

光学学报

基于杂化纠缠量子信号的导航测距方案

任钊恒, 苗强*, 吴德伟, 魏天丽

空军工程大学信息与导航学院, 陕西 西安 710077

摘要 传统的无线电导航技术借助量子纠缠信号优越的特性可以突破所面临的技术壁垒, 实现高精度的测量。结合量子照明的原理和腔电光力转换器, 提出了一种基于量子微波纠缠信号的导航测距方案。通过将测距任务模型化为一个多目标假设测试问题, 突破了量子照明中二元假设检验的限制。同时, 通过理论分析和仿真, 证明了所提测距方案在误差指数方面具有优势, 且在测距精度上优于经典的测距方案。

关键词 量子光学; 无线电导航; 量子照明; 多目标假设; 测距; 误差指数

中图分类号 O431.2 文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS221517

1 引言

纠缠是量子物理学领域中所出现的最有趣的现象之一。随着“超距现象”的出现, 诸多领域中与其相关的应用研究也被广泛开展。量子信号之间的纠缠是脆弱的, 外界噪声和损耗可轻而易举地将其摧毁, 但其所带来的操作优势仍然被保留了下来。例如, 即使共享纠缠的信道被破坏, 利用量子信号纠缠辅助的通信速率也可以远远大于无辅助的经典情况。

为了在实践中实现量子照明的理论优势, 相关领域中研究人员进行了大量的努力。目前, 已经提出了能够进行实验演示的次最佳接收器设计和饱和量子优势的结构化最佳接收器设计^[1]。阻碍量子照明发挥实际优势的一个主要障碍是: 它一次只能在一个极化-方位-仰角-距离-多普勒分辨率面阵中询问目标的存在。它将信号发送到一个狭窄的区域中, 并在固定的时间判断以固定速度移动的目标是否存在, 而实际的导航系统通常是估计目标的极化属性、方位角与仰角、距离与速度(通过多普勒效应)。

由于量子照明只有在大噪声背景下才能够显现出优势, 且大噪声背景只存在于微波中, 故相关的研究应用主要放在微波领域中。然而, 微波光子的能级相对于光波光子低 3 个数量级左右, 故相对来说不易于制备和观测, 而腔电光力转换器的出现解决了这个问题。腔电光力转换器是一种双模腔光力系统, 既可以有效制备光波与微波间的跨频段纠缠, 又可以实现光波与微波间的能量转移和量子态转移, 通过该器件可以使两者优势互补, 并进一步应用于量子导航领域中^[2]。

本文提出了一种基于量子纠缠微波信号的测距方案, 该方案可以突破量子照明中二元假设检验的限制。首先, 介绍了测距方案并构建了相关数理模型。然后, 对方案的假设检验进行分析。最后, 将所提方案与经典方案进行比较, 理论分析和仿真验证表明, 所提方案在探测的误差指数方面具有显著优势, 且在精度上优于经典方案。

2 测距方案

测距方案的模型如图 1 所示。处于地面站的发送端发送一个处于纠缠状态的微波信号到自由空间中, 并在接收器端进行连续测量, 以确定来自目标的反射。由于任何测距任务都有一个有限的精度要求, 故将测距模型转化为一个多目标假设检验问题, 其中每个假设对应于目标处于第 $m \geq 2$ 个离散距离面元的任意一个中。

为实现沿着信号的发送方向确定目标的距离, 假设观测器有一个有限的精度要求 Δ 。然后, 将信号最远可辐射到的距离分成 $m \geq 2$ 个长度切片, 将测距问题建模为 m 个假设之间的假设检验任务。在假设 h 中, 目标存在于以距离原点 $h\Delta$ 为中心的面元中。

如图 1 所示, 探测信号为 \hat{a}_s (点划线) 和参考信号 \hat{a}_r (点线) 最初由腔电光力转换器制备并处于纠缠状态^[3]。该信号用于探测反射率为 κ 的目标的距离。当目标在距离 $h\Delta$ 处时, 在时间 $t_h = 2h\Delta/c$ 收集的以点划线突出显示的模式 \hat{a}_h 包含与噪声混杂在一起的来自目标的反射, 而其余收集的模式(短划线)均为噪声, 其中 c 为光速。探测信号的平均光子数用 $N_s(x =$

收稿日期: 2022-07-22; 修回日期: 2022-09-14; 录用日期: 2022-09-21; 网络首发日期: 2022-10-01

基金项目: 国家自然科学基金(62073338)

