

## 参数化形函数的亚像素匹配方法

徐从裕<sup>1,2\*</sup>, 王标<sup>1\*\*</sup><sup>1</sup>合肥工业大学仪器科学与光电工程学院, 安徽 合肥 230009;<sup>2</sup>合肥工业大学含山产业研究院, 安徽 合肥 230009

**摘要** 数字图像相关法的亚像素匹配误差与散斑图像和形函数有关,对于无迭代运算的梯度法和曲线拟合法等,形函数很难适应不同散斑图像的亚像素分布规律,为使形函数能够匹配不同的散斑图像,提出了一种基于参数化形函数的亚像素匹配方法。研究了参数化形函数中的指数变量和背景变量等参数对亚像素匹配误差的调节规律。研究表明,对于不同散斑图像,均可以通过对形函数参数的标定得到与散斑图像匹配的最优形函数。以散斑直径为 2~20 pixel 的高斯散斑图像为例,分别在  $x$  方向生成位移为 0.1~0.9 pixel 的 10 幅图像,对所提匹配方法进行了验证。验证结果表明,标定后的形函数能使不同散斑图像的亚像素匹配误差减小到 0.001 pixel 以内。最后,对 DIC Challenge 提供的实际位移散斑图像进行了验证,同样也证明了所提匹配方法的有效性。

**关键词** 测量; 散斑; 参数化形函数; 亚像素匹配; 标定

**中图分类号** TH822 **文献标志码** A

**DOI:** 10.3788/AOS221732

## 1 引言

数字图像相关法中无迭代运算的梯度法和曲线拟合法<sup>[1-2]</sup>等的亚像素匹配误差与散斑图像和形函数有关,由于无迭代运算的形函数很难适应不同散斑图像的亚像素分布规律,故虽然计算时间短,但是亚像素匹配误差较大。为减小亚像素匹配误差,人们研究了散斑质量对亚像素匹配误差的影响,提出了不同的散斑质量评价指标<sup>[3-6]</sup>。对于有迭代运算的 Newton-Raphson 法<sup>[1-2,7-8]</sup>等,通过目标图像对原图像或原图像对目标图像的无限逼近能大幅减小亚像素匹配误差,但计算时间较长。目前,对于无迭代运算和有迭代运算的亚像素匹配算法的研究,基本上是在现有算法基础上进行的一些改进研究<sup>[9-13]</sup>和应用研究<sup>[14-15]</sup>。

为解决亚像素匹配时间与亚像素匹配误差之间的矛盾,在已有的亚像素匹配算法<sup>[16-17]</sup>研究的基础上,本文提出了一种基于参数化形函数的亚像素匹配方法,即在形函数中增加指数变量和背景变量等参数,通过对上述变量参数的标定,得到与散斑图像匹配的最优形函数,使之能适应不同散斑图像的亚像素分布规律,既保留了无迭代运算的匹配时间短的特点,又能大幅减小亚像素的匹配误差。

## 2 参数化形函数

图 1 中的  $C(i, j)$  为数字图像相关法中的整像素搜索算法[如零均值归一化互相关(ZNCC)函数]获取的  $3 \times 3$  相关系数值,其中  $i = -1, 0, 1$  和  $j = -1, 0, 1$ 。 $P(\Delta x, \Delta y)$  为亚像素匹配点,其中  $\Delta x$  和  $\Delta y$  为  $x$  方向和  $y$  方向的亚像素匹配值,此处  $|\Delta x| \leq 0.5$  且  $|\Delta y| \leq 0.5$ 。

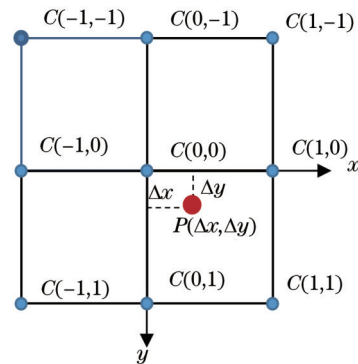


图 1 亚像素匹配的  $3 \times 3$  相关系数

Fig. 1  $3 \times 3$  correlation coefficient of sub-pixel matching

所提的基于参数化形函数的亚像素匹配方法先将图 1 中的  $3 \times 3$  相关系数  $C(i, j)$  分解为  $x$  方向的  $3 \times 1$

收稿日期: 2022-09-22; 修回日期: 2022-10-15; 录用日期: 2022-10-21; 网络首发日期: 2022-11-04

基金项目: 国家自然科学基金(51305120)、含山县-合肥工业大学产业引导资金项目(JZ2019YDZJ0445)

通信作者: \*xucongyu@hfut.edu.cn; \*\*wangbiao@hfut.edu.cn

相关系数  $A(i)$  和  $y$  方向的  $1 \times 3$  相关系数  $B(j)$ , 其中  $i = -1, 0, 1$  和  $j = -1, 0, 1$ 。若以图 1 中的亚像素匹配点  $P(\Delta x, \Delta y)$  所在位置为分解坐标, 根据  $P(\Delta x, \Delta y)$

