

## 基于仿射近似投影模型的长焦相机标定方法

孙聪<sup>1\*</sup>, 马艳<sup>1</sup>, 张国龙<sup>1</sup>, 高奕<sup>1</sup>, 于起峰<sup>2</sup><sup>1</sup>西安卫星测控中心宇航动力学国家重点实验室, 陕西 西安 710043;<sup>2</sup>国防科技大学空天科学学院, 湖南 长沙 410073

**摘要** 鉴于透视投影模型在长焦相机标定过程中存在过参数化的问题,采用仿射近似投影模型对长焦相机成像过程进行建模,并提出了基于仿射近似投影模型的长焦相机标定方法。首先,深入分析了仿射投影位姿模糊的形成机制,在此基础上详细推导了仿射近似投影下基于平面模板的长焦相机内外参数解算方法;然后,基于透视投影模型,以重投影点残差平方和最小为目标函数,对内外参数初值进行优化求精;最后,针对仿射投影模型的位姿模糊,在平面标定模板基础上附加微凸圆柱标志。仿真和实际实验结果显示,所提出的长焦相机标定方法有效可行,在实验室环境下重建平面目标的离面中误差优于 0.02 mm。

**关键词** 测量;长焦相机;相机标定;仿射近似投影;位姿模糊

**中图分类号** TP391.4 **文献标志码** A

**DOI:** 10.3788/AOS221367

## 1 引言

长焦相机通常具有较高的空间分辨率,可获取更加丰富的目标细节信息,被广泛用于战时空中侦察、战场毁伤评估、特定区域巡逻监视等军事领域以及工业精密加工、航空摄影测量、变形监测、交通监视等民用领域<sup>[1]</sup>。然而,长焦相机高精度定向和相机参数标定的潜在困难制约了其在实际摄像测量领域中的应用<sup>[2]</sup>。随着焦距增大,长焦成像系统的视场角减小,成像光束不断向光轴靠近,常规透视投影模型的傍轴成像效应愈加明显,由像点、成像模型以及控制点等误差导致的标定误差也将会更加显著<sup>[3]</sup>。

针对常规短焦或中等焦距相机的标定方法已较为成熟且应用广泛<sup>[4]</sup>,但随着成像系统焦距增大,现有常规相机标定方法适用性逐渐降低<sup>[5]</sup>。Percoco 等<sup>[6]</sup>进一步揭示基于传统透视成像模型相机标定方法的成像系统视场角应用下界仅为 10°。透视投影模型的非线性使得诸多测量任务中算法复杂度高、对噪声敏感、数值稳定性差,因而越来越多的学者采用仿射近似投影模型替代透视投影模型。实际上,仿射近似投影模型已被广泛用于摄影测量<sup>[7]</sup>、位姿估计<sup>[8]</sup>、视觉导航<sup>[9]</sup>、三维重建<sup>[10]</sup>等视觉测量领域,并取得了较好的测量效果。

仿射相机的高精度标定是其用于视觉测量的前提和基础,现有仿射相机标定方法主要有基于场景多视图的自标定方法<sup>[11]</sup>、基于主动视觉的标定方法<sup>[12]</sup>以及

基于三维标定物的传统标定方法<sup>[7]</sup>。其中:自标定方法不需要设置合作标志,仅利用多视图间特征点的对应关系以及相对运动即可确定相机参数,操作灵活简便,但精度和鲁棒性均有待于进一步提高;基于主动视觉的方法需要已知相机运动信息,实验条件较为苛刻;基于三维标定物的方法虽然精度较高,但标定物的制作成本也较高。

本文在文献<sup>[13]</sup>设计的圆锥曲线和直线融合特征的基础上,深入分析仿射近似投影模型的成像特性,分别以弱透视、平行透视投影模型替代透视投影模型,描述长焦相机成像过程,进而建立基于仿射近似投影模型的长焦相机标定方法。该方法首先基于仿射近似投影模型计算相机内外参数初值,相较于直接采用透视投影模型的算法,其数值稳定性更强;然后,为最大限度降低仿射投影模型的近似误差,以透视投影模型下的重投影点残差平方和最小为代价函数,对内外参数初值进行优化求精;最后,针对仿射投影模型的位姿模糊问题,在同心半圆弧合作特征基础上巧妙附加微凸圆柱标志以剔除位姿歧义。仿真以及实际实验进一步验证了所提方法的正确性和有效性。

## 2 仿射近似投影模型

通常认为当拍摄物距与目标尺寸之比大于 10 且目标与相机主轴距离较小时,成像透视效应便已足够弱,可采用仿射投影模型代替透视投影模型。仿射相

收稿日期: 2022-06-24; 修回日期: 2022-08-24; 录用日期: 2022-09-13; 网络首发日期: 2022-09-23

基金项目: 国家自然科学基金重大科研仪器研制项目(11727804)

通信作者: \*suncong@whu.edu.cn

机模型最早由 Mundy 和 Zisserman<sup>[14]</sup>提出,相较于透视投影矩阵,仿射投影矩阵为纯线性映射,自由度更小。典型仿射近似投影如图 1 所示,主要包括正射投影、弱透视投影以及平行透视投影。

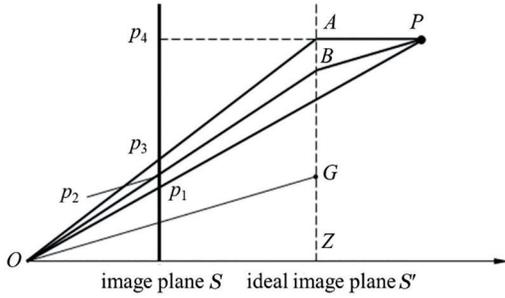


图 1 仿射近似投影模型与透视投影模型示意图

Fig. 1 Schematic of affine approximate projection model and perspective projection model

图 1 中  $O$  为相机光心,  $OZ$  为相机光轴,  $S$  是实际成像平面。假定  $P$  为待测目标上一点, 并令  $G$  表示待测目标质心,  $S'$  为过质心  $G$  且平行于像面  $S$  的假想成像平面。观测易知, 连接光心  $O$  与目标点  $P$  交像面  $S$  于点  $p_1$  即为透视投影点。若由  $P$  点作平行于光轴  $OZ$  直线分别交像面  $S'$ 、 $S$  于点  $A$  和  $p_4$ ,  $p_4$  即为正射投影点, 正射投影不存在比例缩放。连接  $OA$  交像面  $S$  于点  $p_3$  即弱透视投影点。区别于正射投影, 弱透视投影存在缩放, 所以通常弱透视投影也称为比例正交投影。若由  $P$  点作平行于  $OG$  直线交像面  $S'$  于点  $B$ , 连接  $OB$  交像面  $S$  于点  $p_2$ ,  $p_2$  即为平行透视投影点。为简化分析, 假定世界坐标系原点位于目标质心  $G$  点。