通信作者: *75541650@qq.com

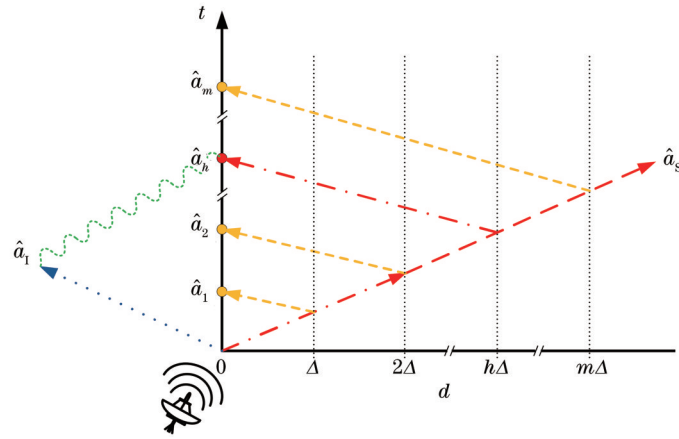


图 1 纠缠测距方案示意图

Fig. 1 Schematic diagram of entanglement ranging scheme

S, I, h)来表示。

为了确定目标的距离,由处于地面站的信号发送端发送探测信号,利用湮灭算子 \hat{a}_s 表示,并等待探测从目标反射回来的回波信号。 $\langle \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s \rangle = N_s$ 的平均光子数受到信号源或避免暴露探测行动的限制。为了确定回波信号的到达时间,需要在接收端连续收集信号,并对信号进行符合关联检测,使用杂化二阶矩比值 $\epsilon = |\langle \hat{a}_h \hat{a}_1 \rangle| / (\sqrt{N_h} \sqrt{N_1})$ 对信号的纠缠进行度量,确定回波信号的到达时间,其门限值为 1。当 $\epsilon > 1$ 时,两路信号纠缠,且其值越大,两者的量子关联越强,纠缠程度越高。当 $\epsilon \leq 1$ 时,两者的关联为经典关联,不存在纠缠^[3]。使用门限值 $\epsilon_R = 1$ 与信号处于最大纠缠程度时的 ϵ_{\max} 所对应的半峰全宽值 $[\epsilon_{\max} - (\epsilon_{\max} - \epsilon_R) / \sqrt{2}]$ 作为测距方案的探测精度。假设获得 $\langle \hat{a}_\vartheta \rangle_{\vartheta=1}^m$, 则其到达时间为 $t_\vartheta = 2\vartheta\Delta/c$ 。在假设 h 中,目标距离观察者为 $h\Delta$, 反射模式 \hat{a}_h 在时间 $t_h = 2h\Delta/c$ 之后到达地面站。记 $t = t_{h^-}$ 和 $t = t_{h^+}$ 为门限值 $\epsilon_R = 1$ 与最大纠缠度 ϵ_{\max} 间的半峰全宽值对应的两个时间点,则测距精度 Δ 可以表示为 $\Delta = c |t_{h^+} - t_{h^-}|$ 。

可以用分束器变换描述的玻色子热损耗通道来模拟反射,即

$$\hat{a}_h = \sqrt{\kappa} \hat{a}_s + \sqrt{1-\kappa} \hat{e}_h, \quad (1)$$

式中: \hat{e}_h 为平均光子数为 $N_B/(1-\kappa)$ 的热噪声。当返回的信号没有在 t_ϑ 及时到达时,被收集的热噪声模式 $\hat{a}_{\vartheta \neq h} = \hat{e}_\vartheta$ 的平均光子数为 N_B 。

至此,已将测距简化为在整个收集的模式集合 $\{\hat{a}_\vartheta\}_{\vartheta=1}^m$ 中确定返回的信号模式 \hat{a}_h 。在经典方案中, \hat{a}_s 的输入状态的准概率分布函数 $P(\alpha)$ 是非负和非奇异的^[4-5]。然而,在纠缠方案中,除了发送能量受限的探测信号 \hat{a}_s 之外,还将保持本地存储的参考信号 \hat{a}_1 与探测信号纠缠。虽然初始纠缠可能已经被破坏,但是存储的参考信号 \hat{a}_1 仍将与在假设 h 中从热损耗通道 L_{κ, N_B}

中返回的回波信号 \hat{a}_h 相关。 \hat{a}_1 和 \hat{a}_h 的联合状态具有协方差矩阵

$$V_{SI} = \begin{bmatrix} (2N_B + 1)I_2 & 2\sqrt{\kappa} C_p Z_2 \\ 2\sqrt{\kappa} C_p Z_2 & (2N_s + 1)I_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中: $C_p = \sqrt{N_s(N_s + 1)}$; I_2, Z_2 为泡利矩阵。此处,真空噪声方差为 1。

由上述分析可知,测距很明显不属于量子信道定位的问题^[6]。量子信道定位是通过向 m 个通道输入 m 个不同的探测信号来确定 m 个通道中一个通道的位置,而在本测距方案中,只有单个探测信号与目标相互作用,且作用时间未知。因此,量子信道定位中探测信号和参考信号之间的这种配对是清楚的,而本测距方案中不清楚哪对信号是潜在相关的。