与  $C(i, j)$  之间的三角几何关系进行分解, 则  $x$  方向的相关系数  $A(i)$  的表达式和  $y$  方向的相关系数  $B(j)$  的表达式为

$$A(-1) = (1 - |\Delta y|) \times \frac{(1 + \Delta x) \times C(-1, 0)}{\sqrt{(1 + \Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + |\Delta y| \times \frac{(1 + \Delta x) \times C[-1, \text{sign}(\Delta y)]}{\sqrt{(1 + \Delta x)^2 + (1 - |\Delta y|)^2}}, \quad (1)$$

$$A(0) = (1 - |\Delta y|) \times \frac{(|\Delta x| + \tau) \times C(0, 0)}{\sqrt{(|\Delta x| + \tau)^2 + (\Delta y)^2}} + |\Delta y| \times \frac{|\Delta x| \times C[0, \text{sign}(\Delta y)]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (1 - |\Delta y|)^2}}, \quad (2)$$

$$A(1) = (1 - |\Delta y|) \times \frac{(1 - \Delta x) \times C(1, 0)}{\sqrt{(1 - \Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + |\Delta y| \times \frac{(1 - \Delta x) \times C[1, \text{sign}(\Delta y)]}{\sqrt{(1 - \Delta x)^2 + (1 - |\Delta y|)^2}}, \quad (3)$$

$$B(-1) = (1 - |\Delta x|) \times \frac{(1 + \Delta y) \times C(0, -1)}{\sqrt{(1 + \Delta y)^2 + (\Delta x)^2}} + |\Delta x| \times \frac{(1 + \Delta y) \times C[\text{sign}(\Delta x), -1]}{\sqrt{(1 + \Delta y)^2 + (1 - |\Delta x|)^2}}, \quad (4)$$

$$B(0) = (1 - |\Delta x|) \times \frac{(|\Delta y| + \tau) \times C(0, 0)}{\sqrt{(|\Delta y| + \tau)^2 + (\Delta x)^2}} + |\Delta x| \times \frac{|\Delta y| \times C[\text{sign}(\Delta x), 0]}{\sqrt{(\Delta y)^2 + (1 - |\Delta x|)^2}}, \quad (5)$$

$$B(1) = (1 - |\Delta x|) \times \frac{(1 - \Delta y) \times C(0, 1)}{\sqrt{(1 - \Delta y)^2 + (\Delta x)^2}} + |\Delta x| \times \frac{(1 - \Delta y) \times C[\text{sign}(\Delta x), 1]}{\sqrt{(1 - \Delta y)^2 + (1 - |\Delta x|)^2}}, \quad (6)$$

式中:  $\text{sign}(u)$  为符号函数, 当  $u \geq 0$  时,  $\text{sign}(u) = 1$ , 而当  $u < 0$  时,  $\text{sign}(u) = -1$ ;  $\tau$  为一个极小的数值, 设置  $\tau$  的目的是避免分母为零的计算错误出现, 一般设置为  $\tau \leq 0.00001$ 。在计算时, 式(1)~(6)中的  $\Delta x$  和  $\Delta y$  只保留小数点后的 4 位有效数据, 即 0 至  $\pm 0.5000$ 。图 2 为  $x$  方向和  $y$  方向分解后的相关系数  $A(i)$  和  $B(j)$  与亚像素匹配点  $P(\Delta x, \Delta y)$  的关系图。

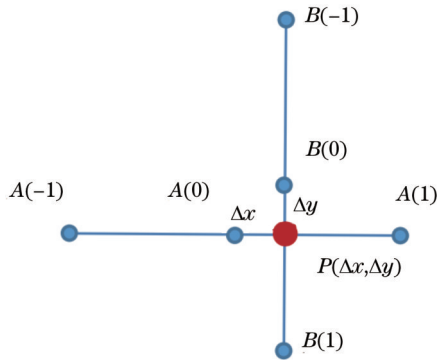


图 2  $x$  方向和  $y$  方向分解后的相关系数  $A(i)$  和  $B(j)$

Fig. 2 Correlation coefficients  $A(i)$  and  $B(j)$  after decomposition in  $x$  and  $y$  directions

令  $A_{\min} = \min[A(-1), A(0), A(1)]$  和  $B_{\min} = \min[B(-1), B(0), B(1)]$ , 则有

$$A_{\beta}(i) = A(i) - A_{\min} \times \beta, \quad (7)$$

$$B_{\beta}(j) = B(j) - B_{\min} \times \beta, \quad (8)$$

式中:  $\beta$  是背景变量。

对式(7)和式(8)进行变换, 分别加上指数变量  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$ , 得到

$$A_{\alpha_1 \beta}(i) = A_{\beta}^{\alpha_1}(i), \quad (9)$$

$$B_{\alpha_2 \beta}(j) = B_{\beta}^{\alpha_2}(j). \quad (10)$$

参数化形函数的表达式为

$$\Delta x_{\alpha_1 \beta} = \frac{A_{\alpha_1 \beta}(1) - A_{\alpha_1 \beta}(-1)}{\sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 |A_{\alpha_1 \beta}(i) - A_{\alpha_1 \beta}(j)|}, \quad i < j, \quad (11)$$

$$\Delta y_{\alpha_2 \beta} = \frac{B_{\alpha_2 \beta}(1) - B_{\alpha_2 \beta}(-1)}{\sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 |B_{\alpha_2 \beta}(i) - B_{\alpha_2 \beta}(j)|}, \quad i < j, \quad (12)$$

