

光学学报

气动光学效应波前模态的泽尼克-本征正交分解

陈勇¹, 李玉栋¹, 袁强^{1*}, 姚向红¹, 申俊琦¹, 常伟², 李宏勋¹

¹中国空气动力研究与发展中心设备设计与测试技术研究所, 四川 绵阳 621000;

²中国空气动力研究与发展中心计算空气动力学研究所, 四川 绵阳 621000

摘要 本征正交分解(POD)方法已经广泛应用于时间变化随机场的分析,但其直接法或快照法存在自身固有缺陷,前者使关联矩阵求解特征值和特征向量较为困难,后者的有限抽样帧数会影响对随机场的统计特性分析。鉴于此,本文建立了基于泽尼克(Zernike)多项式加权系数的Zernike-POD方法,用于气动光学效应的波前模态统计分析。对于圆域问题,Zernike多项式阶数给定后,各阶加权系数与波前分布是一一对应的,并且通常用几百阶多项式就足以复原各种复杂波面形状。Zernike-POD方法由对波前本身改为对Zernike多项式加权系数的分解和模态计算,由于多项式阶数远少于波前的空间离散点数,因此,关联矩阵的维数降低,计算量减少,计算效率显著提高。Zernike-POD方法不损失空间分辨率,同时不需要限制最高采样帧数,因此,时间统计特性不受影响,预估的波前模态具有较高的时空分辨率。为验证该方法的有效性,用大涡模拟方法开展圆柱绕流数值仿真,并计算圆柱尾迹卡门涡街结构产生的时间系列气动光学效应数据,将该数据用于波前模态分析,波前空间分辨率为 100×100 ,采样帧数为2万帧,Zernike多项式阶数取为217阶。一阶模态与稳态波前分布相似,二阶与三阶、四阶与五阶模态近似互为配对关系;前10阶模态能够基本复原波面形状,前49阶模态含能在97%以上,用完整模态重构的波前与原始波前没有本质差异;模态加权系数及其功率谱随阶数增加而呈下降趋势,前五阶模态加权系数的功率谱尖峰频率与光学窗口中心点脉动速度情况较为一致,对应卡门涡街的主频,斯特劳哈尔数 St 约为0.22。Zernike-POD方法适用于圆域波前模态分析,也适用于环形域和正方形域,并能够推广到流场结构、图像与信号等处理领域。

关键词 气动光学; 波前模态; 本征正交分解; 泽尼克多项式

中图分类号 O436;O355

文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS230559

1 引言

本征正交分解(POD)也称为主成分分解,它是一簇单位正交基即模态描述随机场,模态按含能大小排序,则只需要用前少数阶模态就足以复原随机场,因此,对场具有降维处理功能,常用于流场相干结构分析、图像识别、气象预报与信号处理等领域,在气动光学效应统计特征分析方面也被广泛应用。2001年Cicchiello等^[1]将POD用于声波控制下热喷流二维折射率场的分析,用前少数模态就基本复原出折射率场分布;2007年吴琳等^[2]利用POD的奇异值分解(SVD)方法求解模态,给出介质折射率场分布;2013年Gao等^[3]用POD方法建立光程差(OPD)各阶模态加权系数随时间的变化关系,据此用于OPD的发展变化预估;2014—2016年Mathews等^[4-6]将POD分解方法用于激光炮塔三维密度场模态分析、仿真与飞行试验的波前模态对比验证,以及缝隙对炮塔气动光学效应波前模态的影响评估等;2016—2019年Jumper带领的气动光学团队^[7-9],将POD方法用于机载气动光学飞行

试验数据分析,考察波前模态特征、气动噪声影响,以及对自适应光学校正波前预估的可行性等;2022年Sahba等^[10]基于POD方法,发展了动态模式分解(DMD)方法,用于机载跨声速气动光学试验数据模态分析。

POD方法分为直接法和快照法。直接法由Lumley^[11-12]在1967年建立,用于求解空间关联矩阵的特征值和特征向量,关联矩阵的维数为场的空间离散点数,当空间离散点数较多时,存在计算量大、耗时、占用内存多等求解困难。快照法由Sirovich^[13-14]在1987年建立,它改为求解时间的关联矩阵,采用约200帧的随机抽样,关联矩阵维数和计算量显著降低,使POD方法更具有实际可操作性,但较少的抽样帧数用于统计特性分析必然是不充分的,计算的模态会随帧数、帧与帧的间隔时间不同而不同。2007年谢文科等^[15]对波前进行降空间分辨率处理,把 4×4 像素作为整体,用平均值代替,则空间关联矩阵维数降低至原来的 $1/16$,但该方法会降低空间分辨率,影响模态预估的准确性。迄今为止,虽然计算机软硬件和并行能力得到快