### 2.1 弱透视投影模型

弱透视投影又可称为比例正交投影, 当成像物距远大于目标沿光轴方向尺寸时, 可采用目标质心处深度值代替目标深度, 即假定目标点位于一个过其质心且平行于像面的理想平面上。如图 1 所示, 弱透视投影可看作目标整体先正射投影至理想平面上, 再按照透视投影模型投影至成像面上。假定目标质心  $G$  的投影深度为  $D$ , 则弱透视投影矩阵可表示为

$$\mathbf{M}_{\text{weak}} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j & k & t \\ 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中:  $f_x, f_y$  为相机横、纵向的等效焦距;  $(u_0, v_0)$  为像面主点坐标;  $\{R = (i, j, k), t\}$  分别表示相机的姿态旋转矩阵和平移向量。令  $I = i/t_z, J = j/t_z, t = (t_x, t_y, t_z)^T$ , 则  $(x_0, y_0)^T$  ( $x_0 = t_x/t_z, y_0 = t_y/t_z$ ) 表示目标质心的像面坐标, 并定义  $\epsilon = k \cdot P_w/t_z$  表示目标点  $P_w$  到质心  $G$  所在平面距离与质心深度的比值, 则弱透视投影可表示为

$$\begin{cases} x_{\text{weak}} = I \cdot P_w + x_0 \\ y_{\text{weak}} = J \cdot P_w + y_0 \end{cases} \quad (2)$$

而透视投影模型可改写为

$$\begin{cases} x = \frac{I \cdot P_w + x_0}{1 + \epsilon} \\ y = \frac{J \cdot P_w + y_0}{1 + \epsilon} \end{cases} \quad (3)$$

综合式 (2) 和式 (3) 可建立透视投影与弱透视投影模型之间的关系:

$$\begin{cases} x_{\text{weak}} = x(1 + \epsilon) \\ y_{\text{weak}} = y(1 + \epsilon) \end{cases} \quad (4)$$

分析易知, 弱透视投影相当于透视投影的零阶近似, 采用弱透视投影的仿射近似误差为

$$\begin{cases} \Delta x_{\text{weak}} = |x_{\text{weak}} - x| = |\epsilon x| \\ \Delta y_{\text{weak}} = |y_{\text{weak}} - y| = |\epsilon y| \end{cases} \quad (5)$$

可见弱透视投影近似误差取决于  $\epsilon$  的取值和特征点像面坐标, 当  $\epsilon$  接近于 0 且目标像面位置靠近像面中心时, 即拍摄距离远大于目标本身尺寸 (通常比值的阈值取为 10), 且目标空间位置位于相机光轴附近时, 在给定误差范围内, 弱透视投影模型近似误差可忽略。

### 2.2 平行透视投影模型

平行透视投影模型也可看作两次投影过程的合成, 即目标首先沿着光心与质心  $G(X_g, Y_g, Z_g)$  的连线  $OG$  平行投影至假想平面  $S'$ , 再根据透视成像模型投影至实际成像面  $S$ 。区别于弱透视投影过程, 此投影线不再平行相机光轴。

类似地, 可得到平行透视投影矩阵为

$$\mathbf{M}_{\text{para}} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -X_g/Z_g & X_g \\ 0 & 1 & -Y_g/Z_g & Y_g \\ 0 & 0 & 0 & Z_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j & k & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

仿照式 (2) 并忽略二阶小项  $1/t_z^2$ , 将平行透视投影模型改写为

$$\begin{cases} x_{\text{para}} = I \cdot P_w + x_0 - \epsilon x_0 \\ y_{\text{para}} = J \cdot P_w + y_0 - \epsilon y_0 \end{cases}, \quad (7)$$

进而可得平行透视投影模型与透视投影模型的转换关系:

$$\begin{cases} x_{\text{para}} = x(1 + \epsilon) - \epsilon x_0 \\ y_{\text{para}} = y(1 + \epsilon) - \epsilon y_0 \end{cases} \quad (8)$$

分析可知, 平行透视投影相当于透视投影的一阶近似, 进而可得到采用平行透视投影的仿射近似误差为

$$\begin{cases} \Delta x_{\text{para}} = |x_{\text{para}} - x| = |\epsilon(x - x_0)| \\ \Delta y_{\text{para}} = |y_{\text{para}} - y| = |\epsilon(y - y_0)| \end{cases} \quad (9)$$

平行透视投影近似误差取决于  $\epsilon$  取值以及特征点

像面坐标和质心  $G$  像面投影点的相对位置。进一步比较式(5)和式(9)可知,弱透视投影近似误差是三维点误差的一阶无穷小,而平行透视模型下仅为三维点误差的二阶无穷小,正如图1所示,相较于弱透视投影,平行透视投影模型是透视投影模型的更佳近似。

### 2.3 位姿模糊问题

一般来说,采用仿射近似投影模型可以得到视觉测量问题的线性解法,但不可避免地引入位姿模糊,即存在互为镜像的两个解<sup>[15]</sup>。如图2所示,关于目标质心平面对称的两个平面  $l_i$  与  $l'_i$ 、特征点  $P_i$  与  $P'_i$  拥有相同的弱透视投影像点但不同的透视投影像点,两个平面朝向关于假想图像平面  $S'$  对称,这就是仿射投影模型的位姿镜像模糊问题。

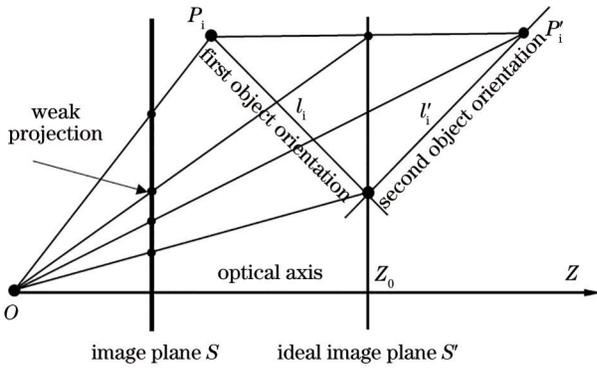


图2 弱透视投影模型下平面目标位姿模糊示意图

Fig. 2 Schematic of pose ambiguity of planar object associated with weak perspective projection

此处基于弱透视投影模型进行分析,平行透视投影模型下推导方法同理。将式(2)改写为矩阵形式<sup>[15]</sup>

$$\begin{cases} P^{(n \times 3)} I^{(3 \times 1)} = X^{(n \times 1)} \\ P^{(n \times 3)} J^{(3 \times 1)} = Y^{(n \times 1)} \end{cases} \quad (10)$$

式中:  $X$ 、 $Y$  分别为由  $x_{\text{weak}}$  和  $y_{\text{weak}}$  组成的矩阵;  $P^{(n \times 3)}$  为由世界点  $P_w$  组成的  $n \times 3$  矩阵,由于坐标系原点位于目标质心,则

$$P = \begin{pmatrix} X_w^{(1)} & Y_w^{(1)} & Z_w^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_w^{(n)} & Y_w^{(n)} & Z_w^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

由于采用平面模板,则矩阵  $P$  的秩为 2。假定平面单位法向量为  $u$ , 向量  $I$  可表示为平面内向量与法向量的矢量和<sup>[15]</sup>, 即

$$\begin{cases} I = I_0 + \lambda u \\ J = J_0 + \gamma u \end{cases} \quad (12)$$

