

基于六光子双数态的量子增益显微成像

任小菊, 郑惠丽, 时泽准, 金光日*

浙江理工大学物理系, 浙江 杭州 310018

摘要 基于六光子双数态, 研究了两输出光子计数测量方案的最大似然估计量及其相位灵敏度, 并用最大似然估计量重构双折射样品的二维显微图像。数值结果表明, 两组两输出测量方案可以避免暗点处的相位灵敏度发散, 从而克服显微图像的散斑问题。与单光子情况相比, 重构的图像整体品质因子接近于理想的六光子双数态增益因子。

关键词 量子光学; 量子度量学; 相位灵敏度; 双数态; 量子增益相位成像

中图分类号 O413 文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS221563

1 引言

基于干涉仪的高精密相位测量与估值问题是度量学的重要研究内容之一^[1]。随着科技的发展和探测器小型化的要求, 各种器件的工作原理遵从量子力学的基本原理, 催生了所谓的量子度量学^[2-4], 它借助光和多粒子系统的量子关联特性来实现对某一个(或多个)物理参量的高分辨和高灵敏度测量^[5-11]。基于光量子干涉仪的量子度量和成像技术作为有望应用的量子技术之一, 受到各国的高度重视。与传统光学显微技术不同, 量子多光子显微要求在极弱光条件下进行(避免损伤生物样品), 利用入射光的量子关联特性来提高样品的成像品质, 实现所谓的超灵敏度显微成像^[12-13]。

基于光量子干涉的相位度量和显微成像研究起源于相干光 Mach-Zehnder 干涉实验。若在干涉仪的一个输入端注入相干光, 另一端闲置, 光强测量的输出信号呈现振荡干涉信号正比于 $\cos^2(\theta/2)$ 或 $\sin^2(\theta/2)$ (θ 为相位), 条纹间距约为入射光波长的一半, 称为瑞利衍射极限^[1]。相应地, 相位灵敏度达到标准量子极限 (SQL), 即 $\delta\theta_{\text{SQL}} = 1/\sqrt{N}$, 其中 N 为入射光光子数目。1981 年, Caves^[14] 提出了相干光-压缩真空光作为 Mach-Zehnder 干涉仪的输入态(简称压缩光干涉仪), 通过光强差测量可实现相位测量精度超越标准量子极限 $\delta\theta = \exp(-|\xi|)/\sqrt{\bar{n}} \leq 1/\sqrt{\bar{n}}$, 其中 $|\xi|$ 为压缩真空态 $|\xi\rangle$ 的压缩因子^[14], \bar{n} 为平均光子数目。后续研究表明未知相位 θ 的测量精度可以进一步提高, 达到所谓的 Heisenberg 极限 $\delta\theta_{\text{HL}} = 1/\bar{n}$ ^[15]。

根据量子度量学的一般原理, 相位测量精度遵从

Cramér-Rao 不等式 $\delta\theta \geq \delta\theta_{\text{CRB}} = 1/\sqrt{F(\theta)}$, 其中相位估计精度的下限——Cramér-Rao 界 (CRB) 由经典 Fisher 信息 $F(\theta)$ 度量^[2-5], 它依赖于具体测量方案和数据处理方式。Pezz 等^[15] 考虑压缩光干涉仪的符合光子计数测量, 发现对于任一相位真值 $\theta \in (-\pi, \pi)$, 经典 Fisher 信息为 $F(\theta) \approx O(\bar{n}^2)$, 表明相位测量精度可以全局饱和 Heisenberg 极限 $\delta\theta_{\text{CRB}} \approx 1/\bar{n}$ 。他们将相位测量精度的提高归因于光路中 N 光子纠缠态的出现, 即 NOON 态^[4-11]。

符合计数测量是基于压缩光干涉仪相位度量的最优测量方案^[15-16], 同时又是一个多光子纠缠态制备方案。2007 年, Hofmann 等^[17] 指出符合光子计数测量可导致相干光-压缩真空光坍塌到一个 N 光子态, 它与理想 NOON 态的保真度大于 92%。2010 年, Afek 等^[10] 成功地演示了两光子和三光子符合计数实验, 发现探测信号的对比如均超过 90%, 为后续发展基于纠缠的量子多光子显微提供了良好的实验平台和技术支撑。2013 年, Ono 等^[12] 首次实现了量子纠缠增益的显微成像, 他们利用两光子 NOON 态作为差分显微镜的入射光, 发现成像品质比经典光照情况提高了 1.35 倍。2014 年, Israel 等^[13] 利用两光子和三光子纠缠光演示超灵敏度显微成像, 实现成像品质比相干光照射提高 \sqrt{N} 倍, 其中入射光子数目 N 为 2 或 3。很显然, 更高的品质因子需要大 N 纠缠光源。目前 Afek 等^[10] 成功地演示了五光子探测信号, 但对比度仅为 42%。2013 年, Xiang 等^[18] 演示了六光子双数态的符合计数实验, 发现输出信号的对比如可达到 94%。此外, 对于所谓的单条纹测量方案, 任一 N 光子双数态的 Fisher 信息

收稿日期: 2022-08-03; 修回日期: 2022-09-05; 录用日期: 2022-09-13; 网络首发日期: 2022-09-23

基金项目: 国家自然科学基金(12075209)、浙理理工大学科学基金(18062145-Y)

通信作者: *grjin@zstu.edu.cn

大于 N 光子纠缠态,该成果表明进一步研究基于六光子双数态的量子显微成像的重要性。

本文提出了基于双数态 $|n\rangle_{\text{H}} \otimes |n\rangle_{\text{V}}$ 的量子显微成像(下角标 H 和 V 为光场的横向和纵向偏振模式),该态最早由 Holland 等^[19]提出,成像品质的增益因子可达 $\eta = \delta\theta_{\text{SQL}}/\delta\theta_{\text{CRB}} = \sqrt{(N+2)/2}$,其中 $N=2n$ 为双数态光子数目。与文献[12-13]类似,采用两输出光子计数测量方案,先证明多次测量后相位分布函数接近于一个高斯分布,最大似然估计量是渐近无偏的,能够饱和和相位估计精度的下限——CRB。其次,以六光子双数态为例,数值演示单组和两组两输出测量方案,给出特定光子探测事件的测值概率、相位分布函数和最大似然估计量。与单组两输出测量方案比较,发现有无偏置相位的两组两输出测量方案可以避免暗点处相位灵敏度的发散,从而克服显微图像的散斑问题。与单光子图像比较,两组两输出测量方案的图像品质因子接近于六光子双数态增益因子 $\eta = 2$ 。

2 双数态的两输出光子计数

如图 1 所示,具体考虑偏振干涉仪,任一双模数态标记为 $|n_1\rangle_{\text{H}} \otimes |n_2\rangle_{\text{V}}$ 。定义偏振光的斯托克斯矢量,

如 $J_z = (n_{\text{H}} - n_{\text{V}})/2$ 由横向和纵向偏振模式编码, $n_l = a_l^\dagger a_l$ 为 l 模式光子数算符。相应地, J_x 由对角(D)和反对角(A)偏振模式编码, J_y 由左旋(L)和右旋(R)偏振模式编码,分别定义为

$$\begin{cases} J_x = \frac{a_{\text{H}}^\dagger a_{\text{V}} + a_{\text{V}}^\dagger a_{\text{H}}}{2} = \frac{n_{\text{D}} - n_{\text{A}}}{2} \\ J_y = \frac{a_{\text{H}}^\dagger a_{\text{V}} - a_{\text{V}}^\dagger a_{\text{H}}}{2i} = \frac{n_{\text{L}} - n_{\text{R}}}{2} \end{cases} \quad (1)$$