收稿日期: 2023-02-16; 修回日期: 2023-03-30; 录用日期: 2023-04-13; 网络首发日期: 2023-05-08

通信作者: *yqcardc@163.com

速发展,研究人员也针对 POD 方法引入 Karhunen-Loeve (K-L)分解、主元素分析(PCA)分解和 SVD 等方法^[16],但矩阵特征值与特征向量计算仍然极其困难,尤其是无法从根本上解决 POD 方法的计算效率与计算精度相统一的问题。

鉴于此,针对 POD 方法存在的上述问题,本文建立了 Zernike POD(Z-POD)方法,引入了基于 Zernike 多项式的波前重构环节,用于时间系列气动光学效应数据的波前模态统计分析^[17]。当 Zernike 多项式阶数给定后,在圆域上各阶加权系数与波前分布具有一一对应关系,并且用不足 500 阶的 Zernike 多项式就足以复原各种复杂波面形状,对波前分布具有降维处理功能。Z-POD 方法不再对波前本身进行分解,而是对 Zernike 各阶加权系数进行分解得到各阶波前模态,因此关联矩阵维数显著降低,计算效率得以提高。该方法对波前离散点数和最高采样帧数没有限制,因此在空间与时间上有足够高的分辨率。基于 Zernike 多项式的波前重构在环形域、正方形域上也是适用的,原则上 Z-POD 方法能够应用于圆域、环形域和正方形域的波前模态分解,同时可以推广到流场、图像与信号等的统计分析。

2 Z-POD 方法

设随时间变化的波前为 $w(x, y, t)$,波前倾斜相差会淹没高阶相差分布特性,为更好地分析波前模态特征,首先扣除波前的倾斜相差。设在 t 时刻波前含有的倾斜相差为 $ax + by + e$,这里 a 和 b 分别是 x 向和 y 向倾斜因子, e 为常数相位,则利用最小二乘原理可得

$$\begin{cases} f(a, b, e) = [w(x, y, t) - (ax + by + e)]^2 \\ \frac{\partial f}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial e} = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

式中, f 是 a, b 和 e 的函数。据此得到倾斜相差 $ax + by + e$,并从 t 时刻波前 $w(x, y, t)$ 中扣除。在以下波前 POD 中,不加特别说明,波前均扣除了倾斜相差。

在 t 时刻的波前 $w(x, y, t)$ 采用 K 阶 Zernike 多项式重构为

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^K c_k(t) z_k(x, y), \quad (2)$$

式中不包含倾斜相差,这里 $k=1$ 代表第 3 阶 Zernike 多项式。

设随机采样帧数为 N 、Zernike 多项式阶数为 K ,则离散形式的时间系列 Zernike 多项式系数记为 $c_k(n)$,其中 $n=1, 2, \dots, N$ 和 $k=1, 2, \dots, K$,加权系数矩阵 U 的形式为

$$U = \begin{bmatrix} c_1(1) & c_2(1) & \cdots & c_K(1) \\ c_1(2) & c_2(2) & \cdots & c_K(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1(N) & c_2(N) & \cdots & c_K(N) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

相应地,得到实对称正定空间关联矩阵为

$$R = U^T U / N, \quad (4)$$

式中,矩阵 R 是 $K \times K$ 阶的实对称正定方阵,存在 K 个非负实数特征值以及 K 个互不相关特征向量。设矩阵 R 的特征值组成 $K \times K$ 阶对角矩阵为 Λ ,特征向量转置组成 $K \times K$ 阶矩阵为 Φ ,则有

$$R\Phi = \Lambda\Phi. \quad (5)$$

设矩阵 R 的 K 个特征值为 λ_p 和特征向量为 $\varphi_p(k)$, $p=1 \sim K$ 和 $k=1 \sim K$,特征值 λ_p 依照大小排序 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_K$,特征向量 $\varphi_p(k)$ 是 K 维行向量:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_K \end{bmatrix} \quad \Phi = [\varphi_1^T, \varphi_2^T, \dots, \varphi_K^T]. \quad (6)$$

式(5)可以采用 Jacobi 方法求解,分别得到矩阵 R 的 K 个特征值 λ_p 和对应特征向量 $\varphi_p(k)$ 。 K 个特征向量 $\varphi_p(k)$ 采用 Schmidt 方法进行正交化^[18],同时进行单位化处理,由此组成一组两两正交的单位基函数,又称为 Zernike 多项式加权系数 $c_k(t)$ 的 POD 模态。标准正交基函数或模态 $\varphi_p(k)$ 满足:

$$\begin{cases} |\varphi_p(k)| = 1, & p = 1, 2, \dots, K \\ \varphi_p(k) \cdot \varphi_q(k) = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases} \end{cases}. \quad (7)$$

特征值 λ_p 代表第 p 阶模态 $\varphi_p(k)$ 所占总能量的百分比,则前 p 阶模态(包含第 p 阶模态)占总能量百分比 P_{ratio} 为

$$P_{\text{ratio}} = \frac{\sum_{q=1}^p \lambda_q}{\sum_{q=1}^K \lambda_q} \times 100\%. \quad (8)$$