此处设置  $\beta \leq 1, \alpha_1 > 0$  和  $\alpha_2 > 0$ , 以避免式(7)和式(8)出现负值, 以及式(9)和式(10)出现异常值。

由于式(1)~(6)中的  $\Delta x$  和  $\Delta y$  是未解值, 需要将式(11)和式(12)的结果值代入式(1)~(6)中用于替换  $\Delta x$  和  $\Delta y$ , 再按式(7)~(12)求解亚像素匹配值, 直至两者相同为止, 一般需要进行 2~6 次循环。循环初值设定为  $\Delta x = 0$  和  $\Delta y = 0$ 。

对于  $x$  方向或  $y$  方向的位移测量, 上述的指数变量  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  可以设置为相同的, 进而可以统一为指数变量  $\alpha$ 。在下面的论述中, 所述的形函数参数指的就是指数变量  $\alpha$  和背景变量  $\beta$ 。

### 3 亚像素匹配误差调节规律

本文选用计算机散斑生成程序(如光绘软件<sup>[18]</sup>)生成高宽尺寸为 200 pixel×200 pixel、散斑直径为 2~20 pixel、 $x$  方向位移步距为 0.1~0.9 pixel 的高斯散斑

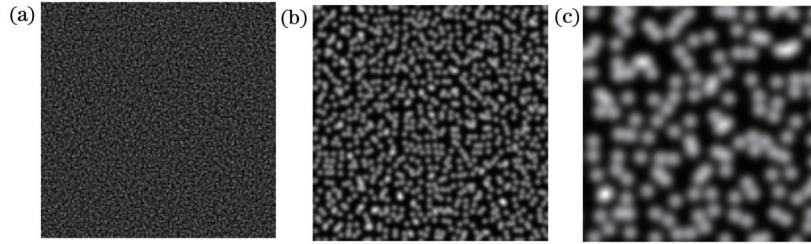


图 3 软件生成的高斯散斑图像。(a)散斑直径为 2 pixel;(b)散斑直径为 10 pixel;(c)散斑直径为 20 pixel

Fig. 3 Gaussian speckle images generated by software. (a) Speckle diameter of 2 pixel; (b) speckle diameter of 10 pixel; (c) speckle diameter of 20 pixel

#### 3.1 亚像素匹配误差

在实际应用中,散斑图像之间的位移是未知的,为客观评价亚像素匹配误差,采用绝对位移与相对位移之和的差值作为亚像素匹配误差  $\delta$ 。设散斑图像位移前的图像为  $F_0$ ,位移后的图像分别为  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_N$ ,位移为  $X_{j,i} = f(F_j, F_i)$ ,即  $F_i$  到  $F_j$  的位移,包括整像素位移和亚像素位移,则亚像素匹配误差  $\delta$  的定义为

$$\delta_k = X_{k,0} - \sum_{i=1}^k X_{i,i-1}, \quad (13)$$

式中: $k=1, 2, 3, \dots, N$ ,其中  $N$  为图像个数。

式(13)定义的亚像素匹配误差由线性误差和 S 型误差两部分组成。在以下的分析中,所述的形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  的调节规律,指的是式(13)定义的亚像素匹配误差的调节规律。

#### 3.2 形函数参数 $\alpha$ 的调节规律

图 4 为散斑直径为 10 pixel 情况下形函数参数  $\alpha$  对亚像素匹配误差的调节规律图,此时  $\beta = -0.08$ 。可以看出,形函数参数  $\alpha$  具有改变线性误差斜率的主调节作用,同时也具有改变 S 型误差方向的次调节作用。当形函数参数  $\alpha$  值由小到大进行调节时,如  $\alpha = 0.4869$  至  $\alpha = 0.5275$  时,亚像素线性误差的斜率由正斜率变化到负斜率, S 型误差的方向也由正 S 方向变化到反 S 方向。

#### 3.3 形函数参数 $\beta$ 的调节规律

图 5 为散斑直径为 10 pixel 情况下形函数参数  $\beta$  对亚像素匹配误差的调节规律图,此时  $\alpha = 0.5072$ 。可以看出,形函数参数  $\beta$  具有改变 S 型误差方向的主调节作用,同时也具有改变线性误差斜率的次调节作用。当形函数参数  $\beta$  值由负值到正值进行调节时,如  $\beta = -0.8$  至  $\beta = 0.8$  时,亚像素 S 型误差的方向由反 S 方向变化到正 S 方向,线性误差的斜率也由负斜率变化到正斜率。

图像,并以上述散斑图像作为研究对象,研究  $x$  方向的形函数参数在减小亚像素匹配误差作用中的调节规律。图 3 显示的是散斑直径分别为 2、10、20 pixel 的高斯散斑图像。