3 测距原理及数理模型

3.1 假设检验分析

图 2 显示了接收方假设检验问题中的 m 种可能状态。在每种情况下,参考信号(圆点)与反射信号(方点)相关。通过误差概率来量化上述假设检验任务的性能。为了获得测距任务的最佳性能,可以在总光子数限制 N_s 和相对应的测量值下对输入状态进行优化,也可以使用多个自由度,在每次发送探测信号时发送 M 个模式 $\hat{a}_s = \{\hat{a}_s^{(n)}\}_{n=1}^M$, 对于每个时间片 t_ϑ 来说,此时收集到的回波信号的每个部分也包含多个模式 $\hat{a}_\vartheta = \{\hat{a}_\vartheta^{(n)}\}_{n=1}^M$ 。

在经典方案中,若以目标范围 $h\Delta$ 为条件,输出状态可以写成

$$\rho_h^c = \left(\bigotimes_{\vartheta \neq h} \hat{\sigma}_{\hat{a}_\vartheta}^B \right) \otimes \hat{\sigma}_{\hat{a}_h}^T, \quad (3)$$

式中:背景状态 $\hat{\sigma}^B$ 由 M 个热状态的乘积组成,每个热状态具有的平均光子数为 N_B ; 目标状态 $\hat{\sigma}^T$ 为嵌入在相同热噪声环境中的 M 模式的返回信号,由热损耗通道 L_{κ, N_B} 产生; $\bigotimes_{\vartheta \neq h}$ 为到达时间不为 h 的热噪声信号的

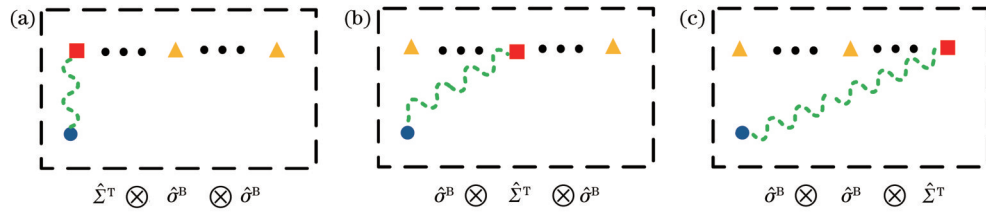


图 2 假设检验问题示意图。(a)假设 1;(b)假设 h ;(c)假设 m

Fig. 2 Schematic diagram of hypothesis testing problems. (a) Hypothesis 1; (b) hypothesis h ; (c) hypothesis m

卷积。在所提测距方案中,每个探测信号 $\hat{a}_s^{(n)}$ 都有一个本地存储的参考信号 $\hat{a}_s^{(n)}$ 与之相纠缠,总的返回-参考信号状态为

$$\hat{\rho}_h^E = \left(\bigotimes_{\vartheta \neq h} \hat{\sigma}_{a_s}^B \right) \otimes \hat{\Sigma}_{a_s, a_s}^T, \quad (4)$$

式中:相关输出状态 $\hat{\Sigma}^T$ 具有 M 个信号对,每个信号对处于式(2)中的协方差矩阵 V_{s1}^T 描述的状态。

给定描述经典(C)或纠缠(E)方案中测量的正算子值测量元素 $\left\{ \hat{\Pi}_{\vartheta}^{C/E} \right\}_{\vartheta=1}^m$, 每个元素 $\hat{\Pi}_{\vartheta}^{C/E}$ 表示目标范围是 $\vartheta\Delta$ 、误差概率为 $P_{C/E} = 1 - \sum_{\vartheta=1}^m p_{\vartheta} \text{tr} \left(\hat{\Pi}_{\vartheta}^{C/E}, \hat{\rho}_{\vartheta}^{C/E} \right)$ 的判定,为确保统一而不失一般性选择先验值 $p_{\vartheta} = 1/m$, 其中 $\text{tr}(\cdot)$ 为矩阵对角线之和函数。

3.2 纠缠测距方案渐进性能

确认具有任意先验的状态 $\left\{ \zeta_h^{(\otimes M)} \right\}_{h=1}^m$ [7], 最小误差概率 P_H 的渐进误差指数由最小成对错误指数给出,即

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-1}{M} \ln P_H = \min_{h \neq h'} C \left(\hat{\zeta}_h, \hat{\zeta}_{h'} \right), \quad (5)$$

式中: $C \left(\hat{\zeta}_h, \hat{\zeta}_{h'} \right)$ 为二元 Chernoff 指数函数[8], 可表示为

$$C \left(\hat{\zeta}_h, \hat{\zeta}_{h'} \right) = \max_{0 \leq s \leq 1} \left\{ -\lg \left[\text{tr} \left(\hat{\zeta}_h^s, \hat{\zeta}_{h'}^{1-s} \right) \right] \right\}. \quad (6)$$

对于纠缠测距方案,由式(4)可推得

$$\hat{\rho}_h^E = \left(\bigotimes_{\vartheta \neq h} \hat{\sigma}_{a_s}^B \right) \otimes \hat{\Sigma}_{a_s, a_s}^T = \left(\hat{\rho}_h^E \right)^{(\otimes M)}, \quad (7)$$