光场偏振态可用 J_z 算符的本征态展开,定义为 $|j, m\rangle = |n\rangle_{\text{H}} \otimes |n\rangle_{\text{V}}$,其中 $j = (n_1 + n_2)/2 = N/2$ 为总角动量数, $m = (n_1 - n_2)/2$ 为赝自旋磁量子数。当 $n_1 = n_2 = n$ 时,双数态可简写为 $|n\rangle_{\text{H}} \otimes |n\rangle_{\text{V}} = |j, 0\rangle$ ^[19-20]。类似地,单光子态 $|1\rangle_{\text{H}} \otimes |0\rangle_{\text{V}}$ 和 $|0\rangle_{\text{H}} \otimes |1\rangle_{\text{V}}$ 也可以写成角动量态 $|j = 1/2, m = \pm 1/2\rangle$ 。如图 1 所示,干涉仪初态通过第一个偏振分束器(PBS)后,聚焦在双折射样品上,然后在第二个 PBS 上进行 N 光子探测,并通过计算机进行数据处理。偏振干涉仪由 PBS[由幺正变换 $\exp(-i\pi J_y/2)$ 描述]、相位积累[$\exp(i\theta J_z)$]、末端 PBS[$\exp(i\pi J_y/2)$]和两个 N 光子探测器构成,前三个操作又可以用一个幺正变换[$\exp(-i\theta J_x)$]描述,即

$$U(\theta) = \exp(i\pi J_y/2) \exp(i\theta J_z) \exp(-i\pi J_y/2) = \exp(-i\theta J_x) = \exp(i\pi J_z/2) \exp(-i\theta J_y) \exp(-i\pi J_z/2) \quad (2)$$

针对末态 $U(\theta)|j, 0\rangle$ 进行光强差测量,测量结果 m 的概率为

$$P_m(\theta) = \left| \langle j, m | U(\theta) | j, 0 \rangle \right|^2 = \left| \langle j, m | \exp(-i\theta J_x) | j, 0 \rangle \right|^2 \quad (3)$$

其中 $m = -j, -j+1, \dots, j$, 共有 $N+1$ 个可能取值。

例如,对于六光子双数态和单光子态,测值概率分别为

$$\begin{cases} P_0(\theta) = \left[\frac{3 \cos \theta + 5 \cos(3\theta)}{8} \right]^2 \\ p_{V2}(\theta) = \cos^2(\theta/2) \end{cases} \quad (4)$$

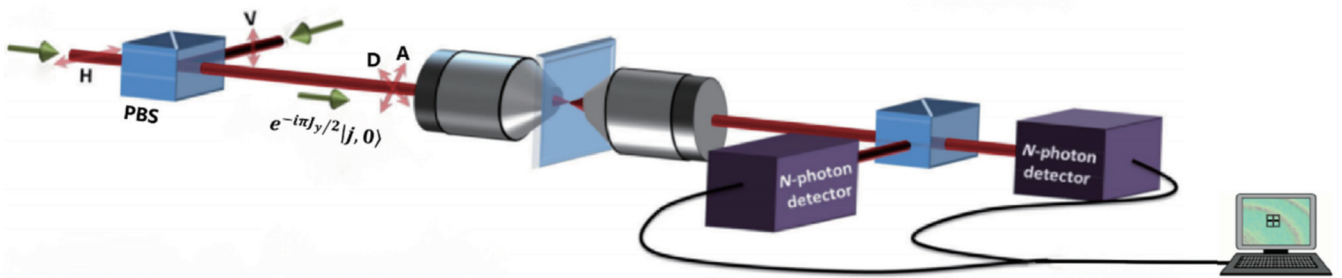


图 1 基于偏振光干涉仪的显微成像^[13]

Fig. 1 Microscopy based on polarized light interferometer^[13]

在图 2(a)、(b)中,实线代表拟合后的测值概率,虚线代表理想的测值概率。图 2(c)、(d)中插图为真值附近的放大图。对于六光子双数态,发现 $P_0(\theta)$ 在特定相位处为 0,如 $\theta_{\text{D}} = \arctan(\sqrt{2/3})$ 处,此处称为暗点或盲点。对于单光子态,暗点在 $\theta_{\text{D}} = \pi$ 处。

根据量子度量学的一般理论,相位测量精度遵从

CRB^[2-5],即

$$\Delta\theta \geq \Delta\theta_{\text{CRB}} = \frac{1}{\sqrt{NF(\theta)}}, \quad (5)$$

其中经典 Fisher 信息 $F(\theta)$ 可表示为

$$F(\theta) = \sum_m \frac{1}{P_m(\theta)} \left[\frac{\partial P_m(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 \quad (6)$$

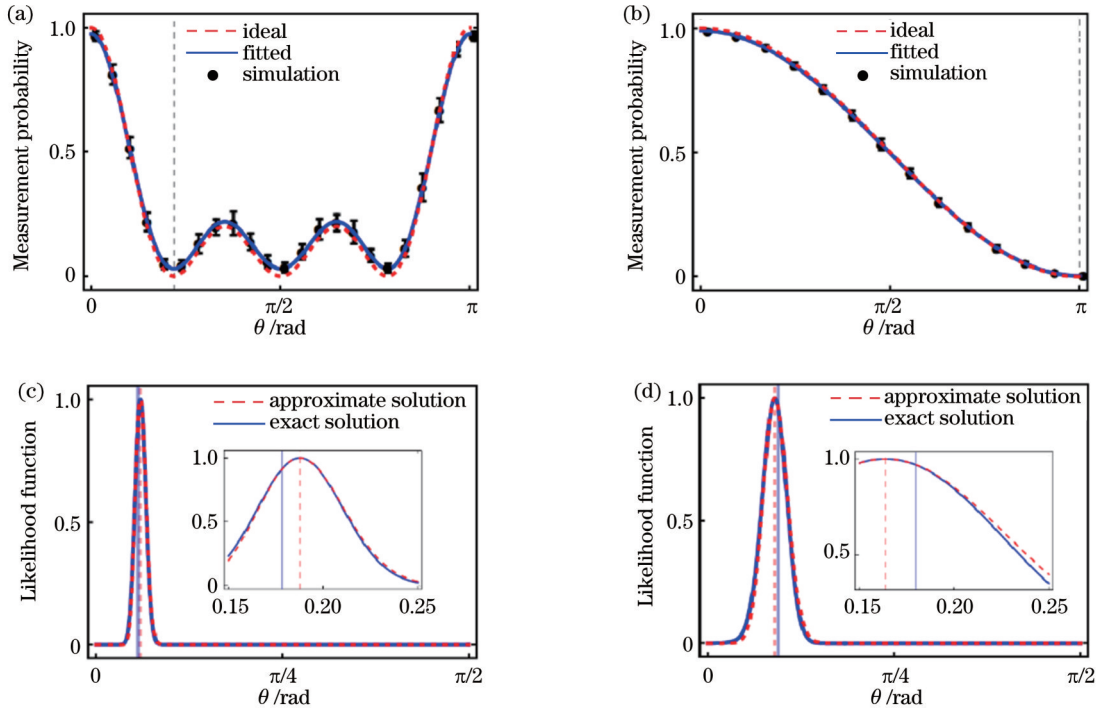


图 2 两输出测量下的测值概率和似然函数。(a)六光子双数态的测值概率;(b)单光子态的测值概率;(c)六光子双数态的似然函数;(d)单光子态的似然函数

Fig. 2 Measurement probability and likelihood function of binary-outcome measurement. (a) Measurement probability of six-photon twin-Fock state; (b) measurement probability of single-photon state; (c) likelihood function of six-photon twin-Fock state; (d) likelihood function of single-photon state

对于双数态 $|n\rangle_{\text{H}} \otimes |n\rangle_{\text{V}} = |j, 0\rangle$, 由式(3)可知, $P_m(\theta)$ 的一阶导数为

$$\frac{\partial P_m(\theta)}{\partial \theta} = 2\sqrt{P_m(\theta)} \langle j, m | (-iJ_y) \exp(-i\theta J_y) | j, 0 \rangle, \quad (7)$$

将 $P_m(\theta)$ 和 $\partial P_m(\theta)/\partial \theta$ 代入式(6)中可得经典 Fisher 信息为

$$F(\theta) = 4 \langle j, 0 | J_y^2 | j, 0 \rangle = \frac{1}{2} N(N+2). \quad (8)$$

为了方便起见,定义有效的单次测量相位灵敏度 $\delta\theta_{\text{CRB}} \equiv \sqrt{N} \Delta\theta_{\text{CRB}} = 1/\sqrt{F(\theta)}$ 。由式(8)可知,在双数态情况下, Fisher 信息与相位无关,故可以实现在一个完整相位区间中的全局相位估计^[17]。此时,估计精度可达到 Heisenberg 极限 $\delta\theta_{\text{CRB}} = \sqrt{2}/\sqrt{N(N+2)} \approx \sqrt{2}/N$, 它与标准量子极限 $\delta\theta_{\text{SQL}} = 1/\sqrt{N}$ 之比可定义双数态相位灵敏度的增强因子,即

$$\eta = \frac{\delta\theta_{\text{SQL}}}{\delta\theta_{\text{CRB}}} = \sqrt{\frac{N+2}{2}}, \quad (9)$$