设在 t 时刻的 Zernike 多项式系数 $c_k(t)$ 在第 p 个模态 $\varphi_p(k)$ 上的投影即加权系数为 $d_p(t)$,其中 $p=1 \sim K$,则有

$$d_p(t) = \sum_{k=1}^K c_k(t) \varphi_p(k), \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (9)$$

在 t 时刻的 Zernike 多项式系数 $c_k(t)$ 用前 P 阶模态 $\varphi_p(k)$ 重构得到系数 $\bar{c}_k(t)$, $1 \leq P \leq K$,并据此重构得到波前 $\bar{w}(x, y, t)$,上划线“ $\bar{}$ ”是区别于原始的 Zernike 多项式系数 $c_k(t)$ 与波前 $w(x, y, t)$:

$$\begin{cases} \bar{w}(x, y, t) = \sum_{k=1}^K \bar{c}_k(t) z_k(x, y) \\ \bar{c}_k(t) = \sum_{p=1}^P d_p(t) \varphi_p(k) \end{cases}, \quad (10)$$

而波前的第 p 阶模态为

$$\begin{cases} w_p(x, y) = \sum_{k=1}^K c_k^p z_k(x, y) \\ c_k^p = \varphi_p(k) \end{cases}. \quad (11)$$

3 讨论与分析

为验证 Z-POD 方法的可行性,对圆柱尾迹卡门

涡街流动产生的气动光学效应数值仿真波前数据进行了模态分析。如图 1 所示,圆柱 A 的直径 $D = 0.14 \text{ m}$,以圆柱直径 D 无量纲化的计算区域为 $30 \times 20 \times 1$,其中流向 30、展向 20、沿圆柱轴向为 1,光学观察窗 B 与圆柱 A 的距离 $L_2 = 5$,光学孔径 $\Sigma = 1.5$,上游边界与圆柱 A 的距离 $L_1 = 5$,下游与光学观察窗 B 的距离 $L_3 = 20$,展向边界 $L_4 = L_5 = 10$ 。来流马赫数 $M = 0.4$,以圆柱直径 D 为参考尺度的雷诺数 $Re = 1.0 \times 10^6$,波长取为 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ 。流场网格量约 29 万,波前空间离散点数 100×100 ,获取 2 万帧波前数据用于模态分析,其中帧与帧的间隔时间为 $\Delta t \approx 0.84 \mu\text{s}$ 。流场与气动光学效应数值仿真采用与文献[19]相类似的方法,但为更精细化模拟流场,采用大涡模拟(LES)的壁面适应局部涡粘(WALE)模型[20]开展圆柱湍流数值仿真,在上游入口边界和初值边界中加入白噪声扰动,采用五阶精度加权基本无振荡(WENO)格式[21]和六阶精度中心差分格式等高精度离散格式,时间推进同样采用双时间步隐式迭代求解上下对称高斯-塞德尔(LU-SGS)方法[22],每个物理时间步用了 10 步子迭代,流动气动光学效应引起的波前畸变采用几何光学的光线追迹方法计算。

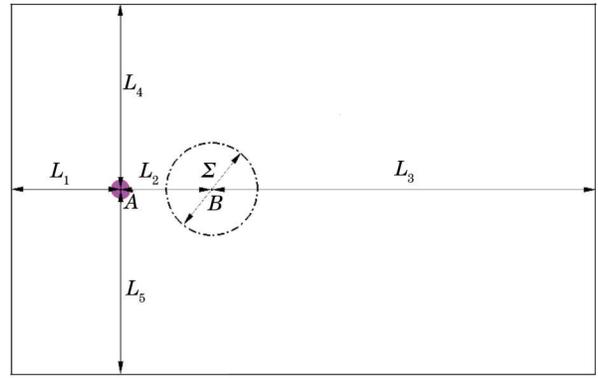


图 1 计算区域与观察窗

Fig. 1 Calculation area and observation window

图 2 给出了两个时刻的马赫数等值线与云图分布。流动绕过圆柱时会发生分离形成分离剪切层,上下两股分离流动在尾迹区混合,由于剪切层的 Kelvin-Helmholtz (K-H) 不稳定波等作用,在尾迹区形成有规则的卡门涡街大尺度拟序结构。圆柱绕流卡门涡街结构在圆柱尾迹流动中能量占比最高,其频率对应为尾迹区流场参数的主频 f ,来流速度为 V_∞ ,则相应的斯特劳哈尔数 $St (= fD/V_\infty)$ 一般在 0.20 左右。