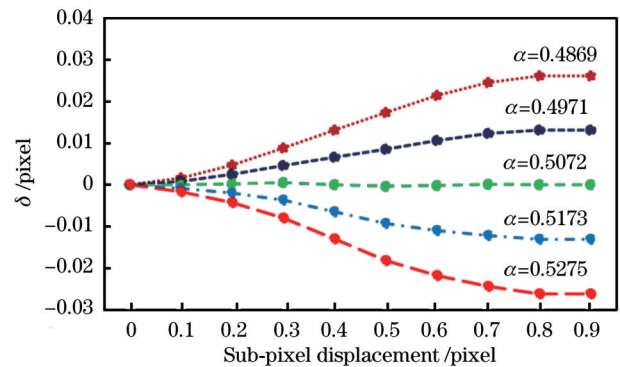


图 4 形函数参数  $\alpha$  对亚像素匹配误差的调节规律

Fig. 4 Regulation law of shape function parameter  $\alpha$  on sub-pixel matching error

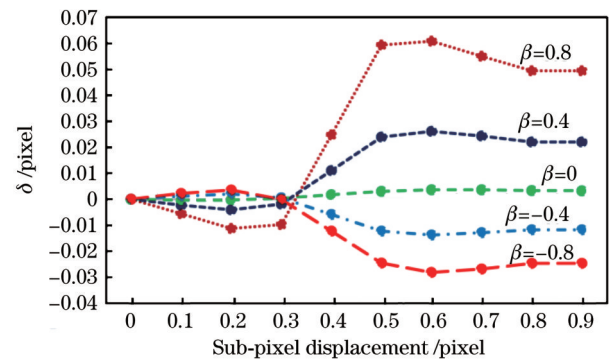


图 5 形函数参数  $\beta$  对亚像素匹配误差的调节规律

Fig. 5 Regulation law of shape function parameter  $\beta$  on sub-pixel matching error

## 4 形函数参数标定与实验分析

如第 3 章所述,形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  对亚像素匹配误差均有调节作用。对于任意散斑图像,总有一组形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  与散斑图像匹配,使得亚像素匹配误差趋于最小值。由此可见,在形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  的协同

调节下,亚像素匹配误差趋于最小值的过程就是形函数参数标定的过程。

### 4.1 形函数参数标定

图 6 所示为形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  的标定流程图。在

形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  的协同调节下,当亚像素匹配误差  $\delta$  小于给定值  $\epsilon$  (如  $\epsilon = 0.001$  pixel) 或前一次匹配误差  $\delta_1$  恒等于当前匹配误差  $\delta_2$  时,形函数参数标定结束。

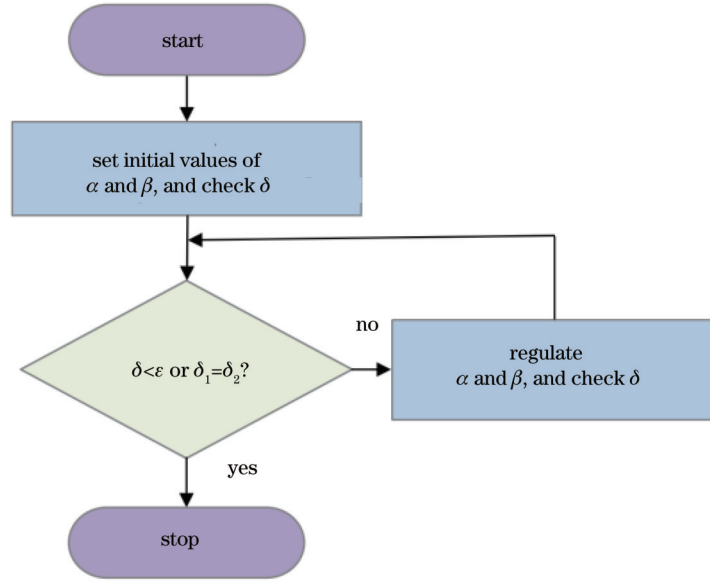


图 6 形函数参数标定流程

Fig. 6 Calibration process of shape function parameters

### 4.2 亚像素匹配误差验证

取散斑直径为 2、10、20 pixel,  $x$  方向位移步距为 0.1~0.9 pixel 的高斯散斑图像为验证对象,验证结果

如表 1~3 所示。其中,  $A$  为给定的位移,  $B$  为相邻散斑图像之间的位移和,  $C$  为第  $N$  幅散斑图像与原始散斑图像的位移。

表 1 当  $\alpha = 0.7212, \beta = -3.00$  时,散斑直径为 2 pixel 的验证结果  
Table 1 Verification results for speckle diameter of 2 pixel at  $\alpha = 0.7212$  and  $\beta = -3.00$

unit: pixel

$A$	$B$	$C$	$B-A$	$C-A$	$C-B$
0.1	0.1002	0.1002	0.0002	0.0002	0
0.2	0.2002	0.2005	0.0002	0.0005	0.0003
0.3	0.3000	0.3004	0	0.0004	0.0004
0.4	0.3999	0.3996	-0.0001	-0.0004	-0.0003
0.5	0.4996	0.4995	-0.0004	-0.0005	-0.0001
0.6	0.5995	0.5997	-0.0005	-0.0003	0.0002
0.7	0.6994	0.6991	-0.0006	-0.0009	-0.0003
0.8	0.7995	0.7993	-0.0005	-0.0007	-0.0002
0.9	0.8997	0.8998	-0.0003	-0.0002	0.0001