对于 M 型张量结构,有

$$\hat{\rho}_h^E = \left(\bigotimes_{\vartheta \neq h} \hat{\sigma}_{\vartheta}^B \right) \otimes \hat{\Sigma}_{h,1}^T, \quad (8)$$

式中: $\hat{\Sigma}_{h,1}^T$ 为协方差矩阵为 V_{s1}^T 的零均值高斯态。

通过量子 Chernoff 界限(QCB)可以获得渐进误差概率,由式(6)可推得公式[7-8]

$$C \left(\hat{\rho}_h^E, \hat{\rho}_{h'}^E \right) = C \left(\hat{\rho}_1^E, \hat{\rho}_2^E \right) = C \left(\hat{\sigma}_1^B \otimes \hat{\Sigma}_{2,1}^T, \hat{\Sigma}_{1,1}^T \otimes \hat{\sigma}_2^B \right), \quad (9)$$

式(9)的解算非常复杂,但当 $N_B \gg 1, M \ll 1$ 时,可推得前导顺序结果

$$C \left(\hat{\sigma}_1^B \otimes \hat{\Sigma}_{2,1}^T, \hat{\Sigma}_{1,1}^T \otimes \hat{\sigma}_2^B \right) \approx \frac{2\kappa N_s}{N_B}, \quad (10)$$

由此可推得

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-1}{M} \ln \left[P_H \left(\hat{\rho}_h^E \right) \right] \approx \frac{2\kappa N_s}{N_B}, \quad (11)$$

则基于较好的测量(PGM)的 Helstrom 极限的一个上界[6,9]为

$$P_{E,H} \leq P_{E,UB} = (m-1) F^{(M)} \left[V_{1,2,1}^{(1)}, V_{1,2,1}^{(2)} \right] \approx (m-1) \exp \left(-\frac{M\kappa N_s}{N_B} \right), \quad (12)$$

式中: $F(V_1, V_2)$ 为两个协方差矩阵为 V_1 和 V_2 的零均值高斯态之间的保真度。

3.3 经典测距方案渐进性能

考虑所有具有正 P 函数的 M 模经典态[10], 可证明单模相干态在最大化误差指数的定义下使得渐近误差概率最小。对相干态 $|\alpha\rangle$ 与相位和振幅的平方进行参数化处理,即 $|x, \theta\rangle = \left| \sqrt{x} \exp(i\theta) \right\rangle$, 其中 $x \geq 0$ 和 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。这里, M 模相干态 $|x, \theta\rangle = \bigotimes_{k=1}^M |x_k, \theta_k\rangle$ 又是通常具有不同幅度的多个模的张量积。其中, x 与正向和实向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_M) = \{x_k\}_{k=1}^M$ 和 $\theta = \{\theta_k\}_{k=1}^M$ 的定义相类似。

综上所述,作为输入的一般经典状态可以写成勒贝格积分的形式[11], 即

$$\hat{\rho} = \int dP |x, \theta\rangle \langle x, \theta|, \quad (13)$$

式中: 概率度量 P 对于任意的 x 和 θ 是一样的。

定义 $\|x\|_1 = \sum_k |x_k| = \sum_k x_k$ 是一个标准的单范数, 与 $|x, \theta\rangle$ 态的总平均光子数相等。由总能量的约束可推得

$$\int dP \|x\|_1 \leq MN_s, \quad (14)$$

将积分简化为受限于非负变量 x 的边界概率度量 P' 。

假设 h 的总条件状态为混合态, 其表达式为

$$\hat{\rho}_h^C = \int dP \hat{\rho}_{x, \theta, h}^C, \quad (15)$$

其中每个条件状态可表示为

$$\hat{\rho}_{x, \theta, h}^C = \left(\bigotimes_{\vartheta \neq h} \hat{\sigma}_{a_s}^B \right) \otimes \hat{\sigma}_{a_s}^T, \quad (16)$$

与式(3)相类似, 目标状态 $\hat{\sigma}_{a_s}^T$ 为 M 个热态的乘积, 每个热态具有幅度 $\sqrt{\kappa x_k} \exp(i\theta_k)$ 和协方差矩阵 $(2N_B + 1)I$ 。

在先验条件相同的情况下, 由 Helstrom 极限给出的最小误差概率 P_H 受限于式(15)中每个分量的 Helstrom 极限[6], 即

$$P_H \left[\left(\hat{\rho}_h^C \right)_{h=1}^m \right] \geq \int dP P_H \left[\left(\hat{\rho}_{x, \theta, h}^C \right)_{h=1}^m \right]. \quad (17)$$

对于每个 Helstrom 极限给出的最小误差概率

$P_H\left[\left(\hat{\rho}_{x,\theta,h}^c\right)_{h=1}^m\right]$, 考虑 M 个模式 \hat{a}_h 上的无源线性光学变换 \hat{U}_O , 改变换使得目标状态 $\hat{\sigma}_{a_h}^T$ 中的 M 个模式相同, 即

$$\hat{U}_O \hat{\sigma}_{a_h}^T \hat{U}_O^\dagger = (\hat{\sigma}^T)^{\otimes M}, \quad (18)$$