式中:  $I_0$ 、 $J_0$  分别为平面内任意二维向量;  $\lambda$ 、 $\gamma$  分别为尺度因子。将式(12)代入式(10)可得到:

$$\begin{cases} P I_0 = X \\ P J_0 = Y \end{cases} \quad (13)$$

附加线性约束  $u \cdot I_0 = 0$ ,  $u \cdot J_0 = 0$ , 则可以求解线性方程:

$$\begin{cases} I_0 = (P^T P)^{-1} P^T \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \\ J_0 = (P^T P)^{-1} P^T \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $P' = (P \ u)^T$ 。显然矩阵  $P'$  的秩为 3。又基于约束  $\|I\| = \|J\|$ ,  $I \cdot J = 0$  可得到:

$$\begin{cases} I_0 \cdot J_0 + \lambda \gamma = \frac{x_0 y_0}{1 + x_0^2} (\|I_0\|^2 + \lambda^2) \\ I_0 \cdot J_0 + \lambda \gamma = \frac{x_0 y_0}{1 + y_0^2} (\|J_0\|^2 + \gamma^2) \end{cases} \quad (15)$$

消去尺度因子  $\gamma$ , 得到关于  $\lambda$  的一元四次方程组:

$$A \lambda^4 + B \lambda^2 + C = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } A &= \left( \frac{x_0 y_0}{1 + x_0^2} \right)^2 - \frac{1 + y_0^2}{1 + x_0^2}, B = 2 \left( \frac{x_0 y_0}{1 + x_0^2} \right)^2 \|I_0\|^2 - \\ &\frac{1 + y_0^2}{1 + x_0^2} \|I_0\|^2 + \|J_0\|^2 - 2 \frac{x_0 y_0}{1 + x_0^2} I_0 J_0, C = \left( \frac{x_0 y_0}{1 + x_0^2} \right)^2 \times \\ &\|I_0\|^4 + I_0^2 J_0^2 - 2 \frac{x_0 y_0}{1 + x_0^2} I_0 J_0 \|I_0\|^2. \end{aligned}$$

由方程组根判别式可知,针对于变量  $\lambda$  存在 4 个根,其中包括两个实数根(一正一负)和两个虚数根,这两个实数根对应弱透视投影模型下的镜像位姿模糊。位姿模糊极大地制约相机外参数估计的精度和鲁棒性,需采用针对性方法予以剔除。

## 3 基于仿射近似投影模型的长焦相机标定方法

基于文献[13]设计的圆锥曲线和直线融合特征平面模板,分别以弱透视/平行透视仿射近似投影模型替代透视投影模型,进而建立基于仿射近似投影模型的长焦相机标定方法。该方法首先基于仿射近似投影模型解算相机内外参数初值,再利用透视投影模型下的重投影像点残差平方和最小为目标函数,对内外参数初值进行迭代优化。针对仿射投影模型的位姿歧义,通过在平面合作特征上巧妙附加微凸圆柱标志予以剔除。

### 3.1 相机参数初始化

本节仅对弱透视投影模型下的初值确定进行分析,平行透视投影模型下求解过程类同,不再赘述。基于归一化直线单应估计方法和分部正则估计理论<sup>[14]</sup>,像面与标定模板平面间的单应性矩阵  $H$  可以方便求得。由式(1)可知,弱透视投影模型下的投影矩阵为

$$M_{\text{weak}} = \begin{bmatrix} f_x \cdot r_{11} & f_x \cdot r_{12} & f_x \cdot r_{13} & f_x \cdot t_x + u_0 D \\ f_y \cdot r_{21} & f_y \cdot r_{22} & f_y \cdot r_{23} & f_y \cdot t_y + v_0 D \\ 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix}, \quad (17)$$

式中:  $r_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ) 为姿态矩阵  $R$  的元素。鉴于采用的是平面标定模板,为简化分析,不失一般性地假定传感器像元为方形,即  $F = f_x = f_y$ , 则存在:

$$H_{\text{weak}} = D \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \cdot r_{11} & F \cdot r_{12} & F \cdot t_x + u_0 D \\ F \cdot r_{21} & F \cdot r_{22} & F \cdot t_y + v_0 D \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}. \quad (18)$$

$D$  的概略值可通过激光测距仪或其他测量方式获得, 则  $r_{mn} = h_{mn} \cdot D / F$  ( $m = 1, 2; n = 1, 2$ )。另外, 由于姿态矩阵元素的正交性和归一化特性, 存在:

$$\begin{cases} r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1 \\ r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0 \end{cases}. \quad (19)$$

式(19)消去  $r_{31}, r_{32}$  项, 可得:

$$1 - (r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{21}^2 + r_{22}^2) + (r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})^2 = 0. \quad (20)$$

综合式(18)、(20)可得:

$$F^4 - D^2 F^2 (h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{21}^2 + h_{22}^2) + D^4 (h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})^2 = 0. \quad (21)$$

将式(21)视作关于  $F^2$  的一元二次方程组, 其判别式如下:

$$\Delta = D^4 (h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{21}^2 + h_{22}^2)^2 - 4D^4 (h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})^2, \quad (22)$$

化简得到:

$$\Delta = D^4 [(h_{11} - h_{22})^2 + (h_{12} + h_{21})^2] [(h_{11} + h_{22})^2 + (h_{12} - h_{21})^2]. \quad (23)$$

显然  $\Delta \geq 0$ , 关于  $F^2$  存在两解, 又由于  $|r_{ij}| \leq 1$ , 可推出  $F^2 \geq h_{mn}^2 \cdot D^2$ , ( $m = 1, 2; n = 1, 2$ ), 可确定  $F$  有唯一解, 而  $r_{mn}$  ( $m = 1, 2; n = 1, 2$ ) 亦随之确定, 且根据式(18)可计算得到:

$$\begin{cases} t_x = \frac{(h_{13} - u_0)D}{F} \\ t_y = \frac{(h_{23} - v_0)D}{F} \end{cases}. \quad (24)$$

鉴于弱透视投影模型下仿射相机的投影中心位于无穷远, 仿射相机的主点无定义<sup>[14]</sup>。为了不失一般性, 对于不考虑像差畸变的仿射成像相机, 其主点通常可设置为像面中心。投影矩阵式(17)中姿态矩阵的左上  $2 \times 2$  子矩阵便可确定, 而根据姿态矩阵的归一化和正交性约束, 姿态矩阵的余下元素的计算公式为

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2, \quad (25)$$

式中:  $\mathbf{r}_q$  ( $q = 1, 2, 3$ ) 为姿态矩阵的行向量。鉴于  $r_{13}, r_{23}$  的符号难以确定, 本文在平面标定板附加图3所示的微凸易识别圆柱控制点  $P_d(x_d, y_d, z_d)$ 。

经弱透视成像模型投影至像面点  $(u_d, v_d)$ , 根据式(17), 姿态矩阵分量  $r_{13}, r_{23}$  应满足:

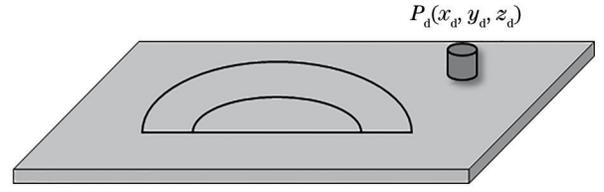


图3 附加圆柱控制点的同心半圆弧合作标志示意图  
Fig. 3 Schematic of concentric semi-circular template attached with a cylindrical control point

$$\begin{cases} r_{13} = [D(u_d - u_0) - (F \cdot r_{11} \cdot x_d + F \cdot r_{12} \cdot y_d)] / (F \cdot z_d) \\ r_{23} = [D(v_d - v_0) - (F \cdot r_{21} \cdot x_d + F \cdot r_{22} \cdot y_d)] / (F \cdot z_d) \end{cases}. \quad (26)$$