对于六光子双数态 ($N=6$), 增益因子的理想结果为 $\eta=2$ 。

相位灵敏度的增强因子随 N 的增大而增大,但目前实验中仅实现了少光子双数态。2013年, Xiang 等^[18]针对六光子双数态提出了一个所谓的单条纹检

测,这种测量方案将探测事件 $n_1 = n_2 = n(m=0)$ 标记为测量结果“+”,其他探测事件记作“-”,这实际上就是两输出测量,最早是由 Sun 等^[21]提出的。由式(3)可得结果“+”的测值概率为 $P_+(\theta) = P_0(\theta)$, 故 $P_-(\theta) = 1 - P_0(\theta)$ 。若单光子态为干涉仪的输入态,将 $n_1 = 1$ 和 $n_2 = 0$ 探测事件视为测量结果“+”,将探测事件 $n_1 = 0$ 和 $n_2 = 1$ 视为测量结果“-”,相应的测值概率为 $P_+(\theta) = P_{1/2}(\theta)$ 和 $P_-(\theta) = P_{-1/2}(\theta) = 1 - P_{1/2}(\theta)$ 。对于两输出测量,相位测量精度依然用 Fisher 信息度量,即

$$\begin{cases} \tilde{F}(\theta) = \sum_{k=\pm} f_k(\theta) = \frac{[P'_+(\theta)]^2}{P_+(\theta)P_-(\theta)}, \\ f_k(\theta) = \frac{[P'_k(\theta)]^2}{P_k(\theta)} \end{cases}, \quad (10)$$

式中: $P'_k(\theta) = \partial P_k(\theta)/\partial \theta$ 。将测量结果“+”的测值概率代入 $\tilde{F}(\theta)$, 得到任意两输出测量方案的 CRB $\delta\theta = 1/\sqrt{\tilde{F}(\theta)}$, 通常依赖于具体相位 θ 。针对六光子双数态,两输出测量的相位灵敏度如图 3(a)中虚线所示,最优相位灵敏度在 $\theta=0$ 处出现, Fisher 信息的最大值为 $F(0) = 20$, 相当于在式(8)中取 $N=6$ 。在单光子态情况下, $\tilde{F}(\theta) = 1$, 与具体 θ 值无关。

作为最简单的情况,两输出测量方案在量子信息

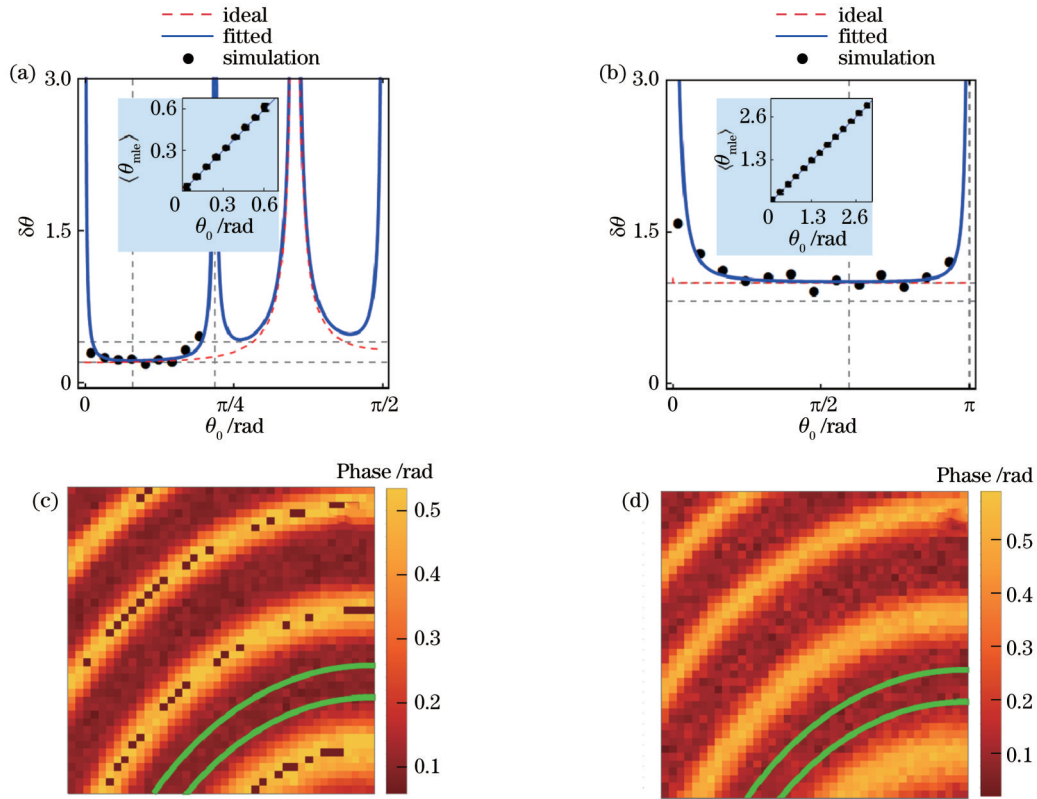


图 3 两输出测量方案的相位灵敏度和重构的显微图像。(a)六光子双数态的相位灵敏度;(b)单光子态的相位灵敏度;(c)六光子双数态的最大似然估计量重构出的显微图像;(d)单光子态的最大似然估计量重构出的显微图像

Fig. 3 Phase sensitivity and reconstructed microscopy image of binary-outcome measurement. (a) Phase sensitivity of six-photon twin-Fock state; (b) phase sensitivity of single-photon state; (c) microscopy image reconstructed by maximum-likelihood estimator of six-photon twin-Fock state; (d) microscopy image reconstructed by maximum-likelihood estimator of single-photon state

和量子计量学领域中被广泛应用,如两输出光子计数测量^[12-13, 20-25]和宇称测量^[26-31]等。对于任一两输出测量方案,在特定相移 θ 处进行多次独立测量,并统计测量结果“ \pm ”的出现次数 \mathcal{N}_{\pm} ,其中总测量次数为 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{+} + \mathcal{N}_{-}$ 。测值概率随 θ 的变化可由干涉仪校准过程测得,即对于任意相位 $\theta \in (-\pi, \pi)$,统计每一测量结果出现的频率 $\mathcal{N}_{\pm}/\mathcal{N}$ 。干涉仪校准之后,对于某一特定相位真值 θ_0 的估计,可由反函数估计量度量,即

$$\theta_{+} = P_{+}^{-1}(\mathcal{N}_{+}/\mathcal{N}), \quad (11)$$

式中: $P_{+}^{-1}(\cdot)$ 为 $P_{+}(\cdot)$ 的反函数。同理可求另一个测量结果的反函数估计量 $\theta_{-} = P_{-}^{-1}(\mathcal{N}_{-}/\mathcal{N})$ 。在两输出测量方案中,可以证明反函数估计量为 $\theta_{+} \approx \theta_{-} \approx \theta_0$,且等价于最大似然估计量。根据概率统计相关理论,两输出测量方案的似然函数遵从二项分布

$$\mathcal{L}(\theta) \propto [P_{+}(\theta)]^{\mathcal{N}_{+}} [P_{-}(\theta)]^{\mathcal{N}_{-}}, \quad (12)$$

当 $\mathcal{N}_{\pm} \sim O(\mathcal{N}) \gg 1$ 时,二项分布近似为一个高斯分布

$$\mathcal{L}(\theta) \propto \exp\left(-\frac{[\mathcal{N}_{+} - \mathcal{N}P_{+}(\theta)]^2}{2(\Delta\mathcal{N}_{+})^2}\right) = \exp[-\mathcal{N}B(\theta)], \quad (13)$$

式中: $(\Delta\mathcal{N}_{+})^2 = \mathcal{N}P_{+}(\theta)P_{-}(\theta)$ 可以标记二项分布的

方差。此外,引入

$$B(\theta) = \frac{[\mathcal{N}_{+}/\mathcal{N} - P_{+}(\theta)]^2}{2P_{+}(\theta)P_{-}(\theta)} = \sum_{k=\pm} \frac{[\mathcal{N}_k/\mathcal{N} - P_k(\theta)]^2}{2P_k(\theta)}, \quad (14)$$