由表 1~3 可以看出,形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  标定后的亚像素匹配误差  $\delta = C - B$  小于 0.001 pixel,另外两种误差也随之小于 0.001 pixel。

### 4.3 亚像素匹配时间

当形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  标定后成为定值时,亚像素匹配时间取决于式(1)~(12)中 9 个相关系数的加减乘除和指数运算,以及不多于 6 次的循环计算量。由于参与计算的数据量极少,故亚像素匹配时间一般为毫秒量级或更短。

### 4.4 散斑直径对调节变量的影响分析

散斑直径对亚像素匹配误差是有影响的,可以通过形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  的标定获取与散斑图像匹配的最优形函数,从而使得亚像素匹配误差趋于最小化。表 4 为亚像素匹配误差最小化时的散斑直径与形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  取值之间的对应关系。图 7 和图 8 分别为不同散斑直径对形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  的影响曲线。

由表 4 可知,在散斑直径为 2~20 pixel 范围内,通过形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  的标定均能使散斑图像的亚像素匹配误差小于 0.001 pixel。

表 2 当  $\alpha = 0.5072, \beta = -0.08$  时, 散斑直径为 10 pixel 的验证结果

Table 2 Verification results for speckle diameter of 10 pixel at  $\alpha = 0.5072$  and  $\beta = -0.08$  unit: pixel

A	B	C	B-A	C-A	C-B
0.1	0.1000	0.1000	0	0	0
0.2	0.2001	0.2000	0.0001	0	-0.0001
0.3	0.3000	0.3003	0	0.0003	0.0003
0.4	0.4000	0.4005	0	0.0005	0.0005
0.5	0.4999	0.4999	-0.0001	-0.0001	0
0.6	0.6002	0.5998	0.0002	-0.0002	-0.0004
0.7	0.7001	0.7000	0.0001	0	-0.0001
0.8	0.8002	0.8002	0.0002	0.0002	0
0.9	0.9001	0.9002	0.0001	0.0002	0.0001

表 3 当  $\alpha = 0.4871, \beta = -0.08$  时, 散斑直径为 20 pixel 的验证结果

Table 3 Verification results for speckle diameter of 20 pixel at  $\alpha = 0.4871$  and  $\beta = -0.08$  unit: pixel

A	B	C	B-A	C-A	C-B
0.1	0.1002	0.1002	0.0002	0.0002	0
0.2	0.2000	0.1997	0	-0.0003	-0.0003
0.3	0.2999	0.2999	-0.0001	-0.0001	0
0.4	0.3999	0.4002	-0.0001	0.0002	0.0003
0.5	0.5002	0.5003	0.0002	0.0003	0.0001
0.6	0.5999	0.5996	-0.0001	-0.0004	-0.0003
0.7	0.6998	0.6999	-0.0002	-0.0001	0.0001
0.8	0.7998	0.8001	-0.0002	0.0001	0.0003
0.9	0.8995	0.8995	-0.0005	-0.0005	0

表 4 散斑直径对形函数参数的影响

Table 4 Influence of speckle diameter on shape function parameters

Diameter / pixel	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$\alpha$	0.7212	0.5882	0.5467	0.5285	0.5188	0.5114	0.5069	0.5039	0.5072	0.4914	0.4871
$\beta$	-3.00	-0.45	-0.25	-0.15	-0.10	-0.10	-0.10	-0.08	-0.08	-0.08	-0.08
$\delta$ / pixel	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001