对于每个 $\hat{\sigma}_h^{(T)} = L_{\kappa, N_B} \left(\left| \sqrt{\|x_1\|_2/M} \right\rangle \left\langle \sqrt{\|x_1\|_2/M} \right| \right)$ 都是有效的。用一个正交对称矩阵 O 来描述该变换, 其完全由状态 $|x, \theta\rangle$ 的功率分布决定, 而与假设 h 无关。本质上, 该变换使得源的功率分布即使在 M 个模式下也是如此。由于变换所涉及到的信道在 M 个模式上都是线性且相同的, 因此 \hat{U}_O 实际上使得 M 个模式的输入能量相等。当 $1 \leq \vartheta \leq m$ 时, 对于处于热态背景的每个模块 \hat{a}_ϑ 应用相同的无源线性光学变换, 则

$$\hat{U}_O \hat{\sigma}_{a_\vartheta}^B \hat{U}_O^\dagger = \hat{\sigma}_{a_\vartheta}^B = (\hat{\sigma}_\vartheta^B)^{\otimes M}, \quad (19)$$

式中: $\hat{\sigma}_\vartheta^B$ 为平均光子数为 N_B 的热态。

已知的酉变换 $\hat{U}_O^{(\otimes M)}$ 适用于所有可能被区分的状态, 并且 Helstrom 极限在酉变换下保持不变, 由此可推得

$$P_H\left[\left(\hat{\rho}_{x,\theta,h}^c\right)_{h=1}^m\right] = P_H\left\{\left\{\hat{U}_O^{(\otimes M)} \hat{\rho}_{x,\theta,h}^c \left[\hat{U}_O^{(\otimes M)}\right]^\dagger\right\}_{h=1}^m\right\} = P_H\left\{\left[\left(\hat{\rho}_{x,\theta,h}^c\right)^{\otimes M}\right]_{h=1}^m\right\}, \quad (20)$$

式中: $\hat{\rho}_{x,\theta,h}^c = \hat{\sigma}_h^T \otimes \left(\otimes_{\vartheta \neq h} \hat{\sigma}_\vartheta^B\right)$ 。

现在涉及的每个状态都是相同状态下的多个情况, 考虑总体任务的误差指数, 由式(14)、式(17)和 \ln 函数的性质可推得

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-1}{M} \ln \left\{ P_H \left[\hat{\rho}_h^c \right]_{h=1}^m \right\} \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-1}{M} \int dP \ln \left\{ P_H \left[\hat{\rho}_{x,\theta,h}^c \right]_{h=1}^m \right\} = \int dP \frac{2\kappa \|x_1\|_2 / M}{1 + 2N_B + 2\sqrt{N_B(1 + N_B)}} \leq \frac{2\kappa N_s}{1 + 2N_B + 2\sqrt{N_B(1 + N_B)}}, \quad (21)$$

因此输入的准概率分布函数 $P(\alpha)$ 为正的任何经典方案的误差概率极限的渐近严格表达式, 可以利用 Helstrom 极限和 QCB 的起伏性质进行推导, 即

$$P_{C,H} \approx \frac{m-1}{m} \exp \left[- \frac{2M\kappa N_B}{1 + 2N_B + 2\sqrt{N_B(1 + N_B)}} \right] \approx \frac{m-1}{m} \exp \left(- \frac{M\kappa N_s}{2N_B} \right), \quad N_B \gg 1, \quad (22)$$

常数 $(m-1)/m$ 是为了匹配随机猜测的低信噪比极限。在适当的能量约束下, 任何相干态的输入都能达到该极限。

此外, 测距与量子信道定位不同, 虽然在经典方案中不存在参考信号, 但是量子信道定位问题的误差概率下限也适用于经典测距 $P_{C, LB} = [(m-1)/(2m)] \times \exp[-2M\kappa N_s/(1+2N_B)]$ 。然而, 这个界限并不严格, 因为它给出的误差指数比式(22)的误差指数大两倍。

将式(22)中的渐近极限与单模相干态直接检测方案的错误概率性能进行比较, 即

$$P_{C, DD} = \frac{1}{m} \sum_{k=2}^m (-1)^k C_m^k \exp \left[- \frac{(1-v^{k-1})M\kappa N_s}{(1-v^{k-1})/(1-v)} \right], \quad (23)$$

式中: $v = N_B/(N_B+1)$ 。在 $N_B \gg 1$ 和 $M \gg 1$ 限制下, $P_{C, DD} \approx \exp[-M\kappa N_s/(2N_B)]$ 。它与式(22)的误差指数相匹配, 可得单模相干态直接检测方案就误差指数而言是渐近最优的。