将 $P_k(\theta)$ 在 $\theta = \theta_k$ 处进行泰勒展开,对于每一个测量结果 k ($k = \pm$),得

$$P_k(\theta) \approx P_k(\theta_k) + \left. \frac{\partial P_k(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta_k} (\theta - \theta_k), \quad (15)$$

式中: θ_k 为相位真值 θ_0 附近方程 $P_k(\theta) = \mathcal{N}_k/\mathcal{N}$ 的单根。因此,可得到

$$B(\theta) \approx \sum_{k=\pm} \frac{f_k(\theta_k)}{2} (\theta - \theta_k)^2, \quad (16)$$

式中: $f_k(\theta)$ 为测量结果 k ($k = \pm$)对经典Fisher信息的贡献,由式(10)定义。将式(16)代入式(13)中可得

$$\mathcal{L}(\theta) \propto \exp\left[-\frac{(\theta - \theta_{\text{mle}})^2}{2(\sigma_{\text{mle}})^2}\right], \quad (17)$$

式中:

$$\sigma_{\text{mle}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N} \sum_{k=\pm} f_k(\theta_k)}}, \quad (18)$$

$$\begin{cases} \theta_{\text{mle}} = \sum_{k=\pm} c_k(\theta_k) \theta_k \\ c_k(\theta) = (\sqrt{\mathcal{N}} \sigma_{\text{mle}})^2 f_k(\theta) \end{cases} \quad (19)$$

上述解析结果[式(10)~(19)]并不依赖于具体的干涉仪模型和干涉仪初态,适用于任意两输出测量方案,对于多输出测量方案也同样适用^[32-33]。当 $\mathcal{N} \gg 1$ 时,似然函数可近似为一个高斯分布,通过其峰值位置所对应的相位可确定最大似然估计量。式(19)表明最大似然估计量可表示为反函数估计量的线性组合,组合系数正比于各自测量结果对 Fisher 信息的贡献 $f_k(\theta)$,最大似然估计量的性能指标可由 68.3% 置信区间 σ_{mle} 度量^[15-16]。注意到,反函数估计量为 $\theta_+ \approx \theta_- \approx \theta_0$,因此有 $\sum_{k=\pm} f_k(\theta_k) \approx \tilde{F}(\theta_0)$ 和 $\sigma_{\text{mle}} \approx 1/\sqrt{\mathcal{N}\tilde{F}(\theta_0)}$,表明 θ_{mle} 的涨落可渐近饱和两输出测量的 CRB。下一章具体考虑六光子双数态,用最大似然估计量的严格解 θ_{mle} [式(12)峰值所对应的相位]重构样品的二维相位分布,如图 3(c)、(d)所示。

3 基于两输出测量的显微成像

3.1 实验不完美分析

Xiang 等^[18]基于六光子双数态实验测量了 $P_+(\theta)$ 随相位的变化曲线,发现对比度可达 94%。考虑到探测效率^[34]、光子损耗^[35]、噪声等因素会导致实验不完美,最大 Fisher 信息为 $F(\theta_{\text{min}}) \approx 20$,小于理想结果 $F(0) = 24$,且最优工作点 $\theta_{\text{min}} \neq 0$ 。为了唯象地考虑实验不完美,进行替换^[25],得到修正后的测值概率为

$$P_+^{\text{im}}(\theta) = AP_+(\theta) + B, \quad (20)$$

式中: $P_+(\theta)$ 为理想情况下测值概率; A 和 B 为与相位无关的参数,与输出信号的可见度有关。为了方便起见,用记号 $\kappa = \{A, B\}$ 标记:对于六光子双数态,取 $\kappa = \{0.9450, 0.0315\}$;对于单光子态,取 $\kappa = \{0.9880, 0.0396\}$ 。上述方法可以很好模拟 Xiang 等^[18]的实验,尤其是同样可实现 94% 的对比度。更加精准的方法说明可见文献^[36]。

由于没有实验数据,利用 $P_+^{\text{im}}(\theta)$ 模拟两输出测量方案,这相当于实际实验中的干涉仪校准过程^[12, 14],具体步骤:1)在每个给定的 $\theta \in (-\pi, \pi)$ 产生 \mathcal{N} 个随机数字 $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\mathcal{N}}\}$,若 $\xi_i (i = 1, 2, \dots, \mathcal{N})$ 满足 $0 \leq \xi_i \leq P_+^{\text{im}}(\theta)$,则可视为测量结果为“+”,从而可以得到出现次数 \mathcal{N}_+ 和频率 $\mathcal{N}_+/\mathcal{N}$,同样可以很容易得到测量结果为“-”的次数,即 $\mathcal{N}_- = \mathcal{N} - \mathcal{N}_+$;2)针对给定的 θ ,重复上述过程 M 次,得到测量结果“+”的出现频率的平均值和标准差,为方便起见,令全文中平均值的记号为 $\langle x \rangle = \sum_i x_i/M$;3)将出现频率的平均值随 θ 的变化拟合成一个函数 $P_+^{\text{fit}}(\theta)$,为方便起见,取拟合函数为 $P_+^{\text{fit}}(\theta) = aP_+(\theta) + b$,其中拟合参数记为 $\tilde{\kappa} = \{a, b\}$ 。

在图 2(a)、(b)中,针对每一个给定的相位 θ ,取六光子双数态的总测量次数为 $\mathcal{N} = 100$,单光子态的总测量次数为 $\mathcal{N} = 600$,统计测量结果“+”出现的频率为 $\mathcal{N}_+/\mathcal{N}$ 。相应的重复次数 M 分别为 60 和 360,得到测量结果“+”出现的频率为 $\{\mathcal{N}_+^{(1)}/\mathcal{N}, \mathcal{N}_+^{(2)}/\mathcal{N}, \dots, \mathcal{N}_+^{(M)}/\mathcal{N}\}$,由此得到出现频率的平均值 $\langle \mathcal{N}_+/\mathcal{N} \rangle$ 和标准差。最后,将出现频率平均值随 θ 的变化拟合成 $P_+^{\text{fit}}(\theta)$,其中双数态时 $\tilde{\kappa} = \{0.945, 0.030\}$,单光子态时 $\tilde{\kappa} = \{0.987, 0.004\}$,如图 2(a)、(b)中实线所示。

干涉仪校准结束后,进一步模拟相位度量实验。对于六光子双数态,严格数值解表明似然函数在一个完整相位区间内可呈现多峰结构,无法选取唯一的最大似然估计量,该现象也被称为相位模糊性^[37-39]。最近的工作表明^[20],将 N 光子双数态和单光子态分别注入干涉仪中,可得到总相位分布函数的单峰结构,从而消除相位模糊性。

假定相位真值处于 $\theta_0 \in (0, \theta_D)$,对于六光子双数态,暗点为 $\theta_D = \arctan(\sqrt{2/3}) \approx 0.68$,对于单光子态,暗点为 $\theta_D = \pi$ 。上述做法相当于在上述相位区间里选取一个平坦的先验概率^[14],即将式(12)中似然函数改写为 $\mathcal{L}(\theta) \propto p_0(\theta) [P_+(\theta)]^{\mathcal{N}_+} [P_-(\theta)]^{\mathcal{N}_-}$,其中当 $\theta \in (0, \theta_D)$ 时,先验概率为 $p_0(\theta) = 1$ 。新的似然函数仅有一个峰,故可以唯一地确定最大似然估计量。对于每一个给定的相位真值 θ_0 ,数值生成 \mathcal{N} 个随机数,并统计出测量结果“+”出现的次数,即 $\mathcal{N}_+ = \mathcal{N}_+(\theta_0)$ 。将 \mathcal{N}_+ 和 $P_+^{\text{fit}}(\theta)$ 代入式(12)和式(15)中,得到似然函数的严格解和近似解,以及最大似然估计量 θ_{mle} 。上述过程构成单次相位度量过程^[15]。在图 2(c)、(d)中,取固定的相位真值为 $\theta_0 = 0.17$,如竖实线所示。根据测值概率得到 100 个随机数,并统计测量结果“+”出现的次数,将测量次数代入式(12)和式(13)中可分别得到似然函数的严格解和近似解,如图 2(c)和图 2(d)中的实线和虚线所示。对于足够大的 \mathcal{N} ,可以发现二者几乎重合并且趋向于一个高斯分布,如式(17)所示。重复上述操作,得到 M 个估计量 $\theta_{\text{mle}} = \{\theta_{\text{mle}}^{(1)}, \theta_{\text{mle}}^{(2)}, \dots, \theta_{\text{mle}}^{(M)}\}$,估计量的品质由均方根误差度量,即

$$\sigma = \sqrt{\langle (\theta_{\text{mle}} - \theta_0)^2 \rangle} = \sqrt{\text{Var}(\theta_{\text{mle}}) + (\langle \theta_{\text{mle}} \rangle - \theta_0)^2}, \quad (21)$$