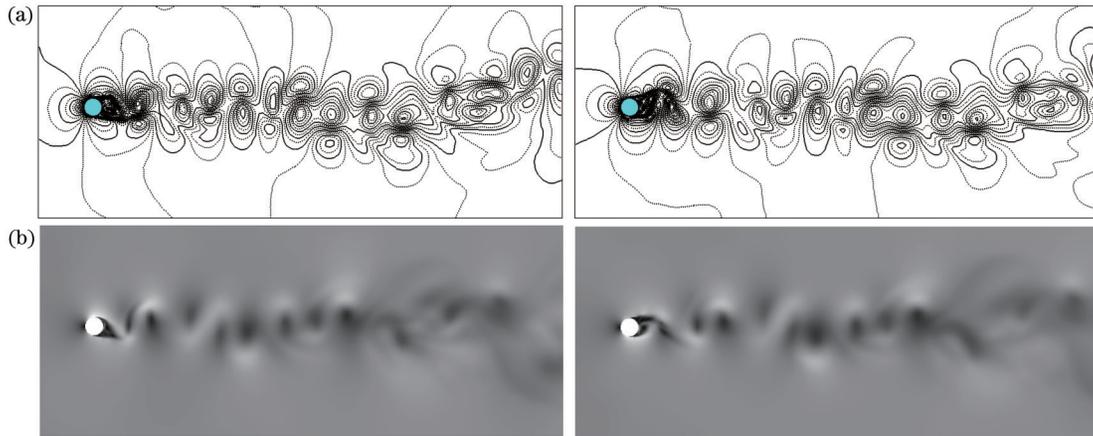


图 2 不同时刻的马赫数分布。(a) 等值线;(b) 云图

Fig. 2 Mach number distributions at different time. (a) Iso-value lines; (b) cloud chart

图 3 给出了光学观察窗中心点 B 速度分量 V 随时间的变化及其功率谱。圆柱尾迹流动卡门涡街进行较规则的周期性运动,导致速度分量 V 变化呈现明显的周期性,在对 2 万个数据的统计分析中,得到脱落涡街的周期是 $T \approx 0.0046 \text{ s}$,对应卡门涡街频率 $f \approx 216 \text{ Hz}$,来流速度 $V_\infty (= Ma_\infty) \approx 133 \text{ m/s}$,圆柱直径 $D = 0.14 \text{ m}$,得到斯特劳哈尔数 $St \approx 0.23$ 。速度分量 V 的平均值约为 -10 m/s ,峰谷 PV 值约为 254 m/s ,均方差(MSE)值为 67 m/s 。在图 3(b)的速度分量 V 的功率谱分布中,得到主频 $f \approx 217 \text{ Hz}$,与采用周期计算的卡门涡街主频接近,当低于主频时,功率谱呈现整体上升趋势,而高于主频时,功率谱呈现整体下降趋

势,在 $f \approx 1.5 \sim 36.7 \text{ kHz}$ 时进入惯性子区,与 Kolmogorov 的 $-5/3$ 定律相比,斜率偏大。

图 4 给出了 4 个不同时刻的波前分布,包括原始波前、扣除倾斜相差的波前、扣除倾斜相差后利用 Zernike 多项式重构的波前,波前重构取多项式阶数 $K=217$ 。波前在扣除倾斜相差前后差异并不明显,证明气动光学效应的波前倾斜相差占比不高。扣除倾斜相差后,重构前后的波前除局部细节略有差异,整体上吻合较好,证明本文取 Zernike 多项式阶数 $K=217$ 能够足以复原波面复杂形状。

图 5 给出了多个时刻 Zernike 多项式加权系数 $c_k(t)$ 的散点图及散点图求和取平均值的结果。加权系数 $c_k(t)$ 随阶数增加整体呈现下降趋势,说明各阶相

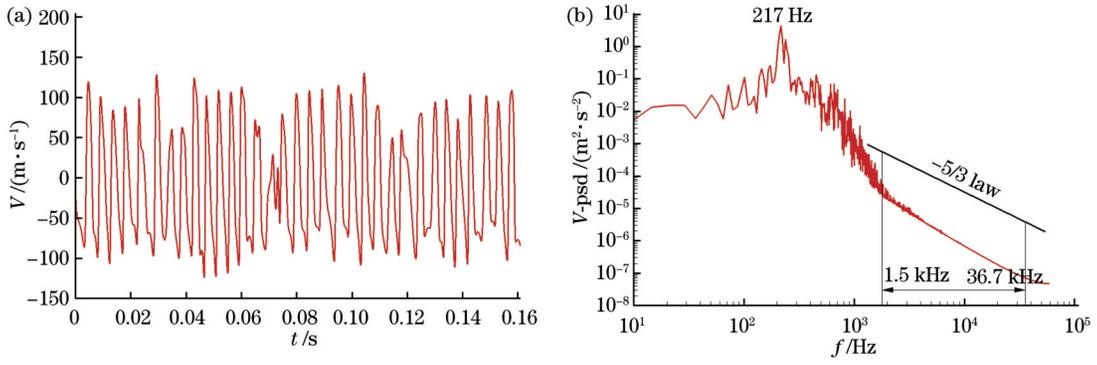


图 3 B 点处的密度变化及功率谱分布。(a) 密度变化; (b) 功率谱

Fig. 3 Density variation and power spectrum distribution at point B. (a) Density variation; (b) power spectrum