实际上, 圆柱控制点精度要求相对不高, 此处并不是以此计算  $r_{13}, r_{23}$  准确数值, 而是根据式(26)对  $r_{13}, r_{23}$  符号进行判别, 进而可以较为妥善地解决位姿模糊问题。

### 3.2 非线性迭代优化

考虑到采用弱透视投影模型的近似误差以及镜头制造装配过程中的缺陷导致的镜头畸变, 有必要对相机内参数进一步优化求精, 即采用仿射近似模型计算长焦相机内外参数初值, 再综合考虑像差畸变基于透视投影模型进行优化解算, 相较于传统透视投影模型下的标定方法, 算法病态性大幅度降低, 数值稳定性更强。

鉴于长焦相机切向畸变和薄棱镜畸变通常较小, 采取更为高阶的径向畸变项或考虑包含薄棱镜畸变的精像差模型并不会显著增强标定精度, 反而易导致算法数值稳定性降低<sup>[16]</sup>, 因此本文仅考虑前四阶径向畸变, 具体标定算法总结如下:

步骤1: 根据归一化直线单应估计方法和分部正则估计理论<sup>[13]</sup>, 估计像面与标定模板平面间的单应性矩阵  $H$ ;

步骤2: 计算弱透视/平行透视投影模型下长焦相机内外参数初值  $\{f_x, f_y, u_0, v_0\}$  和  $\{\gamma, \kappa, \theta, t_x, t_y, D\}$ , 其中  $(\gamma, \kappa, \theta)$  为姿态矩阵参数;

步骤3: 基于透视投影模型, 暂不考虑透镜畸变影响, 采用透视投影模型下的直线段积分距离度量<sup>[17]</sup>, 以模型直线至投影平面距离最小为目标函数, 在初值某邻域内, 最小化目标函数获得相机内外参数的优化解;

步骤4: 根据文献[18]方法线性求解像差畸变系数, 针对于长焦相机标定仅考虑前四阶径向畸变项  $\{k_1, k_2\}$ , 对于常规焦距相机可进一步考虑切向畸变项  $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ ;

步骤5: 重复步骤3、4, 直至给定阈值范围内优化结果稳定。

## 4 实验与分析

### 4.1 仿真实验

为评估所提出的长焦相机标定方法性能,选取文献[13]中精度和鲁棒性相对较好的RML和RNML为参照,检验所提算法受不同标定视图数目和噪声水平的性能影响。

为方便比较,仿真实验采用与文献[13]相同的参数配置,即摄像机分辨率为 $1024 \text{ pixel} \times 1024 \text{ pixel}$ ,将主点设置为图像中心,像元尺寸为 $5 \mu\text{m}$ ,镜头焦距从 $20 \text{ mm}$ 以步长 $10 \text{ mm}$ 增至 $110 \text{ mm}$ ,设置同心圆弧半径分别为 $10 \text{ cm}$ 和 $5 \text{ cm}$ 。区别之处在于,为剔除仿射模型位姿歧义性,本文在文献[13]提出的同心半圆弧合作标志基础上附加一个微凸圆柱标志。在不作具体说明处采用默认仿真配置,即图像噪声为 $0.3 \text{ pixel}$ ,标定视图数为 $12$ ,均在不同的误差水平下进行 $200$ 次独立仿真实验。数值仿真实验主要对比算法如下:

RML<sup>[13]</sup>:基于多条切线的标定方法,直线未作归一化处理,但采用改进岭估计求解单应;

RNML<sup>[13]</sup>:基于归一化多条切线的标定方法,并采用分部正则估计方法求解单应。

Weak:基于弱透视投影模型的长焦相机标定方法,先采用弱透视模型计算长焦相机内外参数初值,再综合考虑像差畸变基于透视投影模型进行迭代优化;

Para:基于平行透视投影模型的长焦相机标定方法,即采用平行透视模型计算长焦相机内外参数初值,再综合考虑像差畸变基于透视投影模型进行优化解算。

#### 4.1.1 20 mm 焦距下视图数影响

本实验首先检验了在常规镜头(焦距为 $20 \text{ mm}$ ,视场角约为 $20^\circ$ )条件下,不同方位下的标定视图数目对于标定算法性能的影响。合作标志模板平面方向在单位视球内随机采样,并在空间点 $(10, 20, 200)^\text{T}$ 周围 $(\pm 5, \pm 10, \pm 20)^\text{T}$ 范围内随机采样获取合作模板位置,视图数目从 $3$ 增至 $12$ ,统计不同标定算法相机内参数相对标定误差(RMS),如图4所示。鉴于相机内参数主点与等效焦距在横纵方向分量的变化趋势基本一致,仅给出主点坐标 $C_x$ 和等效焦距 $F_x$ 的结果。

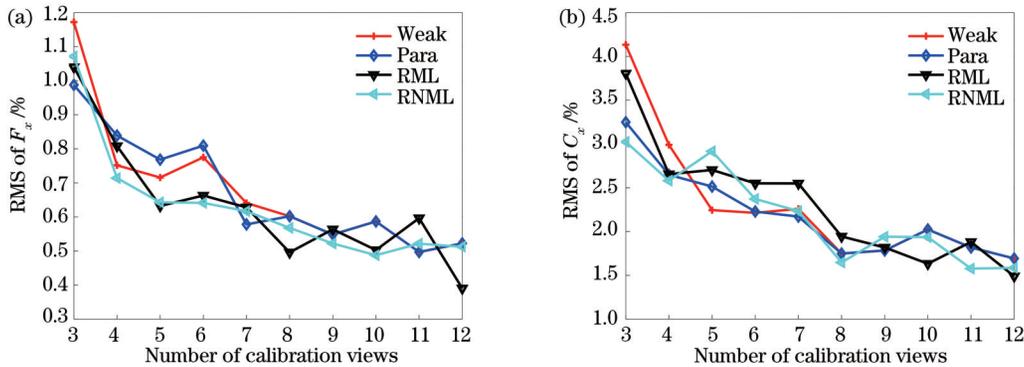


图4 不同标定视图数下 $20 \text{ mm}$ 焦距相机标定参数相对误差。(a)  $F_x$ ; (b)  $C_x$

Fig. 4 Relative error of calibration parameters of the camera (focal length  $f=20 \text{ mm}$ ) under different number of calibration views. (a)  $F_x$ ; (b)  $C_x$

由图4可知,随着标定视图数目的增加,不同标定算法的标定误差均迅速下降,且在视图数目增加至 $8$ 时,各标定算法的相机内参数相对误差趋于平稳。其中就等效焦距 $F_x$ 标定结果而言,RML和RNML算法的相对误差略低于Weak和Para算法,说明在当前配置下透视投影模型是成像过程的更好描述,此时采用仿射投影模型存在近似误差。由图4(b)可知,4种算法标定得到的主点坐标 $C_x$ 结果无明显差异,侧面反映所提标定方法正确有效。

#### 4.1.2 20 mm 焦距下噪声影响

本实验检验不同噪声水平下采用不同标定算法对于 $20 \text{ mm}$ 焦距相机的标定效果。对像点施加零均值高斯白噪声,噪声水平从 $0.1 \text{ pixel}$ 以 $0.1 \text{ pixel}$ 间隔增加至 $1 \text{ pixel}$ ,统计不同标定算法的相对标定误差,结果如图5所示。