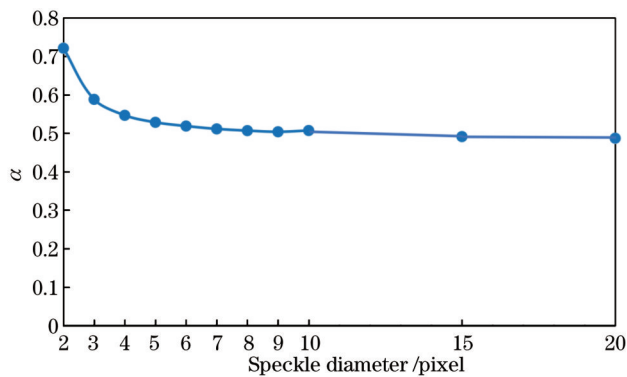


图 7 散斑尺寸对形函数参数  $\alpha$  的影响

Fig. 7 Influence of speckle diameter on shape function parameter  $\alpha$

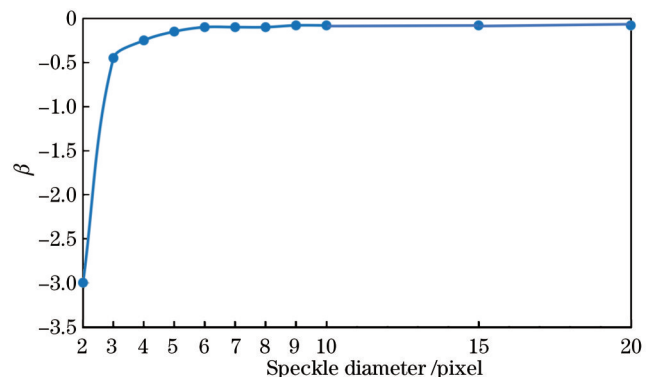


图 8 散斑直径对形函数参数  $\beta$  的影响

Fig. 8 Influence of speckle diameter on shape function parameter  $\beta$

由表 4、图 7 和图 8 还可以看出, 当散斑直径大于 6 pixel 时, 散斑直径对形函数参数  $\alpha$  和  $\beta$  的影响开始减弱, 影响曲线趋于平坦。

#### 4.5 实际位移散斑图像的验证

图 9 为 DIC Challenge 提供的实际位移散斑图像, 位移定位精度为  $\pm 0.00084$  pixel。验证用的整像素算

法为 ZNCC, 标定后的形函数参数为  $\alpha = 0.6152$  和  $\beta = -0.50$ , 验证数据如表 5 所示。在表 5 中, 第一列为给定的位移值,  $D_1$  为所提算法的计算结果值(只保留了小数点后 4 位),  $D_2$  为阿贝误差修正后的结果值,  $E_1$  为无阿贝误差修正的误差值,  $E_2$  为阿贝误差修正后的误差值, 最后一列为验证结果。

由于 DIC Challenge 提供的实际位移散斑图所用到的定位装置都会存在阿贝误差<sup>[19-20]</sup>, 故测量值大于

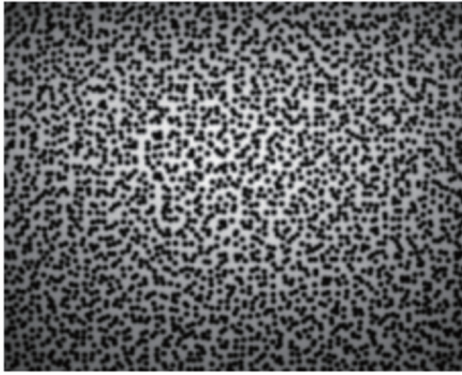


图 9 DIC Challenge 提供的实际位移散斑图像

Fig. 9 Actual displacement speckle image provided by DIC Challenge

表 5 当  $\alpha = 0.6152$ ,  $\beta = -0.50$  时, DIC Challenge 位移散斑图像验证数据

Table 5 Verification data of DIC Challenge displacement speckle image at  $\alpha = 0.6152$  and  $\beta = -0.50$  unit: pixel

Stage position	$D_1$	$D_2$	$E_1$	$E_2$	Verification
0.100187	0.1015	0.100181	0.001313	-0.000006	<0.001
0.200375	0.2022	0.199571	0.001825	-0.000804	<0.001
0.300568	0.3037	0.299752	0.003132	-0.000816	<0.001
0.400753	0.4059	0.400623	0.005147	-0.000130	<0.001
0.500938	0.5068	0.500212	0.005862	-0.000726	<0.001
0.601122	0.6084	0.600491	0.007278	-0.000631	<0.001
0.701314	0.7112	0.701954	0.009886	0.000640	<0.001
0.801506	0.8127	0.802135	0.011194	0.000629	<0.001
0.901692	0.9138	0.901921	0.012108	0.000229	<0.001
1.001879	1.0156	1.002397	0.013721	0.000518	<0.001

## 参 考 文 献

- [1] 李开平, 蔡萍. 数字图像相关方法的亚像素算法性能研究[J]. 仪器仪表学报, 2020, 41(8): 180-187.  
Li K P, Cai P. Study on the performance of sub-pixel algorithm for digital image correlation[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2020, 41(8): 180-187.
- [2] 周云, 程依婷. 基于数字图像相关理论的非接触式结构位移测量方法[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2021, 48(5): 1-9.  
Zhou Y, Cheng Y T. Non-contact structural displacement measurement based on digital image correlation method[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2021, 48(5): 1-9.
- [3] 冯益春, 沈子华, 朱媛媛. 数字图像相关法中散斑图的质量评价[J]. 计算机与数字工程, 2020, 48(7): 1743-1747.  
Feng Y C, Shen Z H, Zhu Y Y. Quality evaluation of speckle image in digital image correlation method[J]. Computer & Digital Engineering, 2020, 48(7): 1743-1747.
- [4] 洪亮. 数字散斑相关方法的匹配效果评价指标体系[J]. 计算机应用研究, 2015, 32(1): 262-264, 268.  
Hong L. Grayscale image DSCM matching algorithm evaluation system[J]. Application Research of Computers, 2015, 32(1): 262-264, 268.
- [5] 苏勇, 张青川, 伍小平. 数字图像相关技术的一些进展[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48(9): 0946041.  
Su Y, Zhang Q C, Wu X P. Progress in digital image correlation method[J]. Scientia Sinica: Physica, Mechanica & Astronomica, 2018, 48(9): 0946041.
- [6] 邵新星, 陈振宁, 戴云彤, 等. 数字图像相关方法若干关键问题研究进展[J]. 实验力学, 2017, 32(3): 305-325.  
Shao X X, Chen Z N, Dai Y T, et al. Research progress of several key problems in digital image correlation method[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2017, 32(3): 305-325.
- [7] 李相伯, 龚俊, 胡丹, 等. 基于相邻子区相关系数的散斑质量