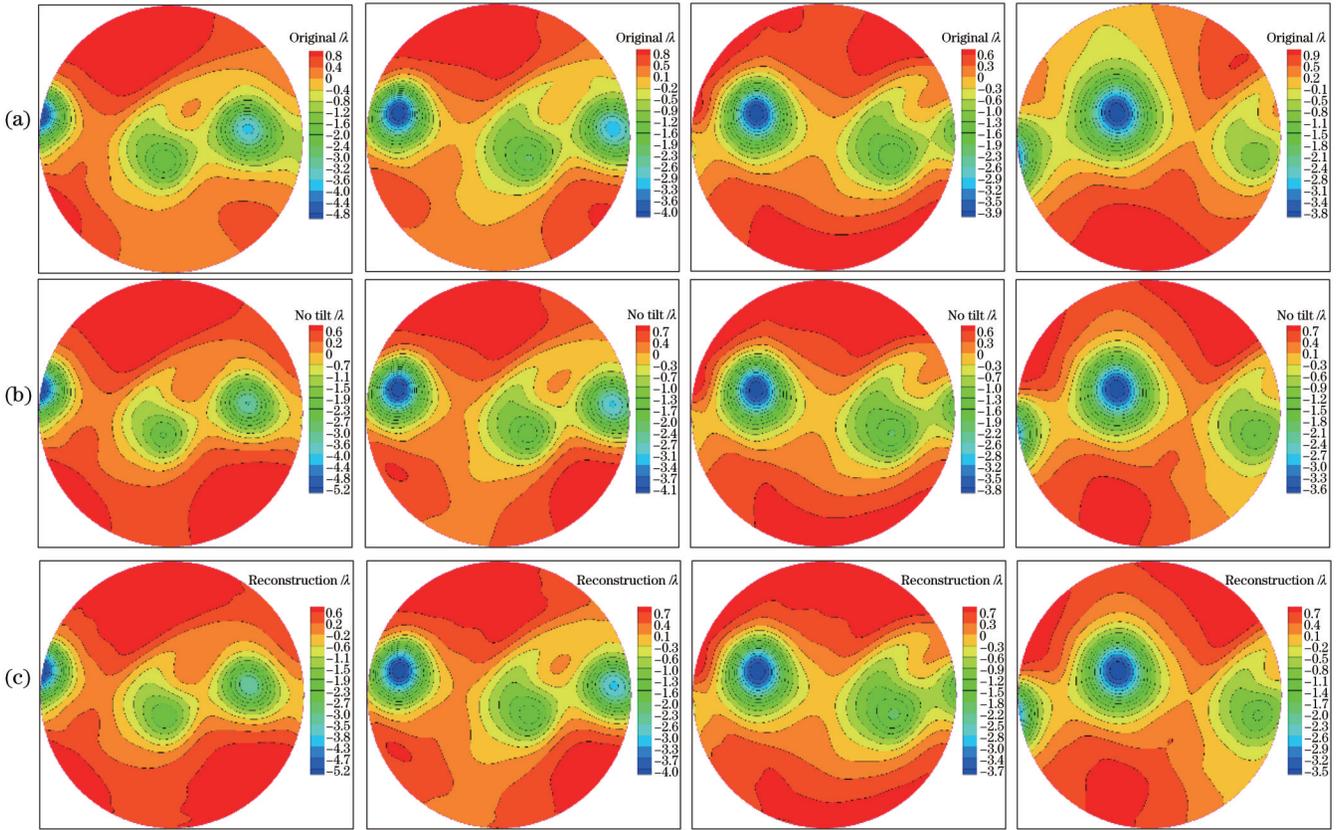


图 4 不同时刻的波前分布。(a) 原始; (b) 去倾斜; (c) 重构

Fig. 4 Wavefront distributions at different time. (a) Original; (b) de-tilt; (c) reconstruction

差随阶数增加而减小,低阶大尺度相差占比更大;加权系数在不同时刻的散点图扩散区域较大,证明波前随时间变化较大,不同时刻的波前分布差异较大。图 6 是当 $K=217$ 时,只用前 k 阶(包含 k 阶)重构波前,与波前拟合度情况,其中 D_{rms} 是均方根光程差,单位是波长 λ 。 D_{rms} 值随阶数 k 增加而降低,但下降趋势逐渐减缓,进一步证明波前的低阶相差占比大;当 $K=217$ 时,不同时刻残差散点图的 D_{rms} 值均低于 0.006λ ,进一步证明本文所选取的 Zernike 多项式阶数能够很好地复原波面形状,重构前后的波前差异在可接受范围之内。