从图5可看到,相机内参数的相对误差随图像噪

声水平增加而近似线性增加,且4种标定方法增长趋势基本重合,说明在标定视图充足的条件下,4种标定方法的精度和鲁棒性基本持平,进一步说明所提出的基于仿射近似投影模型的长焦相机标定方法正确可靠,且在一定误差阈值内可适用于常规相机标定问题。

#### 4.1.3 100 mm 焦距下视图数影响

进一步检验在典型长焦镜头(焦距为 $100 \text{ mm}$ ,此时视场角约为 $4^\circ$ )条件下,标定视图数目对于不同标定算法性能的影响。在空间点 $(10, 20, 1100)^\text{T}$ 周围 $(\pm 5, \pm 10, \pm 30)^\text{T}$ 范围内随机采样以获取合作标定板位置,视图数目从 $3$ 增至 $12$ ,统计不同标定算法的相对标定误差,结果如图6所示。

从图6可以看到,在典型长焦距条件下,不同标定算法的相对误差仍随着标定视图数目增加而下降。由图6(a)可知,Weak和Para算法相对误差下降趋势与RML和RNML方法基本一致,且精度略优;由图6(b)

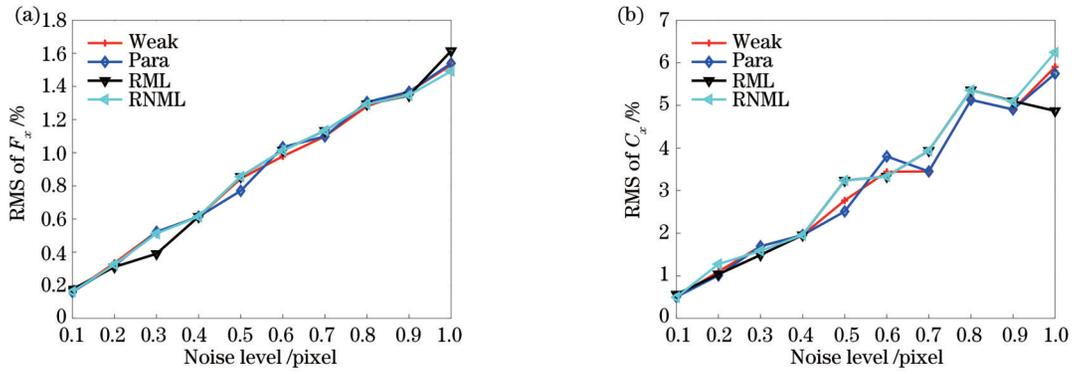


图 5 不同噪声水平下 20 mm 焦距相机标定参数相对误差。(a)  $F_x$ ; (b)  $C_x$

Fig. 5 Relative error of calibration parameters of the camera ( $f=20$  mm) under different levels of image noise. (a)  $F_x$ ; (b)  $C_x$

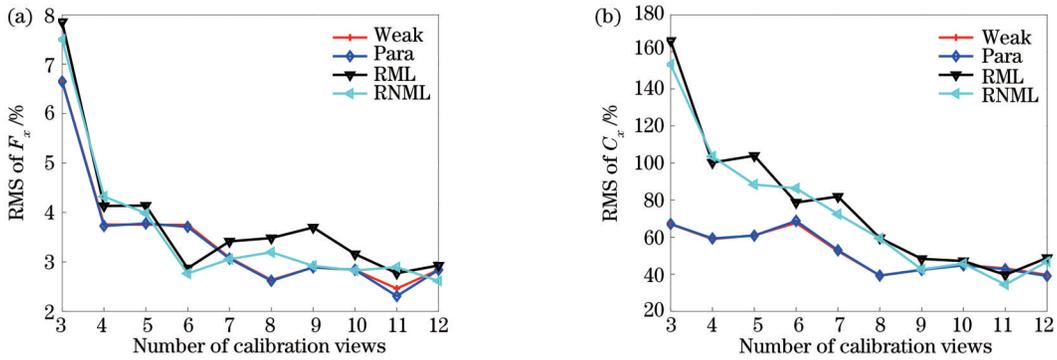


图 6 不同标定视图数下 100 mm 焦距相机标定参数相对误差。(a)  $F_x$ ; (b)  $C_x$

Fig. 6 Relative error of calibration parameters of the camera ( $f=100$  mm) under different number of calibration views. (a)  $F_x$ ; (b)  $C_x$

可知,基于仿射近似模型标定方法的相对误差更低,且在标定视图数较少时精度差距更为明显。上述结果说明所提出的标定方法精度较高,且鲁棒性更强。

#### 4.1.4 100 mm 焦距下噪声影响

类似地,检验不同噪声水平下不同标定算法对于 100 mm 焦距相机的标定效果。像点噪声水平从 0.1 pixel 以 0.1 pixel 间隔增加至 1 pixel,统计不同算法的相对标定误差,结果如图 7 所示。

由图 7 可知,相机内参数相对误差均随噪声增大而增大,基于弱透视和平行透视投影模型标定方法的相对误差更小。且相比之下,透视投影模型下的 RML

和 RNML 方法相对误差增大趋势更为明显,而仿射近似投影模型下 Weak 和 Para 方法的增大趋势则较为平缓,说明基于仿射近似投影模型的标定方法的精度和鲁棒性更优。进一步结合 4.1.3 节的仿真实验结果可推断,在焦距为 100 mm 的条件下,仿射近似投影模型是该成像过程的更佳描述。

#### 4.1.5 不同焦距影响

进一步检验不同焦距条件下不同标定方法的性能。相机焦距从 20 mm 以 10 mm 步长增加至 110 mm,移动标定板使其尽量充满相机视场,统计不同方法的相对误差,结果如图 8 所示。

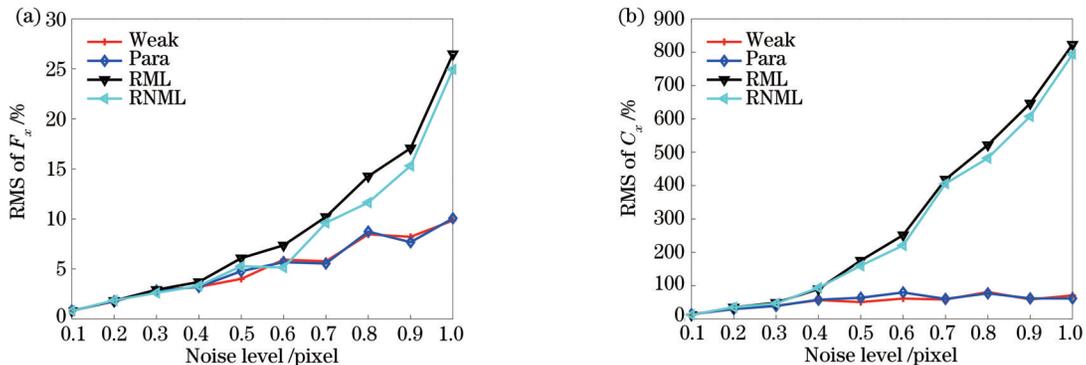


图 7 不同噪声水平下 100 mm 焦距相机标定参数相对误差。(a)  $F_x$ ; (b)  $C_x$

Fig. 7 Relative error of calibration parameters of the camera ( $f=100$  mm) under different levels of image noise. (a)  $F_x$ ; (b)  $C_x$