3.4 纠缠测距方案分析

在纠缠测距方案中, 最终返回-参考信号的联合状态 $\hat{\rho}_h^E$ 中具有 $M \gg 1$ 个相同的状态。因此, 将 QCB 应用于多个假设^[7, 12]可以获得渐近误差概率。多目标假设检验问题的误差指数等于用协方差矩阵区分两个三模零均值高斯态的误差指数, 可推得

$$V_{1,2,1}^{(1)} = \begin{bmatrix} (2N_B+1)I_2 & 0 & 2\sqrt{\kappa} C_p Z_2 \\ 0 & (2N_B+1)I_2 & 0 \\ 2\sqrt{\kappa} C_p Z_2 & 0 & (2N_s+1)I_2 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$V_{1,2,1}^{(2)} = \begin{bmatrix} (2N_B+1)I_2 & 0 & 0 \\ 0 & (2N_B+1)I_2 & 2\sqrt{\kappa} C_p Z_2 \\ 0 & 2\sqrt{\kappa} C_p Z_2 & (2N_s+1)I_2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

误差指数^[13]可以通过分析计算得出, 当 $N_B \gg 1$, $N_s \ll 1$ 和 $M \gg 1$ 时, Helstrom 极限的渐近公式为

$$P_{E,H} \approx \frac{m-1}{m} \exp \left(- \frac{2M\kappa N_s}{N_B} \right). \quad (26)$$

与经典测距方案最佳的性能相比, 可以看出式(26)中的纠缠测距方案在误差指数方面具有 4 倍的优势, 这类似于量子照明中的纠缠优势。

由式(12)可推得

$$P_{E,H} \leq P_{E, UB} \approx (m-1) \exp \left(- \frac{M\kappa N_s}{N_B} \right), \quad (27)$$

$P_{E, UB}$ 的误差指数比 $P_{E,H}$ 的差 2 倍。然而, 与经典测距方案的性能相比, 仍然可以看出在误差指数上有 2 倍

的优势。

4 仿真分析

4.1 测距误差概率与测距精度分析

如图 3 所示,在信号总光子数为 $N_s = 0.001$ 、距离切片数量为 $m = 30$ 和环境噪声为 $N_B = 10$ 的条件下,对不同测距方案的误差概率性能与测距精度 Δ 和目标反射率 κ 之间的关系进行仿真分析。可以看出,当目标的反射率一定时,纠缠测距方案的误差概率性能与测距精度 Δ 之间成反比关系:当误差概率较大时,测距精度较低;当误差概率较低时,测距精度较高。

4.2 纠缠测距方案目标识别误差概率性能优势分析

测距方案所处的背景环境温度为 $T_B = 293$ K,使用分束器模型对信号在自由空间中的传播过程进行描述,其透射系数为 0.5。在信号总光子数为 $N_s = 0.001$ 和目标反射率为 $\kappa = 0.001$ 的条件下,选择不同的距离切片数量 m 和环境噪声 N_B 进行仿真:1) $m = 2$ 和 $N_B = 3$; 2) $m = 3$ 和 $N_B = 1$; 3) $m = 50$ 和 $N_B = 20$ 。在图 4 中,点实线表示纠缠方案的渐近 QCB $P_{E,H}$,点划线表示精确的上界 $P_{E,UB}$ 。作为上界, $P_{E,UB}$ 在 M 的某

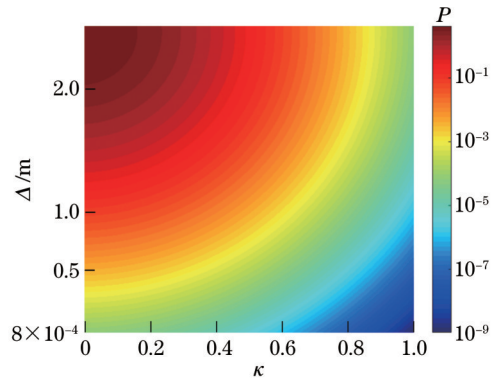


图 3 纠缠测距误差概率与测距精度之间的关系

Fig. 3 Relationship between entanglement ranging error probability and ranging accuracy

些区域中具有大于 1 的值,其中概率的单位界占有主导优势。点虚线表示经典方案的 QCB $P_{C,H}$,虚线表示精确下界 $P_{C,LB}$,实线表示相干态检测性能 $P_{C,DD}$ 。另外,对相干态输入的 PGM 性能进行了数值评估,并将其与经典 QCB 进行了比较,其中的误差项源于数值计算中有限光子数截断引起的误差估计。