式中: $\text{Var}(\theta_{\text{mle}}) = \langle \theta_{\text{mle}}^2 \rangle - \langle \theta_{\text{mle}} \rangle^2$ 。单次测量的均方根误差 $\sqrt{\mathcal{N}} \sigma$ 理应与两输出测量方案的理论结果 $\delta\theta = 1/\sqrt{\tilde{F}(\theta)}$ 吻合。

将 $P_+^{\text{fit}}(\theta)$ 代入 $\tilde{F}(\theta)$,得到两输出测量的相位灵敏度为 $1/\sqrt{\tilde{F}(\theta)}$,如图 3(a)、(b)中实线所示。与虚线所示的理想结果不同,实验不完美导致相位灵敏度在

$\theta=0$ 、图3(a)中右侧竖线所示的 $\theta=\theta_D$ 等处发散,这是因为在 $P_{\pm}^{\text{fit}}(\theta)$ 极值点处 $\tilde{F}(\theta)=0$,无法提取任何相位信息。数值计算还表明,对于六光子双数态,最优工作点出现在图3(a)中左边竖线所示的 $\theta_{\min}=0.25\text{ rad}\approx 15^\circ$ 处,Fisher信息最大值为 $\tilde{F}(\theta_{\min})\approx 20$,最优相位灵敏度为 $\delta\theta_{\min}=1/\sqrt{\tilde{F}(\theta_{\min})}\approx 0.224$,与Xiang等^[18]结果一致。由此可得,量子增益因子为 $\tilde{\eta}=1/(\sqrt{N}\delta\theta_{\min})\approx 1.82$,略低于六光子双数态的理想结果 $\eta=2$ 。对于单光子态,最优工作点为图3(b)中左侧竖线所示的 $\theta_{\min}=1.839\text{ rad}\approx \pi/2$,最优相位灵敏度为 $\delta\theta_{\min}=1.024$,略大于理想结果1。

图3(a)、(b)中,对于每一个相位真值 $\theta_0\in(0,\theta_D)$,数值计算有效的单次测量误差为 $\sqrt{N}\sigma$,如图中的实心圆所示,其中 σ 由式(21)定义。对于足够大的 N ,可以发现实心圆与两输出测量方案的理论结果吻合,即 $\sqrt{N}\sigma\approx 1/\sqrt{\tilde{F}(\theta)}$,表明最大似然估计量能够渐近饱和和两输出测量方案的相位估计下限——CRB,如图3(a)、(b)中的水平线所示。图3(a)、(b)中插图给出了估计量平均值 $\langle\theta_{\text{mle}}\rangle$ 与相位真值 θ_0 的关系,发现二者近乎相等,表明两输出测量方案的最大似然估计量是无偏的。在图3(c)、(d)中,采用最大似然估计量重构样品的二维相位分布。在图3中,对于六光子双数态,随机数个数取为 $N=200$,对于单光子态,随机数个数取为 $N=1200$ 。

3.2 基于单组两输出测量的显微成像

类似于Israel等^[13]在光路中选取一个合适的偏置相位 φ ,使得总相位 $\theta=\varphi+\phi(x,y)$ 在图3(c)、(d)所示的实线所围区域处于最优工作点 θ_{\min} ,其中样品的实际相位分布取为

$$\phi(x,y)=0.1+0.437\cos^6[2(x-\pi/2)^2+y^2]。 (22)$$

重构过程:1)在每一确定空间点 (x,y) 或像素点 (i,j) 处进行 N 次两输出测量并且记录测量结果“+”的出现次数 $\mathcal{N}_+(i,j)$,将 \mathcal{N}_+ 和 $P_{\pm}^{\text{fit}}(\theta)$ 代入式(12)所示的二项分布 $\mathcal{L}(\theta)$ 中,数值计算二项分布最大值所对应的相位,即最大似然估计量 $\theta_{\text{mle}}(i,j)$;2)扣除偏置相位,用估计量 $\phi_{\text{mle}}(i,j)=\theta_{\text{mle}}(i,j)-\varphi$ 重构样品相位分布,图3(c)、(d)对应于六光子双数态和单光子态重构的二维图像,其中像素点个数取为 $N_{\text{plex}}=N_xN_y=1600$,偏置相位分别取为 $\varphi=0.15$ 和 $\varphi=1.47$,使得实线所围区域内最大似然估计量处于最优相位工作点。

根据Israel等^[13]研究成果,成像品质由局域区域估计量的标准差度量,记为 $L_{\text{SD}|\phi}$ 。类似地,取六光子双数态的随机数个数为 $N=200$,单光子态的随机数个数为 $N=1200$,使得透过每一个像素点的光子总数目相同。通过数值计算图3(c)、(d)中实线所围区域内

最大似然估计量的标准差,得到单光子态的 $L_{\text{SD}|\phi}$ 为0.031,六光子双数态的 $L_{\text{SD}|\phi}$ 为0.016,二者之比为 $L_{\text{SD}|\phi}/L_{\text{SD}|\phi}=1.93$,与图3(a)、(b)中实线显示出来的量子增益因子 $\tilde{\eta}\approx 1.82$ 吻合,接近于理想的六光子双数态增益因子 $\eta=2$ 。从图3(c)还可以看出,六光子双数态情况下的图像中出现了散斑,这是因为特定 (i,j) 处透过样品的相位 $\theta=\varphi+\phi(i,j)$ 接近于暗点 $\theta_D=\arctan(\sqrt{2/3})\approx 0.68$,该处 $\tilde{F}(\theta_D)\approx 0$,相位灵敏度发散。

3.3 两组两输出测量

为了克服散斑,考虑了有无偏置相位情况下两组两输出测量方案,并将所有测量结果组合起来得到最大似然估计量,用于重构二维显微图像 $\phi_{\text{mle}}(i,j)$ 。在第一组测量过程中,光路中并无偏置相位,对于每一个相移 ϕ 进行两输出光子计数测量,测量次数为 $\mathcal{N}^{(1)}=\mathcal{N}_+^{(1)}+\mathcal{N}_-^{(1)}$,其中 $\mathcal{N}_{\pm}^{(1)}$ 对应于测量结果“±”出现的次数。在第二组测量过程中,光路中设置一个合适的偏置相位 φ ,类似于Israel等^[13]的做法,并对每个相移 ϕ 进行两输出测量,测量次数为 $\mathcal{N}^{(2)}=\mathcal{N}_+^{(2)}+\mathcal{N}_-^{(2)}$ 。上述两组两输出测量的总测量次数为 $\mathcal{N}=\mathcal{N}^{(1)}+\mathcal{N}^{(2)}$ 。针对六光子双数态,图4(a)给出了两组两输出情况下的测值概率,其中偏置相位取为 $\varphi=-0.3\theta_D\approx -0.204\text{ rad}$,暗点为 $\theta_D=\arctan(\sqrt{2/3})\approx 0.68$ 。

对于两组两输出测量方案,似然函数^[25]为

$$\tilde{\mathcal{L}}(\phi)\propto [P_+^{(1)}]^{\mathcal{N}_+^{(1)}} [P_-^{(1)}]^{\mathcal{N}_-^{(1)}} [P_+^{(2)}]^{\mathcal{N}_+^{(2)}} [P_-^{(2)}]^{\mathcal{N}_-^{(2)}} (23)$$

引进简写记号 $P_k^{(1)}=P_k(\phi)$ 、 $P_k^{(2)}=P_k(\varphi+\phi)$,下角标为 $k=\pm$,相应的测量结果出现次数分别为 $\mathcal{N}_{\pm}^{(1)}$ 和 $\mathcal{N}_{\pm}^{(2)}$ 。类似于式(13),似然函数可写成

$$\tilde{\mathcal{L}}(\phi)\propto \exp\left\{-[\mathcal{N}^{(1)}B^{(1)}+\mathcal{N}^{(2)}B^{(2)}]\right\}, (24)$$