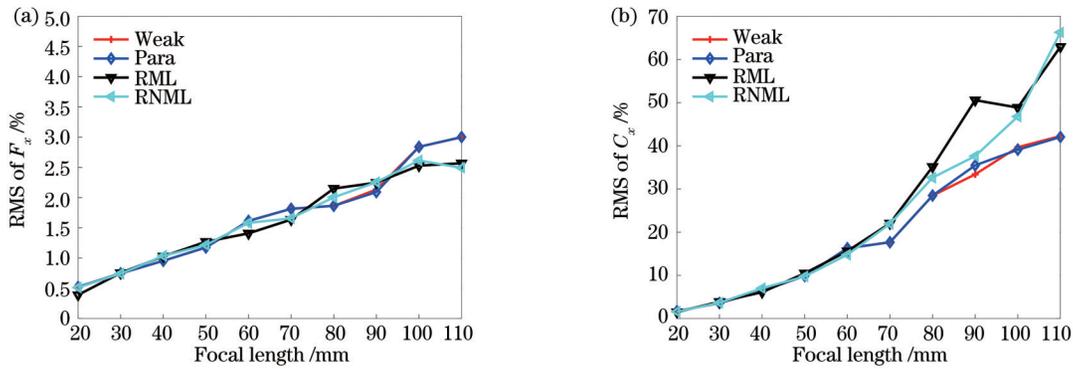


图 8 不同焦距下相机标定参数相对误差。(a)  $F_x$ ; (b)  $C_x$

Fig. 8 Relative error of camera calibration parameters under different focal lengths. (a)  $F_x$ ; (b)  $C_x$

由图 8 可知,随着相机焦距增大,各标定方法的内参数相对误差大体呈线性增大。由图 8(a)可知,4 种标定方法等效焦距的相对误差增长趋势基本一致,随着焦距增大无明显区别。由图 8(b)可知:当焦距较小时,各标定方法主点相对误差无明显区别;随着焦距增大,RML 和 RNML 方法内参数相对误差的增长更为显著。上述结果说明在长焦相机标定中采用仿射近似投影模型的标定方法鲁棒性更好,进一步说明本文提出的标定方法正确有效。

#### 4.2 实际标定实验

为进一步检验所提标定方法的性能,在实验室受

限条件下进行了实验验证。实验中采用的相机和镜头配置同文献[13],即 Imperx CCD 相机(型号:IGV-B2520M-SC000,分辨率:2456 pixel $\times$ 2058 pixel,像元尺寸:3.45  $\mu$ m),典型常规焦距(35 mm)和长焦(75 mm)Kowa 镜头,同心半圆弧标定模板半径分别为 2.5 cm 和 5 cm。需要说明的是,为剔除仿射近似模型的位姿歧义,本实验在文献[13]提出的同心半圆弧标定模板基础上,附加如图 9(a)所示的微凸圆柱标志。平面标定模板在视场内灵活放置,每组实验采集 24 幅不同方位下平面模板图像,典型特征检测结果如图 9(b)所示。

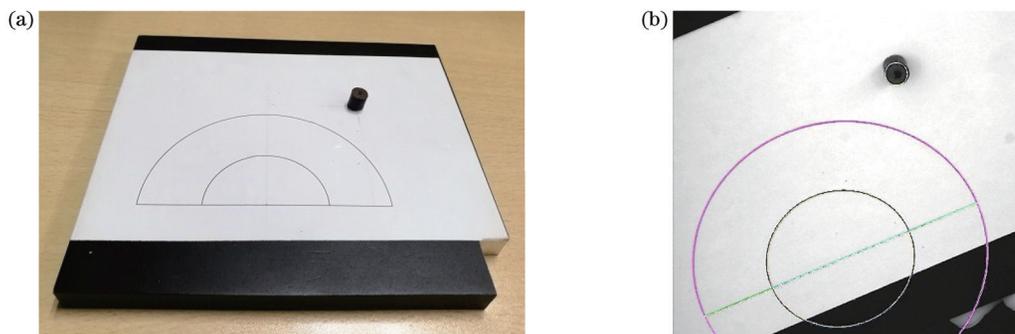


图 9 附加微凸圆柱标志的同心半圆弧标志及典型检测结果。(a)同心半圆弧标志;(b)检测结果

Fig. 9 Concentric semi-circular template attached with a cylindrical control point and typical detection result. (a) Concentric semi-circular template; (b) typical detection result

标定实验主要分为两组,一组采用常规 35 mm 焦距镜头,另一组采用典型 75 mm 长焦镜头。为方便比较,实际标定实验直接采用文献[13]获取的标定图像数据,利用所提出的标定方法对两组相机分别进行标定,标定结果如表 1 和表 2 所示。

如表 1 所示,在常规焦距(35 mm)条件下,虽然存在小幅偏差,仿射近似投影模型下的 Weak 和 Para 方法的内参数标定结果仍接近于透视投影模型下的 RML 和 RNML 方法,且 Weak 和 Para 方法的标定重投影误差相较于 RML 和 RNML 方法略大,说明在当前常规焦距配置下,采用透视投影模型下的标定方法可获得更高精度的内参数标定结果,采用仿射模型的近

似误差不可忽略。进一步比较 Weak 和 Para 方法的标定结果可知,虽然弱透视和平行透视投影模型分别作为透视投影的零阶和一阶近似,但内参数标定结果并无明显区别,说明两种成像模型下获取的内参数初值较为接近,即进一步说明在当前配置下两种仿射近似投影模型基本等价。

典型长焦(75 mm)相机标定实验中只考虑了径向畸变像差,如表 2 所示。4 种标定方法的重投影误差无明显差异,等效焦距( $F_x, F_y$ )标定值差异相对较小,而主点( $C_x, C_y$ )差异相对较大。为进一步验证标定结果精度,本节采用与文献[13]相同的精度检验方法和实验数据,即利用标定参数和立体视觉系统同步获取的

表 1 35 mm 焦距条件下不同标定算法的结果

Table 1 Results of different calibration algorithms under the condition of 35 mm focal length

Algorithm	RML	RNML	Weak	Para
$F_x$	10277.8873	10214.9767	10290.8719	10292.5128
$F_y$	10242.7139	10163.7846	10250.5755	10251.0925
$C_x$	1255.4521	1212.6460	1182.3568	1176.7746
$C_y$	1057.1832	1094.4985	968.7576	958.7477
$k_1$	-0.2760	-0.2698	-0.2258	-0.2301
$k_2$	0.3085	-1.3301	-2.3280	-2.1748
$k_3$	0.0041	0.0050	0.0029	0.0029
$k_4$	-0.0019	-0.0028	-0.0026	-0.0024
RMS / pixel	0.2064	0.1793	0.2274	0.2213

表 2 75 mm 焦距条件下不同标定算法的结果

Table 2 Results of different calibration algorithms under the condition of 75 mm focal length

Algorithm	RML	RNML	Weak	Para
$F_x$	21131.5526	20981.3379	21918.1075	20466.8844
$F_y$	21128.8873	20867.2976	21918.1018	20455.7080
$C_x$	1284.2126	1267.5908	1227.9627	1433.7827
$C_y$	380.3522	428.9498	1028.4783	771.4236
$k_1$	0.0469	0.1575	0.6160	-0.1122
$k_2$	-3.4698	8.7873	0.0084	1.0836
RMS / pixel	0.1628	0.1605	0.1644	0.1608