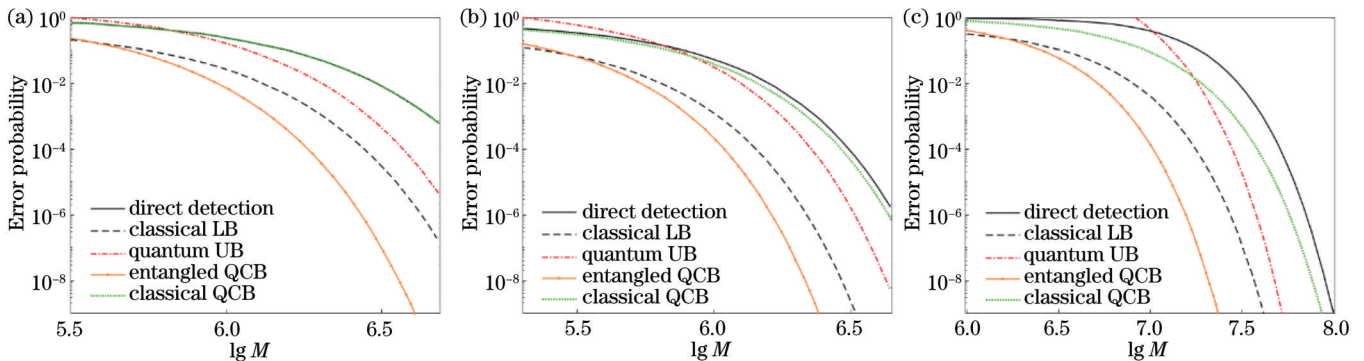


图 4 不同测距方案目标识别的误差概率性能与模式数量 M 的关系。(a) $m = 2, N_B = 3$; (b) $m = 3, N_B = 1$; (c) $m = 50, N_B = 20$

Fig. 4 Relationship between error probability performance of different ranging schemes and mode number M . (a) $m = 2, N_B = 3$; (b) $m = 3, N_B = 1$; (c) $m = 50, N_B = 20$

在图 4 中,评估了 $P_{C,H}$ (点虚线)、 $P_{C,LB}$ (虚线) 和 $P_{C,DD}$ (实线) 中的各种参数,并对测距方案的性能进行了比较。可以看出:对于 $m = 2, P_{C,DD}$ 和 $P_{C,H}$ 轨迹一致,一起塌缩,如图 4(a) 所示;对于 $m > 2, P_{C,DD}$ 和 $P_{C,H}$ 的轨迹也是渐近一致的,如图 4(b)、(c) 所示。还对 $m = 2$ 情况下的 Helstrom 极限进行了数值评估,发现 $P_{C,H}$ 确实提供了正确的标度。对于 $m > 2$, Helstrom 极限的数值评估是比较困难的。将其与 PGM 性能进行了比较,后者与图 4(a) 中 $m = 2$ 情况下的 Helstrom 极限非常吻合。对于 $m = 3$ 这种情况,可以看到 $P_{C,H}$ 和 PGM 性能之间具有良好的一致性。因此,可以得出结论: $P_{C,H}$ 和 $P_{C,DD}$ 可以很好地刻画方案的性能极限。

纠缠上限 $P_{E,UB}$ (点划线) 证明了纠缠测距的优势和在误差指数方面的标度优势,而渐近性能 $P_{E,H}$ (点实

线) 进一步证明了纠缠测距的优势。QCB 仿真结果 (纠缠情况下的点实线和经典情况下的点虚线) 的误差指数显示了纠缠所带来的 6 dB (4 倍) 优势,与理论分析相符。

5 结论

通过将测距任务模型化为一个多目标假设测试问题,提出了一种基于量子纠缠的导航测距方案,对测距方案的原理和模型进行了阐述,分析了经典测距方案与纠缠测距方案的渐进性能。在此基础上,对不同测距方案设置共同参数来进行量化分析,对其测距性能进行了比较,并分析了测距精度与测距误差概率的关系。理论结果表明,纠缠测距方案在精度上优于经典方案,在确定任意数量可能性范围的误差指数方面提供了 6 dB 优势。此外,该测距方案还可用于实现脉冲

位置调制的纠缠辅助通信,并为具有量子优势的量子测距雷达提供了应用方向。

参 考 文 献

- [1] Guha S, Erkmen B I. Gaussian-state quantum-illumination receivers for target detection[J]. *Physical Review A*, 2009, 80(5): 052310.
- [2] Li P B, Gao S Y, Li F L. Robust continuous-variable entanglement of microwave photons with cavity electromechanics [J]. *Physical Review A*, 2013, 88(4): 043802.
- [3] 任钊恒, 苗强, 吴德伟, 等. 基于杂化纠缠量子信号的导航测角方案[J]. *光学学报*, 2022, 42(1): 0127001.
Ren Z H, Miao Q, Wu D W, et al. Navigation angle measurement scheme based on hybrid entangled quantum signal [J]. *Acta Optica Sinica*, 2022, 42(1): 0127001.
- [4] Tan S H, Erkmen B I, Giovannetti V, et al. Quantum illumination with Gaussian states[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(25): 253601.
- [5] Pirandola S. Quantum reading of a classical digital memory[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(9): 090504.
- [6] Zhuang Q T, Pirandola S. Entanglement-enhanced testing of multiple quantum hypotheses[J]. *Communications Physics*, 2020, 3(1): 103.
- [7] Li K. Discriminating quantum states: the multiple Chernoff distance[J]. *The Annals of Statistics*, 2016, 44(4): 1661-1679.
- [8] Audenaert K M R, Calsamiglia J, Muñoz-Tapia R, et al. Discriminating states: the quantum Chernoff bound[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 98(16): 160501.
- [9] Hausladen P, Wootters W K. A "pretty good" measurement for distinguishing quantum states[J]. *Journal of Modern Optics*, 1994, 41(12): 2385-2390.
- [10] Kiesel T, Vogel W, Parigi V, et al. Experimental determination of a nonclassical Glauber-Sudarshan P function[J]. *Physical Review A*, 2008, 78(2): 021804.
- [11] Cabada A, Vivero D R. Expression of the Lebesgue Δ -integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ -antiderivatives[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2006, 43(1/2): 194-207.
- [12] Nussbaum M, Szkola A. An asymptotic error bound for testing multiple quantum hypotheses[J]. *The Annals of Statistics*, 2011, 39(6): 3211-3233.
- [13] Pirandola S, Lloyd S. Computable bounds for the discrimination of Gaussian states[J]. *Physical Review A*, 2008, 78(1): 012331.