基于 2 万帧时间系列波前数据,图 7 给出了稳态波

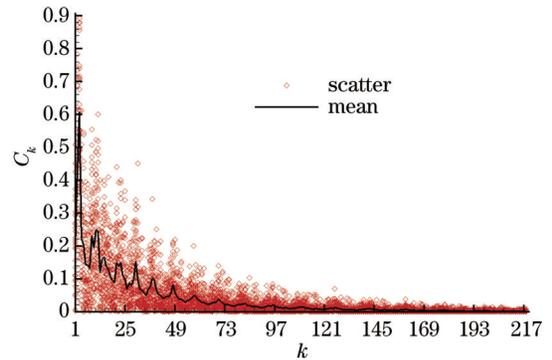


图 5 Zernike 多项式系数

Fig. 5 Zernike polynomial coefficient

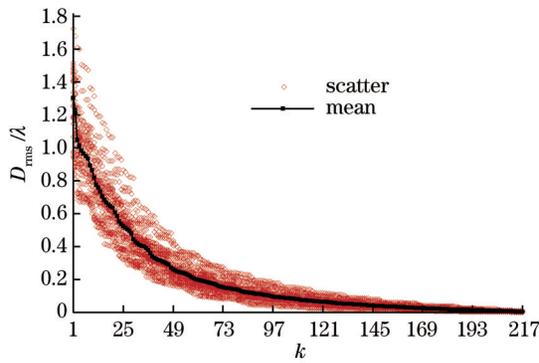


图 6 波前残差

Fig. 6 Wavefront residual

前与波前的第 1 阶模态, 稳态波前取时间系列波前数据的平均值得到。波前第 1 阶模态与稳态波前在空间的分布极为相似, 在量级上也较为接近, 二者对应的峰谷值约为 $PV \approx 3.0\lambda$ 。本文采用 Z-POD 方法在进行波前模态的 POD 时, 没有扣除稳态相差, 因此, 理论上第 1 阶模态应该与稳态波前对应。

图 8 给出了波前第 2~5 阶模态的分布。这 4 阶模态在流向上呈现出明显的周期性, 并且第 2 阶与 3 阶、第 4 阶与 5 阶近似为配对关系。这些结构特征符合圆柱绕流尾迹流动卡门涡街在空间上的分布特征。

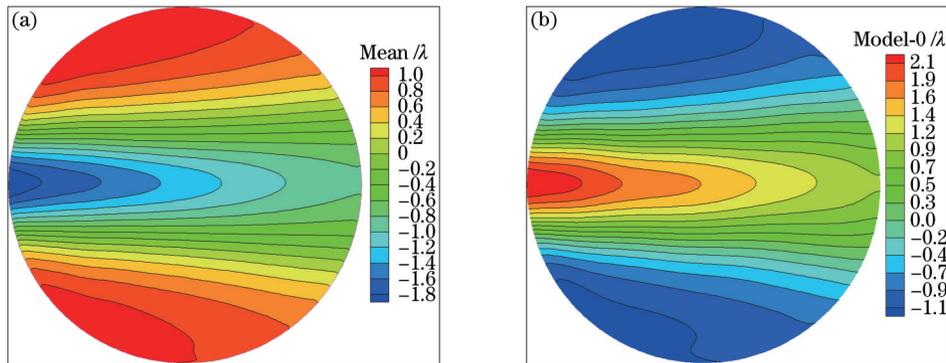


图 7 稳态波前与第 1 阶模态的比较。(a) 稳态波前; (b) 第 1 阶模态

Fig. 7 Comparison between steady-state wavefront and 1st mode. (a) Steady-state wavefront; (b) 1st mode

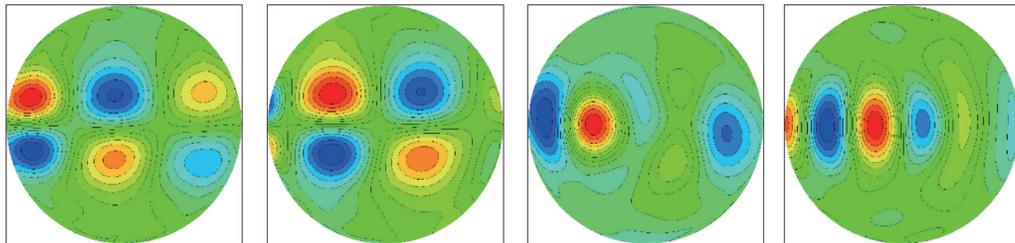


图 8 波前第 2~5 阶模态分布

Fig. 8 2nd to 5th mode distributions of wavefront

图 9 是采用不同阶模态重构的在 4 个不同时刻的波前, 与图 4 的时刻是对应的, 给出了用前 10 阶模态、49 阶模态及其完整的 217 阶模态重构波前的结果。用前 10 阶模态重构, 能够基本复原波面大尺度涡结构轮廓; 用前 49 阶模态 (含能在 97% 以上) 重构波前, 给出波面更精细结构, 并与图 4(c) 中的波前分布拟合度逐渐接近; 用完整的 $K=217$ 阶模态重构波前, 与图 4(c) 中的波前分布不存在本质差异, 甚至在细节上都非常一致。