图像对,重建 10 个公共视场内任意放置的棋盘格三维结构,并将重建后的三维坐标拟合为理想平面,计算重

建点与理想平面的距离误差。采用 Weak 方法和 Para 方法输出标定参数的典型重建结果如图 10 所示。

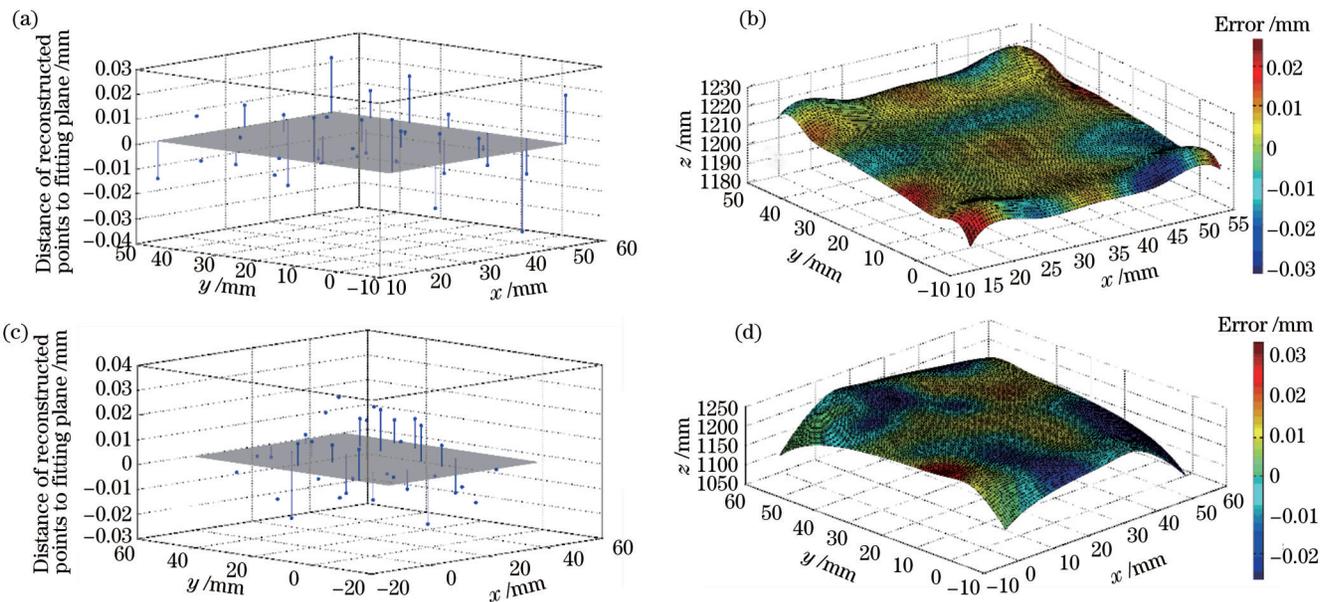


图 10 不同标定方法输出参数对应的平面模板重建结果。(a) Weak 方法重建的三维点集与拟合平面;(b) Weak 方法重建平面误差;(c) Para 方法重建的三维点集与拟合平面;(d) Para 方法重建平面误差

Fig. 10 Planar template reconstruction results corresponding to output parameters of different calibration methods. (a) 3D checkerboard points and fitting plane reconstructed by Weak method; (b) plane error of reconstruction by Weak method; (c) 3D checkerboard points and fitting plane reconstructed by Para method; (d) plane error of reconstruction by Para method

图 10(a)、(c)所示为重建的三维点集与对应的拟合平面,图 10(b)、(d)所示为重建平面的误差分布。

观察图 10(a)、(c)可知,尽管存在细微偏差,不同标定参数所对应的重建三维点集能较好吻合于拟合平面。

此外,由图 10(b)、(d)可知,重建平面误差在面内大体呈中心对称分布,平面模板边缘处误差相对较大。

进一步计算得到基于 Weak 和 Para 方法标定参数的 10 个不同姿态下重建三维点集的离面中误差分别为 0.0153 mm 和 0.0152 mm,相较于文献[13]的结果,基于仿射近似模型标定参数的重建误差相对更小,说明当前长焦相机配置下采用仿射近似投影模型可以更好地描述其成像过程,所提出的标定方法正确有效,精度较高,同时这也从侧面反映了基于透视投影模型标定方法的精度上限。

## 5 结 论

深入研究了基于仿射近似投影模型的长焦相机标定方法。系统阐述了以弱透视、平行透视投影为代表的仿射近似投影模型的成像特性,深入分析了仿射投影位姿模糊的形成机制,在此基础上详细推导了仿射近似投影下基于平面模板的相机内外参数标定模型,进一步提出了基于弱透视和平行透视投影模型的长焦相机标定方法。为最大限度降低仿射投影模型的近似误差,以透视投影模型下的重投影点残差平方和为目标函数,对内外参数初值进行迭代优化求精。针对仿射投影模型的位姿歧义,在平面标定模板基础上附加微凸圆柱标志。仿真和实际实验结果显示,在成像物距比大于 10 且相机视场角小于  $10^\circ$  的典型长焦条件下,所提方法仅需要可自由运动相机采集的多幅不同视图下的平面模板图像即可完成相机标定,操作简便灵活。在实验室环境下重建平面目标的离面中误差优于 0.02 mm,说明本文方法正确有效、精度较高。

