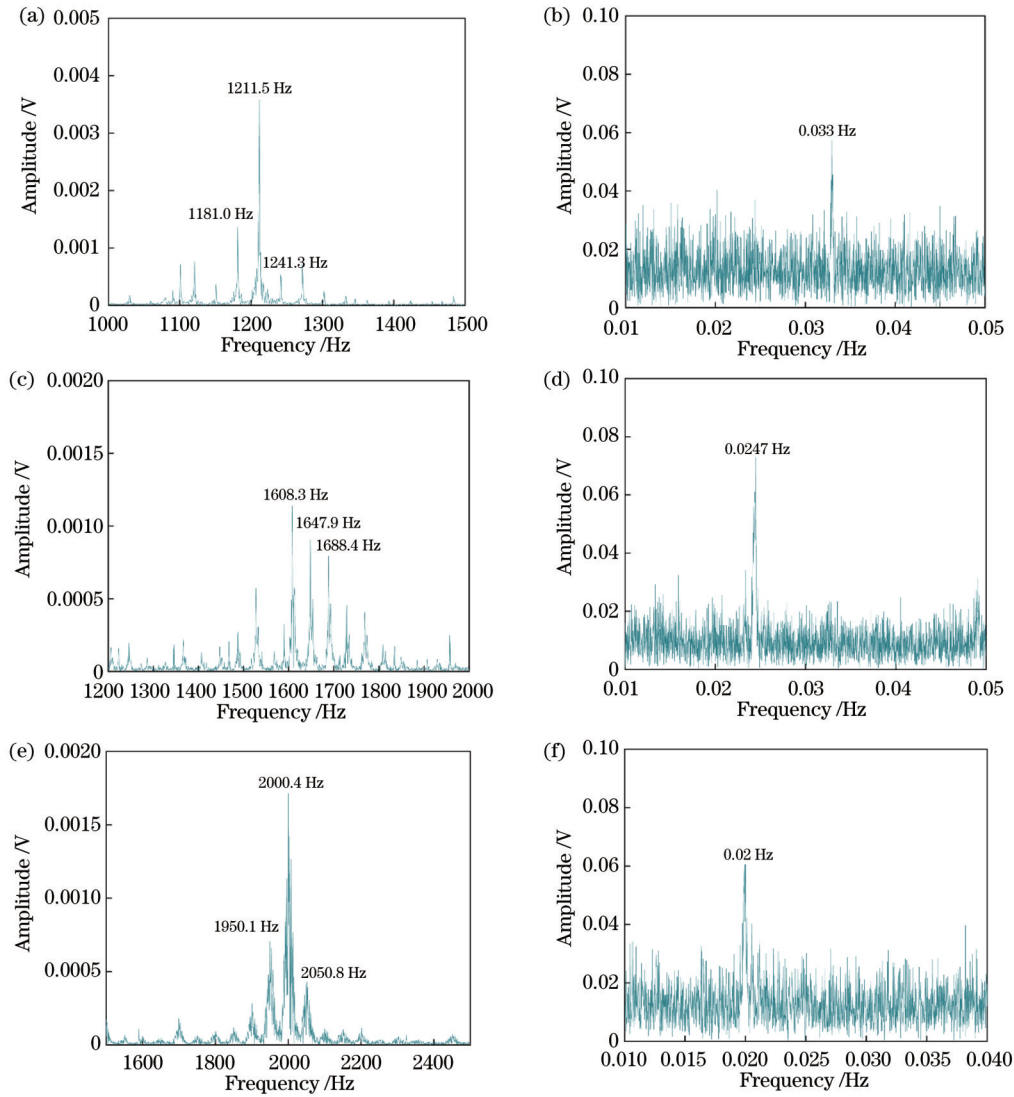


图 7 涡旋光被遮挡一半时的信号经双重傅里叶分析的结果。(a)  $\omega=30$  Hz、(c)  $\omega=40$  Hz、(e)  $\omega=50$  Hz时的一次频谱；  
(b)  $\omega=30$  Hz、(d)  $\omega=40$  Hz、(f)  $\omega=50$  Hz时的二次频谱