图 10 给出了各阶模态对应的特征值及用式 (8) 计算的总能量百分比分布。第 1 阶模态近似为稳态相差, 特征值 $\lambda_1 \approx 0.80$, 能量占比约 44%, 证明波前的稳态相差占比大。前 10 阶模态能量占比约 88%, 前 49 阶模态能量占比在 97% 以上, 而 50~217 阶模态能量占比仅为 3% 左右。从图 9 重构的波前分布可知, 虽然

高阶模态能量占比并不高, 但对波前精细结构分布有着直接影响。

图 11 是模态加权系数的变化及功率谱分布, 给出了第 1~5 阶和 $K=217$ 阶模态的加权系数分布情况, 模态加权系数由式 (9) 计算。模态加权系数随时间发展的变化呈现出明显的周期性, 并随阶数增加呈现整体下降趋势, 第 $K=217$ 阶模态的加权系数接近于零。功率谱分布存在明显的尖峰频率 $f=220$ Hz、 $f=450$ Hz, 根据上文图 3 参考点 B 的速度分量 V 的分析, 这两个尖峰频率近似为圆柱绕流尾迹流动卡门涡街结构运动的主频和倍频。

4 结 论

针对 POD 难以同时用于高时间分辨率与高采样帧数随机场的统计分析的问题, 本文建立了 Z-POD 方

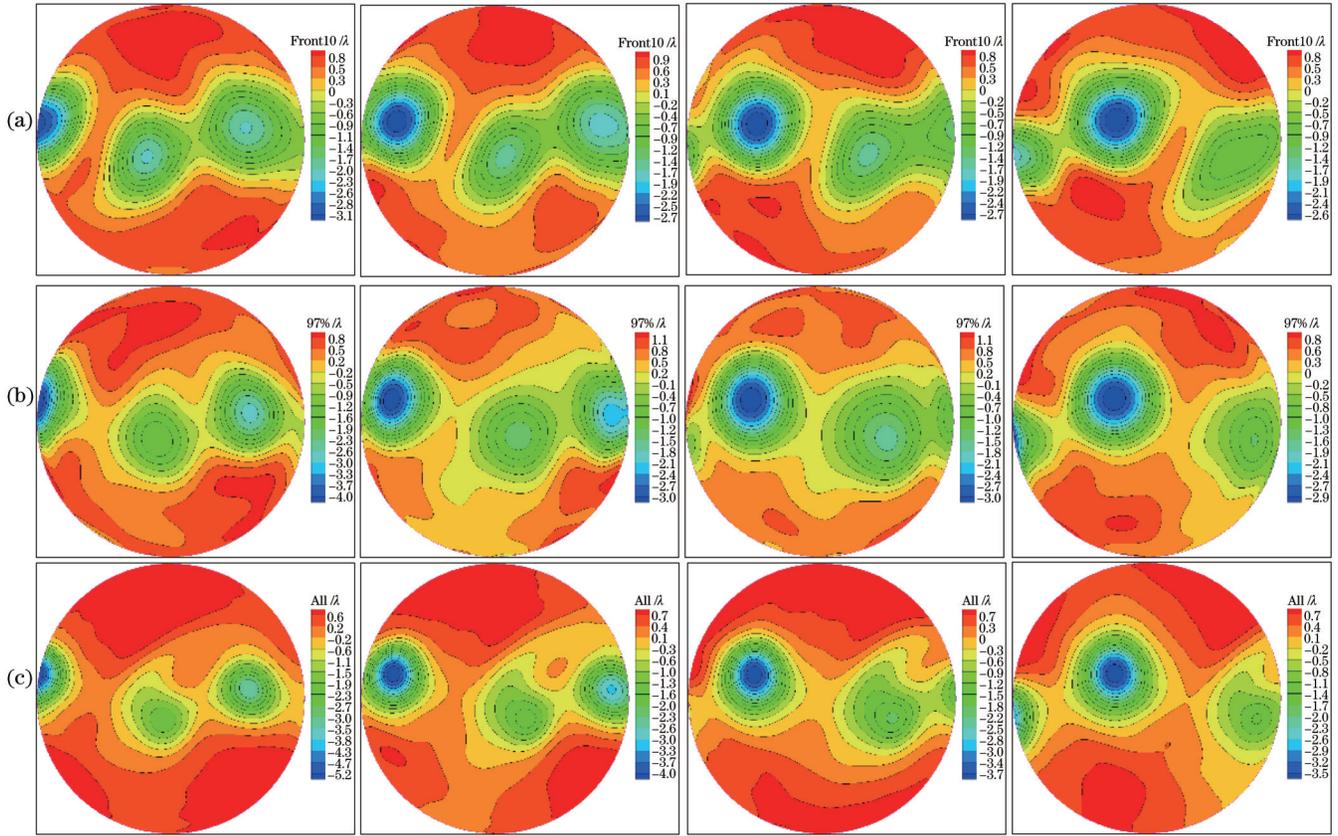


图 9 用不同阶模态重构的波前。(a)10;(b)49;(c)217

Fig. 9 Wavefront reconstruction with different modes. (a) 10; (b) 49; (c) 217

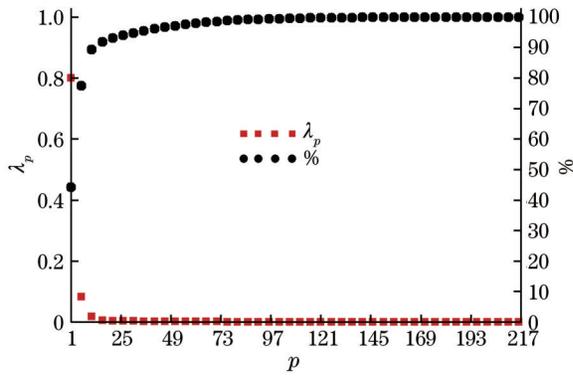


图 10 各阶模态特征值及能量百分比分布

Fig. 10 Characteristic values and energy percentage distribution of each mode

法,用于时间变化系列气动光学效应波前模态分析。Z-POD 方法在原有 POD 方法的基础上,引入基于 Zernike 多项式的波前重构环节,由对波前本身改为对 Zernike 多项式加权系数开展 POD,由于基于 Zernike 多项式的波前重构对波前具有降维处理功能,通常用几百阶多项式就能够复原复杂波面形状,同时对波面离散点数和采样帧数没有严格限制,因此,Z-POD 方法的关联矩阵维数显著降低,计算效率显著提高,并且能够保证波前模态分析具有足够高的时空分辨率。在圆柱绕流尾迹流动卡门涡街产生的时间系列波前数据