- 评价方法[J]. 光子学报, 2021, 50(5): 0512001.
- Li X B, Gong J, Hu D, et al. Quality assessment method of speckle patterns based on correlation coefficient of adjacent subsets[J]. Acta Photonica Sinica, 2021, 50(5): 0512001.
- [8] 俞海, 刘云鹏, 郭荣鑫, 等. 数字图像相关法散斑图质量评价方法[J]. 激光技术, 2020, 44(2): 237-243.
- Yu H, Liu Y P, Guo R X, et al. Assessment method of speckle pattern quality in digital image correlation[J]. Laser Technology, 2020, 44(2): 237-243.
- [9] 蒋中宁, 罗远新, 王勇勤, 等. 数字图像相关位移场测量的误差补偿[J]. 重庆大学学报, 2020, 43(12): 59-67.
- Jiang Z N, Luo Y X, Wang Y Q, et al. Error compensation of digital-image-correlation displacement field measurement[J]. Journal of Chongqing University, 2020, 43(12): 59-67.
- [10] 王罗斌, 万强, 韦利明, 等. 带权重因子相关函数对数字图像算法性能的影响[J]. 成都大学学报(自然科学版), 2019, 38(4): 346-350.
- Wang L B, Wan Q, Wei L M, et al. Influence of correlation function with weight factor on digital image algorithm performance[J]. Journal of Chengdu University (Natural Science Edition), 2019, 38(4): 346-350.
- [11] 李凯强, 朱丹, 佟新鑫. 基于改进曲面拟合法的数字散斑相关方法研究[J]. 激光与光电子学进展, 2018, 55(5): 051001.
- Li K Q, Zhu D, Tong X X. Digital speckle correlation method based on improved curved surface fitting method[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2018, 55(5): 051001.
- [12] 谭芳喜, 肖世德, 李晟尧, 等. 基于密集特征匹配的数字图像相关法[J]. 激光与光电子学进展, 2021, 58(16): 1612001.
- Tan F X, Xiao S D, Li S Y, et al. Digital image correlation method based on dense feature matching[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(16): 1612001.
- [13] 郑成林, 何顶顶, 费庆国. 基于灰度梯度正则化去噪的改进数字图像相关法[J]. 光学学报, 2018, 38(8): 0812002.
- Zheng C L, He D D, Fei Q G. Improved digital image correlation method based on gray gradient denoised by regularization method[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(8): 0812002.
- [14] 潘济宇, 张水强, 苏志龙, 等. 基于数字图像相关的水下螺旋桨三维变形测量[J]. 光学学报, 2021, 41(12): 1212001.
- Pan J Y, Zhang S Q, Su Z L, et al. Measuring three-dimensional deformation of underwater propellers based on digital image correlation[J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(12): 1212001.
- [15] 李桂华, 马万龙, 朱天天, 等. 基于数字图像相关方法的空心圆盘热变形测量[J]. 激光与光电子学进展, 2021, 58(14): 1412003.
- Li G H, Ma W L, Zhu T T, et al. Thermal deformation measurement of hollow disk based on digital image correlation method[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(14): 1412003.
- [16] 徐从裕, 高雨婷, 徐俊, 等. 几何重心法亚像素提取算法研究[J]. 计量学报, 2020, 41(2): 190-197.
- Xu C Y, Gao Y T, Xu J, et al. Research on sub-pixel extraction algorithm of geometric center of gravity method[J]. Acta Metrologica Sinica, 2020, 41(2): 190-197.
- [17] 徐从裕, 徐俊, 高雨婷, 等. 面向在线测量的亚像素提取与实验验证[J]. 电子测量与仪器学报, 2019, 33(8): 23-29.
- Xu C Y, Xu J, Gao Y T, et al. Research on improved sub-pixel extraction algorithm for real-time detection[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2019, 33(8): 23-29.
- [18] 苏勇, 高越, 郜泽仁, 等. 光绘: 自由开源的数字散斑图生成和评价软件[J]. 实验力学, 2021, 36(1): 17-28.
- Su Y, Gao Y, Gao Z R, et al. Glare: a free and open source software for generation and assessment of digital speckle pattern[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2021, 36(1): 17-28.
- [19] 路雄, 赵远方, 王文涛, 等. 激光干涉水准标尺检定系统测量误差分析[J]. 计量科学与技术, 2021, 65(7): 38-42.
- Lu X, Zhao Y F, Wang W T, et al. Analysis of measurement errors of laser interference leveling rod verification system[J]. Metrology Science and Technology, 2021, 65(7): 38-42.
- [20] 金涛, 刘景林, 杨卫, 等. 线性位移台直线度高精密度干涉测量装置[J]. 光学精密工程, 2018, 26(7): 1570-1577.
- Jin T, Liu J L, Yang W, et al. High-precision straightness interferometer for linear moving stage[J]. Optics and Precision Engineering, 2018, 26(7): 1570-1577.