式中:

$$B^{(i)}=\sum_{k=\pm}\frac{[\mathcal{N}_k^{(i)}/\mathcal{N}^{(i)}-P_k^{(i)}]^2}{2P_k^{(i)}}, i=1,2。 (25)$$

图4(b)~(e)给出了不同 N 情况($N=10$ 、 $N=50$ 、 $N=100$ 和 $N=500$)下,似然函数的严格解(实线)和近似解(虚线)随相位的变化曲线,其中实竖线对应于相位真值 $\phi_0=0.159$,虚竖线给出了最大似然估计量。类似于式(15),将测值概率 $P_k^{(1)}$ 和 $P_k^{(2)}$ 在各自反函数估计量 $\phi=\phi_k^{(i)}$ 处展开,即

$$P_k^{(i)}(\phi)\approx P_k^{(i)}[\phi_k^{(i)}]+\frac{\partial P_k^{(i)}}{\partial\phi}\Big|_{\phi_k^{(i)}}[\phi-\phi_k^{(i)}], (26)$$

由此可得

$$B^{(i)}\approx\sum_{k=\pm}\frac{[\partial P_k^{(i)}/\partial\phi]^2}{2P_k^{(i)}}[\phi-\phi_k^{(i)}]^2=$$

$$\sum_{k=\pm} \frac{f_k^{(i)}[\phi_k^{(i)}]}{2} [\phi - \phi_k^{(i)}]^2, \quad (27)$$

式中: $f_k^{(i)}(\phi) = \frac{1}{P_k^{(i)}} [\partial P_k^{(i)} / \partial \phi]^2$ 。将式(27)代入式(24)

中,得到似然函数

$$\tilde{\mathcal{L}}(\phi) \propto \exp \left[-\frac{(\phi - \tilde{\phi}_{\text{mle}})^2}{2\tilde{\sigma}^2} \right], \quad (28)$$

式中:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=\pm} \{ \mathcal{N}^{(1)} f_k^{(1)}[\phi_k^{(1)}] + \mathcal{N}^{(2)} f_k^{(2)}[\phi_k^{(2)}] \}}}, \quad (29)$$

最大似然估计量为

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_{\text{mle}} \approx \frac{1}{2} \sum_{k=\pm} [a_k^{(1)} \phi_k^{(1)} + a_k^{(2)} \phi_k^{(2)}] \\ a_k^{(i)} = \tilde{\sigma}^2 \mathcal{N}^{(i)} f_k^{(i)}[\phi_k^{(i)}] \end{cases}, \quad (30)$$

注意到 $P_k^{(1)} = P_k(\phi)$ 、 $P_k^{(2)} = P_k(\phi + \varphi)$,故去掉上标后 $f_k^{(2)}(\phi) = f_k^{(1)}(\phi + \varphi) = f_k(\phi + \varphi)$ 。此外,注意到 $\phi_k^{(2)} \approx \phi_k^{(1)} + \varphi \approx \phi_k + \varphi$,故可知

$$\tilde{\sigma} \approx \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=\pm} [\mathcal{N}^{(1)} f_k(\phi_k) + \mathcal{N}^{(2)} f_k(\phi_k + \varphi)]}} \approx \frac{1}{\sqrt{F_{\text{tot}}(\phi)}}, \quad (31)$$

式中: $F_{\text{tot}}(\phi)$ 为两组两输出测量方案的总 Fisher 信息, 定义为

$$F_{\text{tot}}(\phi) = \mathcal{N}^{(1)} \bar{F}(\phi) + \mathcal{N}^{(2)} \bar{F}(\phi + \varphi). \quad (32)$$

注意到式(23)~(32)同样不依赖具体的干涉仪模型和干涉仪初态,适用于任意两组两输出测量方案。上述解析结果表明,两组两输出测量方案的似然函数也可以近似为一个高斯分布,并且最大似然估计量可渐近地饱和 CRB,如图 4(f)中水平线所示。

如图 4(b)~(e)所示,随着 \mathcal{N} 的增大,似然函数与相位变化曲线接近于一个高斯分布,与式(28)的理论预期吻合,似然函数严格解(实线)和近似解(虚线)在相位真值 $\phi_0 = 0.159$ 处几乎重合,虚竖线给出最大似然估计量。估计量的性能指标可用式(31)度量,渐近地饱和 CRB。为了与显微成像的品质因子一致,图 4(f)中取估计量的均方根误差,即式(21)。对于每一个给定相位真值 ϕ_0 ,可以发现有效单次测量的误差 $\sqrt{\mathcal{N}} \sigma$ (实心圆)也能够渐近饱和相位估计精度的下限

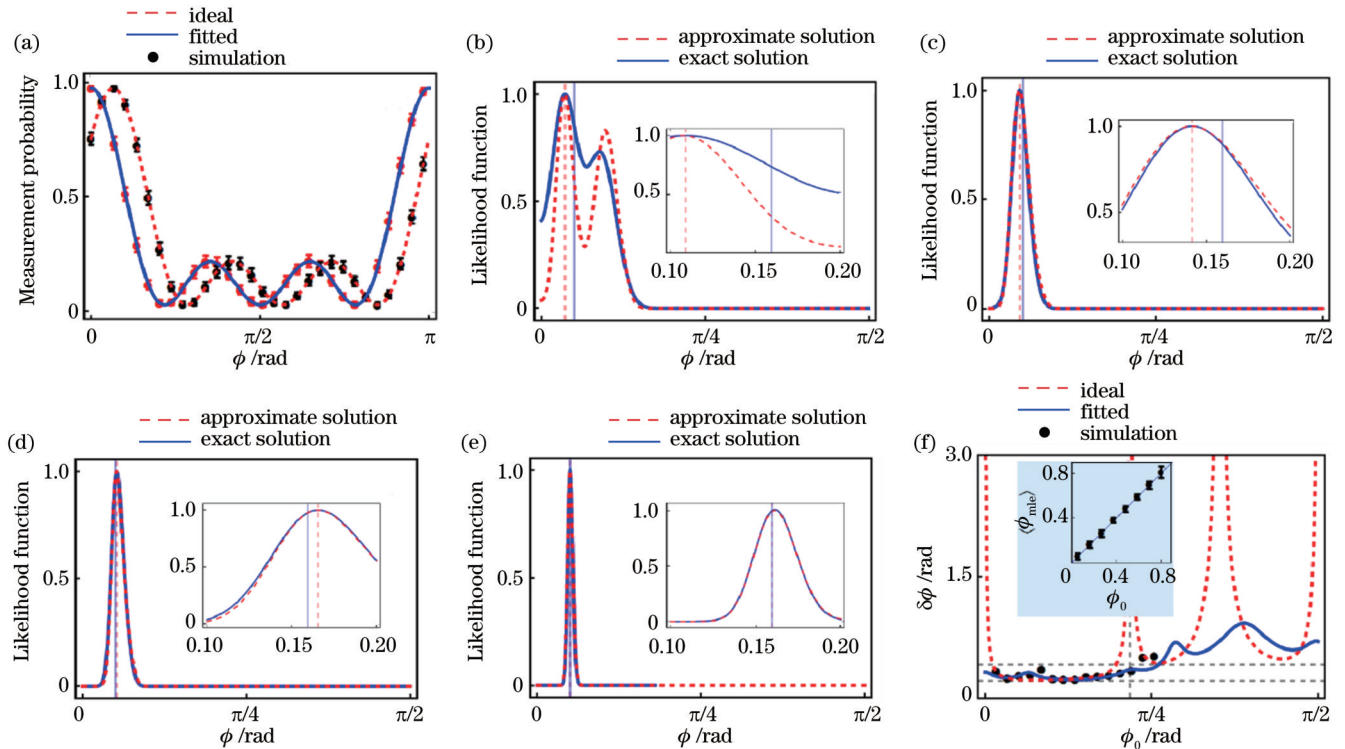


图 4 两组两输出测量方案下的测值概率和似然函数。(a)六光子双数态两组两输出方案有无偏置相位情况的测值概率;(b) $\mathcal{N}=10$ 时的似然函数;(c) $\mathcal{N}=50$ 时的似然函数;(d) $\mathcal{N}=100$ 时的似然函数;(e) $\mathcal{N}=500$ 时的似然函数;(f)两组两输出方案的相位灵敏度随 ϕ_0 的变化