## 参 考 文 献

- [1] Percoco G, Guerra M G, Salmeron A J S, et al. Experimental investigation on camera calibration for 3D photogrammetric scanning of micro-features for micrometric resolution[J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2017, 91(9): 2935-2947.
- [2] Stamatopoulos C, Fraser C S, Cronk S. On the self-calibration of long focal length lenses[J]. *International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 2010, XXXVIII: 560-564.
- [3] Liang M P, Huang X Y, Chen C H, et al. Robust calibration of cameras with telephoto lens using regularized least squares[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 2014: 689429.
- [4] Zhang Z. A flexible new technique for camera calibration[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(11): 1330-1334.
- [5] Labe T, Forstner W. Geometric stability of low-cost digital consumer cameras[J]. *International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 2004, XXXV: 278-287.
- [6] Percoco G, Salmerón A J. Photogrammetric measurement of 3D freeform millimetre-sized objects with micro features: an experimental validation of the close-range camera calibration model for narrow angles of view[J]. *Measurement Science and Technology*, 2015, 26(9): 095203.
- [7] Fraser C S, Yamakawa T. Insights into the affine model for high-resolution satellite sensor orientation[J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2004, 58(5/6): 275-288.
- [8] 夏军营. 空间目标的单目视觉位姿测量方法研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2012.  
Xia J Y. Researches on monocular vision based pose measurements for space targets[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2012.
- [9] Beardsley P A, Zisserman A, Murray D W. Navigation using affine structure from motion[C]//ECCV '94: Proceedings of the third European conference on Computer Vision, May 2-6, 1994, Stockholm, Sweden. New York: ACM Press, 1994: 85-96.
- [10] Wang G H, Wu Q M J. Quasi-perspective projection model: theory and application to structure and motion factorization from uncalibrated image sequences[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2010, 87(3): 213-234.
- [11] Kanatani K, Sugaya Y, Kanazawa Y. Self-calibration of affine cameras[M]//Guide to 3D vision computation. Advances in computer vision and pattern recognition. Cham: Springer, 2016: 163-182.
- [12] Huang X Y, Gao J Z, Yang R G. Calibrating pan-tilt cameras with telephoto lenses[M]//Yagi Y, Kang S B, Kweon I S, et al. Computer vision-ACCV 2007. Lecture notes in computer science. Heidelberg: Springer, 2007, 4843: 127-137.
- [13] 孙聪, 杨正磊, 贾萌娜, 等. 基于圆锥曲线和直线融合特征的长焦相机标定方法[J]. *光学学报*, 2022, 42(12): 1212003.  
Sun C, Yang Z L, Jia M N, et al. Conics and line fusion features based calibration of telephoto camera[J]. *Acta Optica Sinica*, 2022, 42(12): 1212003.
- [14] Mundy J L, Zisserman A. Geometric invariance in computer vision[M]. Cambridge: MIT Press, 1992.
- [15] Horaud R, Dornaika F, Lamiroy B. Object pose: the link between weak perspective, paraperspective, and full perspective [J]. *International Journal of Computer Vision*, 1997, 22(2): 173-189.
- [16] Wang J H, Shi F H, Zhang J, et al. A new calibration model of camera lens distortion[J]. *Pattern Recognition*, 2008, 41(2): 607-615.
- [17] Zhang Y Q, Li X, Liu H B, et al. Pose optimization based on integral of the distance between line segments[J]. *Science China: Technological Sciences*, 2016, 59(1): 135-148.
- [18] 唐力铁, 邱志强, 陆启生. 基于仿射近似的摄像机标定[J]. *国防科技大学学报*, 2006, 28(1): 111-116.  
Tang L T, Qiu Z Q, Lu Q S. Camera calibration based on affine approximation[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2006, 28(1): 111-116.

# Calibration of Telephoto Camera Based on Affine Approximation Projection Model

Sun Cong<sup>1\*</sup>, Ma Yan<sup>1</sup>, Zhang Guolong<sup>1</sup>, Gao Yi<sup>1</sup>, Yu Qifeng<sup>2</sup>

<sup>1</sup>State Key Laboratory of Astronautic Dynamics, Xi'an Satellite Control Center, Xi'an 710043, Shaanxi, China;

<sup>2</sup>College of Aeronautics and Astronautics, National University of Defense Technology, Changsha 410073, Hunan, China

## Abstract

**Objective** Featuring unique advantages of high spatial resolution and more detailed information, telephoto cameras have been widely employed in military fields such as aerial reconnaissance, damage assessment, and patrol monitoring, as well as civil fields including industrial precision processing, aerial photogrammetry, deformation monitoring, and traffic surveillance. However, there are practical obstacles to the adoption of telephoto lenses on small-format cameras, with potential difficulties in self-calibration. A telephoto lens will inevitably narrow the field of view (FOV), exerting detrimental effects on the performance of the central perspective projection model, which will result in over-parameterization, ill-conditioning, and subsequent numerical instability in normal equations of the bundle adjustment. Linear dependencies between the intrinsic and extrinsic parameters make it rather difficult to recover satisfactory calibration parameters in such weak geometry conditions. Therefore, an alternative affine approximation of the perspective projection model is adopted to accommodate high-accuracy and close-range photogrammetry with telephoto lenses, which makes full use of the advantages of the model, such as high linearity, simplicity, and high robustness. Additionally, a calibration method of telephoto cameras based on the affine approximation projection model is proposed. By employing the proposed model, this paper aims to obtain better calibration performance of telephoto cameras, thereby laying a foundation for the application of telephoto cameras.

**Methods** As the most common affine approximation of the perspective projection model, the characteristics of weak perspective and paraperspective projection are thoroughly elaborated, according to which a calibration method of telephoto camera based on the affine approximation projection model is built. In this paper, the formation mechanism of reversal ambiguity is thoroughly analyzed, and the estimation method of calibration parameters based on the planar template under the affine approximate projection is deduced in detail. First, combined with the normalized method on line-based homography estimation method and the partitioned regularization estimation algorithm, the homography between the image plane and the cooperative planar template can be obtained. Then, the initial values of the intrinsic and extrinsic parameters of the camera are calculated under the affine approximation projection model. With the minimum sum of the residual square of the re-projection image points under the perspective projection model as the cost function, a nonlinear optimization algorithm is adopted to refine the calibration parameters for minimizing the approximation error of the affine projection model. In addition, an additional stage with a control point is attached to the planar template to address pose ambiguity.

**Results and Discussions** First, the experimental results of the camera with the typical ordinary focal length ( $f=20$  mm) show that the error of the calibration method employing the perspective projection is relatively lower (Fig. 4 and Fig. 5), which indicates that the perspective projection better describes the imaging process under the current configuration. In this case, the approximation error of the affine projection model cannot be negligible. Furthermore, the results demonstrate that the proposed calibration method is effective and reliable, and can be applied to ordinary cameras within a certain threshold. Additionally, the experimental results of the camera with typical telephoto lenses ( $f=100$  mm) show that the calibration method of the telephoto camera based on the approximation projection model has better accuracy and robustness (Fig. 6 and Fig. 7), and the affine approximation projection model can be better adapted to the imaging process of telephoto cameras.

As for actual experimental results, under the condition of ordinary focal length ( $f=35$  mm) in Table 1, despite a small deviation, the calibration results of the Weak and Para methods under the affine approximation projection are still close to those of RML and RNML methods under the perspective projection model. This indicates that the calibration method under the perspective projection model can obtain higher precision results, and the approximation error of the affine projection model cannot be ignored. Further comparison of the calibration results of the Weak and Para methods shows that the two approximation models are basically equivalent under the current configuration. In the case of the telephoto

camera ( $f=75$  mm), the calibration parameters and image pairs acquired via the stereovision are applied to reconstruct the 3D planar template (Fig. 10). The out-of-plane error of the reconstructed plane is about 0.015 mm, which is significantly lower than the reconstruction error of methods under perspective projection, thus demonstrating the correctness and effectiveness of the proposed method.

**Conclusions** A novel method of telephoto camera calibration based on the affine approximation projection model is proposed to address the over-parameterization of the perspective projection model in telephoto camera calibration. By the affine approximation projection model, the initial values of the calibration parameters can be obtained. Additionally, the method with the affine approximation projection model is more robust than that with the perspective projection model. With the minimum sum of the residual square of the re-projection image points under the perspective projection model as the cost function, a nonlinear optimization algorithm is adopted to refine the calibration parameters for minimizing the approximation error of the affine projection model. Besides, an additional stage with a control point is attached to the planar template to solve the pose ambiguity. Under the typical telephoto conditions where the angle of view is lower than  $10^\circ$  and the variation in the depth of the target along the line of sight is smaller than its average depth from the camera, the proposed method only requires the freely moving camera to observe a planar pattern shown at several different orientations, which is simple and flexible. Simulation and actual experimental results show that the proposed calibration method of the telephoto camera is effective, and the out-of-plane error of the reconstructed plane is better than 0.02 mm in the laboratory environment.

**Key words** measurement; telephoto camera; camera calibration; affine approximation projection; pose ambiguity