Navigation and Ranging Scheme Based on Hybrid Entangled Quantum Signals

Ren Zhaocheng, Miao Qiang*, Wu Dewei, Wei Tianli

Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, Shaanxi, China

Abstract

Objective Since the birth of navigation, it has had a huge impact on human life. At present, various navigation and positioning methods based on physical foundations such as sound, light, electricity, magnetism, and force have emerged one after another. Among them, the systems based on radio navigation technology for navigation and detection are the most common, radio navigation is still the main means used in the field of military and civil aviation navigation. Navigation is the process of guiding the safe navigation of the operating body. The main tasks include ranging, angle measurement and positioning, etc. These tasks are premised on obtaining the required navigation parameters. The navigation parameters are mainly divided into four types, namely position, angle, distance and speed. The position is a space-time parameter, including the time and space information of the running body. With the progress of the times and the growth of human needs, although the traditional navigation detection method is still the mainstream application in related fields, the detection accuracy is limited. Besides, it is easy to be interfered, the long-distance weak signal detection ability is not strong, and the safety performance cannot be effectively guaranteed. It has become increasingly prominent that traditional radio navigation methods will gradually fail to meet human needs for navigation. It is of great significance to study new navigation ranging solutions combined with quantum lighting to solve the above problems. Meanwhile, quantum illumination can only interrogate the presence of a target in one polarization-azimuth-elevation-range-Doppler-resolution area array at a time. It sends a signal to a narrow area and judges the presence of a target moving at a fixed speed at a fixed time, while practical navigation systems usually estimate the target's polarization properties, azimuth and elevation, distance and velocity (via Doppler effect). Therefore, it is of great significance to study new solutions to solve this problem and give full play to its advantages.

Methods In this paper, combined with the method and principle of quantum lighting, the cavity electro-optical force converter is used to solve the problem of signal detection, and the energy and quantum state transfer between light waves and microwaves are realized, so that the advantages of the two complement each other. The model is transformed into a multi-objective hypothesis testing problem, and the advantages of the proposed scheme are verified by simulating the target identification error probability index and ranging accuracy of the classical ranging scheme and the proposed scheme.

Results and Discussions Combined with the principle and scheme of quantum lighting, by modeling the ranging task as a multi-target hypothesis testing problem, the limitation of binary hypothesis testing in quantum lighting is broken (Fig. 2). The asymptotic performance of the classical ranging scheme and the entangled ranging scheme is discussed and analyzed, and simulations are carried out. The entanglement upper limit (dotted line) proves the advantages of entangled ranging, as well as the scale advantage in the error index, while the progressive performance (dotted solid line) further demonstrates the advantages of entangled ranging. The error index of the QCB simulation results (dotted solid line in the entangled case and dotted dashed line in the classical case) shows a 6 dB (4-fold) advantage brought by entanglement, which is consistent with the theoretical analysis (Fig. 3). The relationship between the error probability measurement performance of different ranging schemes and the distance accuracy and target reflectivity is simulated and analyzed. When the target reflectivity is constant, there is an inverse relationship between the error probability performance of the entangled ranging scheme and the ranging accuracy. When the error probability is high, the ranging accuracy is low, and when the error probability is low, the ranging accuracy is high. Besides, the solution proposed in this paper is better than the classical ranging solution in terms of ranging accuracy.

Conclusions In this paper, by modeling the ranging task as a multi-target hypothesis testing problem, a quantum entanglement-based navigation ranging scheme is proposed. The principle and model of the ranging scheme are expounded, and the progressive performance of the classical ranging scheme and entanglement measuring scheme is analyzed. On this basis, a quantitative analysis of the common parameters of different ranging schemes is carried out, the ranging performance is compared, and the relationship between ranging accuracy and ranging error probability is analyzed. The proposed scheme outperforms the classical scheme, providing a 6 dB advantage in determining the error exponent for any number of possible ranges. In addition, this ranging scheme can also be used to realize entanglement-assisted communication of pulse position modulation, and provides an application direction for quantum ranging radar with quantum advantages.

Key words quantum optics; radio navigation; quantum illumination; multi objective hypothesis; ranging; error index