Fig. 4 Measurement probabilities and likelihood functions of two binary-outcome measurement schemes. (a) Measurement probabilities of two binary-outcome measurement schemes for six-photon twin-Fock state with and without offset phase; (b) likelihood function at $\mathcal{N}=10$; (c) likelihood function at $\mathcal{N}=50$; (d) likelihood function at $\mathcal{N}=100$; (e) likelihood function at $\mathcal{N}=500$; (f) phase sensitivity varying with ϕ_0 for two binary-outcome measurement schemes

$\sqrt{\mathcal{N}} / \sqrt{F_{\text{tot}}(\phi)}$ (实线)。与单组两输出测量的相位灵敏度 (虚线) 比较, 发现两组两输出测量的相位灵敏度 $\sqrt{\mathcal{N}} / \sqrt{F_{\text{tot}}(\phi)}$ 在暗点处并不发散。图 4(f) 中的插图给出了估计量平均值 $\langle \phi_{\text{mle}}^{(i)} \rangle$ 与相位真值 ϕ_0 的关系, 发现二者近乎相等, 表明两组两输出测量方案的最大似然估计量是无偏的。图 4(b)~(e) 插图对应于似然函数在相位真值附近的放大图, 图 4(a)、(f) 中随机数个数 $\mathcal{N} = 500$, 重复次数为 $M = 60$ 。

与单组两输出方案类似, 得到两组两输出测量方案的最大似然估计量重构样品相位分布, 如图 5(a)、(b) 所示, 测量次数分别为 $\mathcal{N} = 200$ 和 $\mathcal{N} = 1000$, 可发现散斑已经被消除, 测量次数越大, 图像越接近于样品实际的相位信息。对于两组两输出测量方案, 显微图

像的整体品质可由均方根误差度量, 即

$$E_{\text{RMSE}} = \sqrt{\sum_{i,j} [\tilde{\phi}_{\text{mle}}(i,j) - \phi(i,j)]^2 / N_{\text{plex}}}, \quad (33)$$

式中: $\phi(i,j)$ 为实际样品相位分布, 假定未知。取 $\mathcal{N} = 1000$ 情况的图像代替实际相位分布, 计算图 5(a) 的均方根误差, 并与之前单组两输出测量的局域误差进行比较。具体比较图 5(a) 的均方根误差和图 3(c) 实线区域内的局域误差, 二者采用的随机数个数相同。数值结果表明, 图 5(a) 的均方根误差为 $E_{\text{RMSE}} = 0.019$, 图 3(c) 实线区域内的局域误差为 $L_{\text{SD}[3,3]} = 0.016$ 。二者大小接近, 表明两组两输出方案可以高精度地重构样品的相位信息, 即每一个像素点处的估计量接近于最优相位工作点。

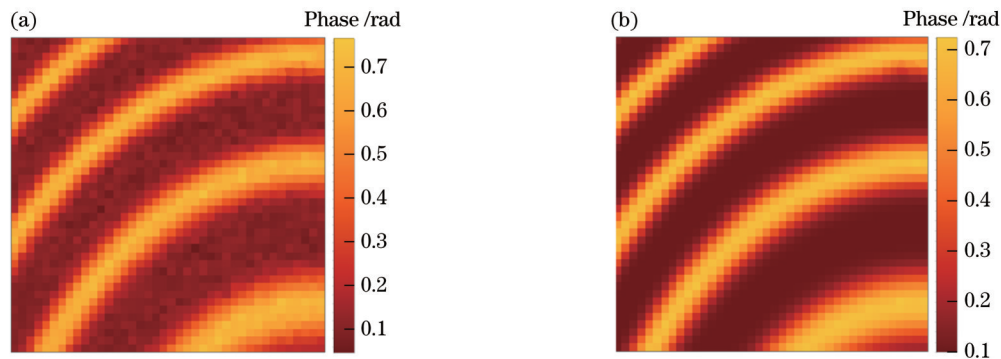


图 5 两组两输出方案的显微图像。(a) $\mathcal{N} = 200$; (b) $\mathcal{N} = 1000$

Fig. 5 Microscopy images of two binary-outcome measurement schemes. (a) $\mathcal{N} = 200$; (b) $\mathcal{N} = 1000$

4 结 论

与具体模型无关, 先解析地证明单组和两组两输出测量方案的似然函数都近似于高斯分布, 最大似然估计量是渐近无偏的, 并且能饱和上述两种测量方案的相位测量下限。基于六光子双数态, 研究了双光子计数测量方案的最大似然估计量及其相位灵敏度, 并用最大似然估计量重构双折射样品的二维显微图像。结果表明, 两组两输出测量方案可以避免暗点处相位灵敏度发散, 从而克服显微图像的散斑问题。重构的图像中每一个像素点处的最大似然估计量接近于最优相位工作点, 图像的整体品质因子由估计量的均方根误差度量。与单光子图像相比, 六光子双数态的增益因子为 $\tilde{\eta} = 1/(\sqrt{\mathcal{N}} \delta\theta_{\text{min}}) \approx 1.82$, 接近于理想的增益因子 $\eta = 2$ 。

参 考 文 献

- [1] Born M, Wolf E. Principles of optics[J]. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 461: 93.
- [2] Helstrom C W. Quantum detection and estimation theory[J]. Journal of Statistical Physics, 1969, 1(2): 231-252.
- [3] Braunstein S L, Caves C M, Milburn G J. Generalized uncertainty relations: theory, examples, and Lorentz invariance [J]. Annals of Physics, 1996, 247(1): 135-173.
- [4] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum-enhanced measurements: beating the standard quantum limit[J]. Science, 2004, 306(5700): 1330-1336.
- [5] Paris M G A. Quantum estimation for quantum technology[J]. International Journal of Quantum Information, 2009, 7(supp01): 125-137.
- [6] Boto A N, Kok P, Abrams D S, et al. Quantum interferometric optical lithography: exploiting entanglement to beat the diffraction limit[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(13): 2733-2736.
- [7] Mitchell M W, Lundeen J S, Steinberg A M. Super-resolving phase measurements with a multiphoton entangled state[J]. Nature, 2004, 429(6988): 161-164.
- [8] Walther P, Pan J W, Aspelmeyer M, et al. De Broglie wavelength of a non-local four-photon state[J]. Nature, 2004, 429(6988): 158-161.
- [9] Chen Y A, Bao X H, Yuan Z S, et al. Heralded generation of an atomic NOON state[J]. Physical Review Letters, 2010, 104(4): 043601.
- [10] Afek I, Ambar O, Silberberg Y. High-NOON states by mixing quantum and classical light[J]. Science, 2010, 328(5980): 879-881.
- [11] Daniel B, Gerardo A, Fabio B, et al. Quantum-enhanced measurements without entanglement[J]. Reviews of Modern Physics, 2018, 90(3): 035006.
- [12] Ono T, Okamoto R, Takeuchi S. An entanglement-enhanced microscope[J]. Nature Communications, 2013, 4: 2426.
- [13] Israel Y, Rosen S, Silberberg Y. Supersensitive polarization microscopy using NOON states of light[J]. Physical Review Letters, 2014, 112(10): 103604.