Fig. 7 Results of dual Fourier analysis of signal by using vortex beam with half of it missing. Primary frequency spectra at (a)  $\omega=30$  Hz, (c)  $\omega=40$  Hz, and (e)  $\omega=50$  Hz; secondary frequency spectra at (b)  $\omega=30$  Hz, (d)  $\omega=40$  Hz, and (f)  $\omega=50$  Hz

率分辨率受采样时长的影响, 设示波器对光电探测器输出信号的采样频率为  $f_s$ , 采样点数为  $N$ , 则一次频谱的频率分辨率为  $f_s/N$ ; 第二次傅里叶变换时, 一次频谱的频率分辨率成为了采样周期, 则采样频率为  $N/f_s$ 。由于一次频谱具有周期性, 一次频谱中有  $N/2$  个点是冗余的, 二次傅里叶变换时信号的采样点数为  $N/2$ , 故二次频谱的频率分辨率为  $2/f_s$ , 示波器采样率决定了二次频谱的频率分辨率。一次频谱决定了可测量的物体转速最大值, 根据奈奎斯特采样定理, 测得的最大光强调制频率为  $f_{\max}=f_s/2$ , 对应的最大转速为  $\Omega_{\max}=\pi f_s/2l$ , 同理, 二次频谱决定了可测量的转速的最小值, 为  $\Omega_{\min}=4\pi f_s/N$ , 所以, 双重傅里叶分析方法所能测量的转速范围为  $4\pi f_s/N \leq \Omega \leq \pi f_s/2l$ , 这个范围受采样频率、采样点数和拓扑荷数的影响。

## 4 结 论

基于涡旋光的模式分解原理, 从理论上分析了旋转多普勒频谱展宽的成因及其分布特征, 基于旋转多普勒频谱的离散等间隔展宽特征, 创新性地提出了一种双重傅里叶信号处理方法, 将展宽的频谱变为具有单一峰值的频谱, 提高了信噪比, 从而能够更加方便、清晰地提取目标转速。设计了旋转多普勒效应实验, 在涡旋光模式不纯、光束不对准以及光束不完整的情况下对旋转物体进行了测量, 并利用双重傅里叶分析方法进行数据处理。结果表明, 双重傅里叶分析方法能够有效地应对这三种使得频谱发生展宽的情况, 测量结果可以保持在较小的误差范围内, 该研究对于复杂光场和复杂入射条件下利用旋转多普勒效应测量物体转速提供了一个有效的方法。