## Sub-Pixel Matching Method for Parameterized Shape Function

Xu Congyu<sup>1,2\*</sup>, Wang Biao<sup>1\*\*</sup>

<sup>1</sup>School of Instrument Science and Opto-Electronics Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, Anhui, China;

<sup>2</sup>Hanshan Industrial Research Institute, Hefei University of Technology, Hefei 230009, Anhui, China

### Abstract

**Objective** In digital image correlation methods, the sub-pixel matching error is related to the speckle image and shape function. For the gradient algorithm and curve fitting algorithm without iterative operation, the shape function is difficult to adapt to the sub-pixel distribution law of different speckle images. Although the calculation time is short, the sub-pixel matching error is large. For the Newton-Raphson algorithm with an iterative operation, the sub-pixel matching error can be greatly reduced through the infinite approximation of the target image to the original image or the original image to the target image, but the calculation is time-consuming. Generally, in the displacement range of 0.1-0.9 pixel, the sub-pixel error is mainly S-shaped, and the S-shaped error is related to the image speckle diameter. The S-shaped error is much more different for different speckle diameters. In the field of displacement measurement, the speckle image is fixed and determined, and how to select an appropriate shape function matching the known speckle image to shorten the sub-pixel matching time and improve the sub-pixel matching accuracy has become the focus of this paper.

**Methods** In order to reduce sub-pixel matching error, this paper proposes a sub-pixel matching method based on parameterized shape function with an exponential variable and background variable, and the core of the method is to decompose the  $3 \times 3$  correlation coefficient  $C(i, j)$  into the  $3 \times 1$  correlation coefficient  $A(i)$  in the  $x$  direction and the  $1 \times 3$  correlation coefficient  $B(j)$  in the  $y$  direction. Specifically,  $i$  and  $j$  vary in the set of  $-1, 0, \text{ and } 1$ , and then the  $3 \times 1$  correlation coefficient  $A(i)$  and the  $1 \times 3$  correlation coefficient  $B(j)$  with the exponential variable and background variable are weighted. In the paper, the difference between the absolute displacement and the sum of relative displacement is defined as a sub-pixel matching error, which includes linear and S-shaped errors. The shape function parameters are calibrated by using different regulation rules of the shape function parameters of the exponential variable and background variable on the sub-pixel matching error so that the proposed method features short sub-pixel matching time and small matching error.

**Results and Discussions** The experiment takes the Gaussian speckle pattern with a speckle diameter of 2 pixel, 10 pixel, and 20 pixel as an example, and 10 images with the displacement of 0.1–0.9 pixel in the  $x$  direction are generated respectively. The regulation rule of the shape function parameters on the sub-pixel matching error is experimentally studied. The research results show that the exponential variable of the shape function parameter has the primary regulation function to change the slope of the linear error and the secondary regulation function to change the direction of the S-shaped error (Fig. 4). The background variable of the shape function parameter has the primary regulation function to change the direction of the S-shaped error and the secondary regulation function to change the slope of the linear error (Fig. 5). Under the coordinated regulation of shape function parameters, the sub-pixel matching error of the above speckle image is less than 0.001 pixel (Table 1, Table 2, and Table 3). At the same time, the influence of the speckle diameter of the speckle image from 2 pixel to 20 pixel on the shape function parameters is studied (Table 4, Fig. 7, and Fig. 8). It is found that when the speckle diameter is greater than 6 pixel, the influence of the speckle diameter on the shape function parameters becomes weak, and the influence curve becomes flat, which also lays a good foundation for applying the method in the field of deformation measurement. Finally, according to the actual displacement speckle image provided by DIC Challenge, the proposed method is verified (Table 5).

**Conclusions** The sub-pixel matching method described in this paper makes the shape function approximate to the sub-pixel distribution law of the speckle image by calibrating the shape function parameters to obtain the optimal shape function and greatly reduces the sub-pixel matching error. Since the shape function calculation only involves the addition, subtraction, multiplication, division, and exponential operation of nine correlation coefficients, as well as no more than six cycles of calculation, the sub-pixel matching time can be ignored in the digital image correlation calculation. Compared with the gradient algorithm and curve fitting algorithm without iterative operation, the sub-pixel matching method of parameterized shape function can obtain ideal sub-pixel matching accuracy for speckle images with different speckle diameters, which cannot be achieved by gradient algorithm and curve fitting algorithm. Compared with the Newton-Raphson algorithm with the iterative operation, the proposed method has comparable sub-pixel matching accuracy in the field of displacement measurement and is more suitable for online displacement measurement due to the short matching time. However, in the field of deformation measurement, there are still some problems to be solved and further studied, such as the influence of the equivalent speckle diameter change of speckle image under deformation conditions on the shape function, as well as the dynamic calibration for shape function parameters.

**Key words** measurement; speckle; parametrized shape function; sub-pixel matching; calibration