- [14] Caves C M. Quantum-mechanical noise in an interferometer[J]. *Physical Review D*, 1981, 23(8): 1693.
- [15] Pezzé L, Smerzi A, Khoury G, et al. Phase detection at the quantum limit with multiphoton Mach-Zehnder interferometry [J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(22): 223602.
- [16] Pezzé L, Smerzi A. Mach-Zehnder interferometry at the Heisenberg limit with coherent and squeezed-vacuum light[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(7): 073601.
- [17] Hofmann H F, Ono T. High-photon-number path entanglement in the interference of spontaneously down-converted photon pairs with coherent laser light[J]. *Physical Review A*, 2007, 76(3): 031806.
- [18] Xiang G Y, Hofmann H F, Pryde G J. Optimal multi-photon phase sensing with a single interference fringe[J]. *Scientific Reports*, 2013, 3: 2684.
- [19] Holland M J, Burnett K. Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit[J]. *Physical Review Letters*, 1993, 71(9): 1355-1358.
- [20] 时泽准, 周立坤, 金光日. 双数态光的非相位模糊测量[J]. *光学学报*, 2023, 43(2): 0212006.
Shi Z Z, Zhou L K, Jin G R. Unambiguous phase measurement for twin-Fock states[J]. *Acta Optica Sinica*, 2023, 43(2): 0212006.
- [21] Sun F W, Liu B H, Gong Y X, et al. Experimental demonstration of phase measurement precision beating standard quantum limit by projection measurement[J]. *EPL (Europhysics Letters)*, 2008, 82(2): 024001.
- [22] Schäfermeier C, Ježek M, Madsen L S, et al. Deterministic phase measurements exhibiting super-sensitivity and super-resolution[J]. *Optica*, 2018, 5(1): 60-64.
- [23] Feng X M, Jin G R, Yang W. Quantum interferometry with binary-outcome measurements in the presence of phase diffusion [J]. *Physical Review A*, 2014, 90(1): 013807.
- [24] Luca G, Ilaria S, Paolo B, et al. Quantum metrology at level anticrossing[J]. *Physical Review A*, 2018, 97(1): 012120.
- [25] Jin G R, Yang W, Sun C P. Quantum-enhanced microscopy with binary-outcome photon counting[J]. *Physical Review A*, 2017, 95(1): 013835.
- [26] Bollinger J J, Itano W M, Wineland D J, et al. Optimal frequency measurements with maximally correlated states[J]. *Physical Review A*, 1996, 54(6): R4649-R4652.
- [27] Gerry C C. Heisenberg-limit interferometry with four-wave mixers operating in a nonlinear regime[J]. *Physical Review A*, 2000, 61(4): 043811.
- [28] Gerry C C, Campos R A. Generation of maximally entangled states of a Bose-Einstein condensate and Heisenberg-limited phase resolution[J]. *Physical Review A*, 2003, 68(2): 025602.
- [29] Anisimov P M, Raterman G M, Chiruvelli A, et al. Quantum metrology with two-mode squeezed vacuum: parity detection beats the Heisenberg limit[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(10): 103602.
- [30] Gao Y, Anisimov P M, Wildfeuer C F, et al. Super-resolution at the shot-noise limit with coherent states and photon-number-resolving detectors[J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2010, 27(6): A170-A174.
- [31] Seshadreesan K P, Kim S, Dowling J P, et al. Phase estimation at the quantum Cramér-Rao bound via parity detection[J]. *Physical Review A*, 2013, 87(4): 043833.
- [32] Xu J H, Chen A X, Yang W, et al. Data processing over single-port homodyne detection to realize superresolution and supersensitivity[J]. *Physical Review A*, 2019, 100(6): 063839.
- [33] Zhou L K, Xu J H, Zhang W Z, et al. Linear combination estimator of multiple-outcome detections with discrete measurement outcomes[J]. *Physical Review A*, 2021, 103(4): 043702.
- [34] 袁媛, 钮月萍, 龚尚庆, 等. 集体测量估计量子相干性的性能研究[J]. *光学学报*, 2022, 42(3): 0327014.
Yuan Y, Niu Y P, Gong S Q, et al. Performance of collective measurement to estimate quantum coherence[J]. *Acta Optica Sinica*, 2022, 42(3): 0327014.
- [35] 刘翔钊, 左小杰, 闫智辉, 等. 基于光学参量放大器的量子干涉仪的分析[J]. *光学学报*, 2022, 42(3): 0327013.
Liu Y Z, Zuo X J, Yan Z H, et al. Analysis of quantum interferometer based on optical parametric amplifier[J]. *Acta Optica Sinica*, 2022, 42(3): 0327013.
- [36] Xiang G Y, Higgins B L, Berry D W, et al. Entanglement-enhanced measurement of a completely unknown optical phase [J]. *Nature Photonics*, 2011, 5(1): 43-47.
- [37] Pezzé L, Smerzi A. Sub shot-noise interferometric phase sensitivity with beryllium ions Schrödinger cat states[J]. *EPL (Europhysics Letters)*, 2007, 78(3): 030004.
- [38] Higgins B L, Berry D W, Bartlett S D, et al. Entanglement-free Heisenberg-limited phase estimation[J]. *Nature*, 2007, 450(7168): 393-396.
- [39] Berry D W, Higgins B L, Bartlett S D, et al. How to perform the most accurate possible phase measurements[J]. *Physical Review A*, 2009, 80(5): 052114.

Quantum-Enhancement Microscopy with Six-Photon Twin-Fock State

Ren Xiaoju, Zheng Huili, Shi ZeZhun, Jin GuangRi*

Department of Physics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, Zhejiang, China

Abstract

Objective Quantum multiphoton microscopy utilizes quantum correlation effects of photons to improve the imaging quality of biological samples at low light illumination. Based on a N -photon NOON state, the microscopy imaging has been successfully demonstrated in recent two experiments, which shows the imaging quality better than that of coherent light illumination by a factor of \sqrt{N} ($N=2, 3$). However, the NOON states are difficult to prepare and are easily subject to the loss-induced decoherence. Furthermore, the microscopy imaging shows speckles within a local region, due to the divergence of the phase sensitivity. The twin-Fock states of light are believed to be more robust to the decoherence. For a binary-outcome photon counting measurement, it has been shown that a better phase sensitivity can be obtained in a

comparison with that of the NOON states. Therefore, it is interesting to investigate the super-sensitive microscopy using the N -photon twin-Fock states of light. Recently, it is shown that the visibility of the six-photon count rate can reach 94%, which is significantly better than that of the five-photon NOON state (42%). Here, we investigate quantum-enhanced microscopy illuminated by the twin-Fock state of the light. With a combination of two binary-outcome measurements with and without an offset phase shift, it is shown that the divergence of the phase sensitivity at certain phase shifts can be removed, which avoids the imaging speckles. We hope our observations can be helpful on the quantum-enhancement microscopy with the large- N twin-Fock states.

Methods A binary-outcome photon counting measurement is employed in present work, where the detection event with equal number of photons is a measurement outcome. All the other detection events are treated as another outcome. Starting from general principle of quantum metrology, we first calculate the Fisher information and the Cramer-Rao lower bound (CRB) of the phase sensitivity, which determine the enhancement factor of the imaging quality for the N -photon twin-Fock states. Then, we derive the phase distribution (the likelihood function) and the maximum likelihood estimator (MLE) by considering the binary-outcome measurements. Using Monte Carlo method, we simulate the measurement probabilities of the six-photon twin-Fock state and the single-photon state, where the experimental imperfection is added artificially. The microscopy imaging is reconstructed using numerical result of the MLE. Finally, we derive the likelihood function and show the microscopy imaging for a combination of two binary-outcome measurements with and without an offset phase shift.

Results and Discussions With a large enough repeated binary-outcome photon counting measurement, it is shown that the likelihood function can be well approximated by a Gaussian function [Figs. 2 (c) and 2 (d)], where its peak determines the MLE. To confirm it, we analytically derive the approximate results of the likelihood function and the MLE [Eqs. (12)–(19)], which shows that the MLE can saturate the CRB asymptotically. The above results also hold for a combination of two binary-outcome measurements with and without an offset phase shift [Figs. 4 (b)–(e) and Eqs. (23)–(32)]. For the six-photon twin-Fock state, the divergence of the phase sensitivity at a certain phase shift can be removed by comparing Fig. 3(a) and Fig. 4(f). Therefore, the microscopy imaging with a combination of two binary-outcome measurements can avoid the imaging speckles [Fig. 3 (c) and Fig. 5 (a)]. The overall quality of the imaging in Fig. 5 (a), quantified by the root-mean-square error of the MLE, outperforms that of classical light illumination by a factor of 1.82, approaching to its theoretical prediction.

Conclusions Regardless of the specific model, we first prove analytically that the likelihood functions of single and two groups of binary-outcome photon counting measurements can approximate a Gaussian function, the maximum likelihood estimator is asymptotically unbiased which can saturate the lower limit of phase measurement of the above two measurement schemes. Based on the six-photon twin-Fock state, this paper studies the maximum likelihood estimator and phase sensitivity of the binary-outcome photon counting measurements, and reconstructs the two-dimensional microscopy imaging of the birefringent sample with the MLE. Our results show that a combination of binary-outcome photon counting measurements can avoid the divergence of phase sensitivity at dark spots, thus overcoming the speckle problem of microscopy imaging. The maximum likelihood estimator at each pixel in the reconstructed image is close to the optimal phase working point, and the overall quality factor of the image is measured by the root-mean-square error of the estimator.

Key words quantum optics; quantum metrology; phase sensitivity; twin-Fock states; quantum-enhancement phase microscopy