## 参 考 文 献

- [1] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J C, et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes[J]. *Physical Review A*, 1992, 45(11): 8185-8189.
- [2] 丁友, 丁源圣, 邱松, 等. 涡旋光任意入射条件下的旋转物体转速探测(特邀)[J]. *红外与激光工程*, 2021, 50(9): 20210451. Ding Y, Ding Y S, Qiu S, et al. Rotational frequency detection of spinning objects at general incidence using vortex beam (Invited) [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2021, 50(9): 20210451.
- [3] Lavery M P J, Speirits F C, Barnett S M, et al. Detection of a spinning object using light's orbital angular momentum[J]. *Science*, 2013, 341(6145): 537-540.
- [4] Fu S Y, Wang T L, Zhang Z Y, et al. Non-diffractive Bessel-Gauss beams for the detection of rotating object free of obstructions[J]. *Optics Express*, 2017, 25(17): 20098-20108.
- [5] Zhai Y W, Fu S Y, Yin C, et al. Detection of angular acceleration based on optical rotational Doppler effect[J]. *Optics Express*, 2019, 27(11): 15518-15527.
- [6] Zhai Y W, Fu S Y, Zhang J Q, et al. Remote detection of a rotator based on rotational Doppler effect[J]. *Applied Physics Express*, 2020, 13(2): 022012.
- [7] Padgett M J, Allen L. The Poynting vector in Laguerre-Gaussian laser modes[J]. *Optics Communications*, 1995, 121(1/2/3): 36-40.
- [8] Leach J, Keen S, Padgett M J, et al. Direct measurement of the skew angle of the Poynting vector in a helically phased beam[J]. *Optics Express*, 2006, 14(25): 11919-11924.
- [9] Qiu S, Ren Y, Liu T, et al. Directly observing the skew angle of a Poynting vector in an OAM carrying beam via angular diffraction[J]. *Optics Letters*, 2021, 46(14): 3484-3487.
- [10] Belmonte A, Torres J P. Optical Doppler shift with structured light[J]. *Optics Letters*, 2011, 36(22): 4437-4439.
- [11] Fischer A. Model-based review of Doppler global velocimetry techniques with laser frequency modulation[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2017, 93: 19-35.
- [12] 马圣杰, 郝士琦, 赵青松. 基于改进型 SPGD 算法的涡旋光波前畸变校正[J]. *光学学报*, 2021, 41(6): 0601001. Ma S J, Hao S Q, Zhao Q S. Wavefront distortion correction of vortex beam based on improved SPGD algorithm[J]. *Acta Optica Sinica*, 2021, 41(6): 0601001.
- [13] Qiu S, Liu T, Li Z M, et al. Influence of lateral misalignment on the optical rotational Doppler effect[J]. *Applied Optics*, 2019, 58(10): 2650-2655.
- [14] Qiu S, Liu T, Ren Y, et al. Detection of spinning objects at oblique light incidence using the optical rotational Doppler effect [J]. *Optics Express*, 2019, 27(17): 24781-24792.
- [15] Ding Y, Ren Y, Liu T, et al. Analysis of misaligned optical rotational Doppler effect by modal decomposition[J]. *Optics Express*, 2021, 29(10): 15288-15299.
- [16] Deng J H, Li K F, Liu W, et al. Cascaded rotational Doppler effect[J]. *Optics Letters*, 2019, 44(9): 2346-2349.
- [17] 沙启蒙, 王卫杰, 刘通, 等. 涡旋光平衡探测系统转速测量精度与信噪比分析(特邀)[J]. *红外与激光工程*, 2021, 50(9): 20210616. Sha Q M, Wang W J, Liu T, et al. Analysis of rotational velocity measurement accuracy and signal-to-noise ratio of balanced detection based on vortex beam (Invited) [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2021, 50(9): 20210616.
- [18] Torner L, Torres J P, Carrasco S. Digital spiral imaging[J]. *Optics Express*, 2005, 13(3): 873-881.
- [19] 赵冬娥, 王思育, 马亚云, 等. 基于涡旋光与球面波干涉的相位测量研究[J]. *红外与激光工程*, 2020, 49(4): 0413005. Zhao D E, Wang S Y, Ma Y Y, et al. Measurement of micro-displacement based on the interference of vortex beams and spherical wave[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2020, 49(4): 0413005.
- [20] Ding Y, Liu T, Liu Z L, et al. Detection of a spinning object with circular procession using an optical vortex beam[J]. *Optics Letters*, 2022, 47(10): 2398-2401.
- [21] Ren Y, Qiu S, Liu T, et al. Compound motion detection based on OAM interferometry[J]. *Nanophotonics*, 2022, 11(6): 1127-1135.

## Optimized Measurement of Optical Rotational Doppler Shift Using Dual Fourier Analysis

Tang Ruoyu<sup>1</sup>, Qiu Song<sup>1</sup>, Liu Tong<sup>1</sup>, Li Xiuqian<sup>2</sup>, Liu Zhengliang<sup>1</sup>, Ren Yuan<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Aerospace Science and Technology, Space Engineering University, Beijing 101416, China;

<sup>2</sup>Office of Academic Affairs, Space Engineering University, Beijing 101416, China;

<sup>3</sup>Department of Basic Course, Space Engineering University, Beijing 101416, China

### Abstract

**Objective** The optical vortex is a spatially structured optical beam, the photon of which carries orbital angular momentum (OAM). When this beam illuminates the surface of a rotating object, the frequency of scattered light shifts. This phenomenon is called the optical rotational Doppler effect (RDE). The value of the frequency shift of the scattered light is related to the topological charge of the optical vortex and the rotational speed of the object. In engineering applications, the quality of the optical vortex is not ideal. For example, the mode of the optical vortex is usually not pure due to atmospheric turbulence. Additionally, the optical axis and the rotation axis do not always coincide with each other, and the optical beam may be partially cut out. All the circumstances above will make the scattered light from a rotating object have more than one frequency shift value, which causes many peaks in the frequency spectrum of the scattered light. In that case, it is difficult to distinguish the frequency peak related to the topological charge and the rotational speed, and



thus, the amount of measurement errors increases. An optimized signal processing method is urgently required. To raise the measurement accuracy of the rotational speed, we analyze the characteristic of the broadened frequency spectrum on the basis of OAM decomposition and present dual Fourier analysis to transform the broadened frequency spectrum into a spectrum with a single peak related to the rotational speed.

**Methods** The broadened frequency spectrum of the scattered light is essentially related to the OAM-mode broadening. A standard Laguerre-Gaussian (LG) mode is a solution to the paraxial wave equation in the cylindrical coordinate system and carries a single OAM. All of the standard LG modes make up a complete set of orthogonal vectors, and any optical beam can be represented as a superposition of standard LG modes. When the mode of the optical vortex is not pure, a lateral displacement exists, or the beam is not intact, and the LG modes that constitute the illuminating beam are not single, which leads to more than one rotational Doppler shift value. Due to the quantization of the OAM, the interval between topological charges of the LG modes that constitute the illuminating beam is one (Fig. 2) when near the original topological charge of the illuminating optical vortex. Hence, the interval between the rotational Doppler shift values is the rotational frequency of the rotating object. When the rotational speed is fixed, the frequency interval between the peaks in the frequency spectrum of scattered light is the same. Therefore, we consider the frequency spectrum as a periodic function of frequency, whose period is the rotational frequency. By performing Fourier transform again to the frequency spectrum, we can obtain the secondary frequency spectrum with a single peak whose frequency value is the reciprocal value of the rotational frequency. For easy distinction, the original frequency spectrum is called the primary frequency spectrum. As we perform Fourier transform twice on the scattered light signal, we call this method dual Fourier analysis.

**Results and Discussions** We design an experiment of RDE using an LG vortex with an impure mode or a lateral displacement and a half-covered LG vortex (Fig. 3). After the Fourier transform on the signal received by the photodetector (PD), we can obtain the primary frequency spectrum (Fig. 6). The frequency values of the peaks in the primary frequency spectrum have an interval of the given rotational frequency (Fig. 6). As the intensity of LG modes constituting the beam is different, the amplitude of these peaks varies. Thus, we consider that the primary spectrum is a periodic function modified by an amplitude modulation function. Then, we take a logarithm of the primary spectrum function and perform Fourier transform again to obtain the secondary spectrum with a single peak whose frequency value is the reciprocal value of the rotational frequency (Fig. 6). In situations of the impure LG mode, beam misalignment, and incomplete beam, we can acquire the same result using this method, and the rotational speed can be always measured from the secondary frequency spectrum. By this means, we separate the rotational speed from the broadened primary frequency spectrum, and the rotational speed measured from the secondary frequency spectrum is relatively accurate.

**Conclusions** By analyzing the characteristic of the broadened frequency spectrum based on the mechanism of the OAM decomposition, we present a method called dual Fourier analysis to transform the broadened frequency spectrum into a spectrum with a single peak. Accurate rotational speed can be measured from the second frequency spectrum. This method simplifies the demand of beam quality and incidence conditions, and hence, it can obtain the rotational speed of the object in a more convenient and clearer manner. The method also promotes the application of RDE in practical projects.

**Key words** physical optics; dual Fourier analysis; vortex beam; rotational Doppler effect; orbital angular momentum; rotational speed detection