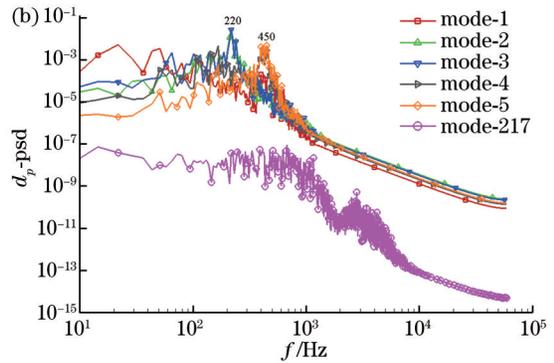
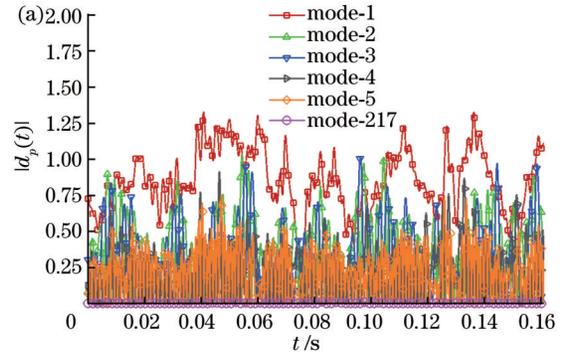


图 11 模态加权系数的变化及功率谱分布。(a)随时间的变化;(b)功率谱分布

Fig. 11 Variation and power spectrum distribution of mode weighting coefficient. (a) Variation with time; (b) power spectrum distribution

分析中,Z-POD方法同样具备用少数阶模态就能够复原原始波面形状的优点,其中前1阶、10阶和49阶模态能量占比分别在44%、88%和97%以上,用完整的 $K=217$ 阶模态重构的波前与原始波前不存在本质差异。Z-POD方法已经得到国家发明专利授权,由于Zernike多项式波前重构对于环形域、正方形域也是适用的,故该方法也适用于这类区域的波前模态统计分析,同时还可以推广到二维的图像、流场和信号等的分析处理。

参 考 文 献

- [1] Cicchiello J M, Jumper E J. Low-order representation of fluid-optic interactions associated with a shear layer[C]//39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 8-11, 2001, Reno, NV, USA. Reston: AIAA Press, 2001: 952.
- [2] 吴琳, 房建成, 杨照华. 本征正交分解在气动光学畸变仿真中的分析与应用[J]. 红外与毫米波学报, 2007, 26(4): 312-316.
Wu L, Fang J C, Yang Z H. Proper orthogonal decomposition applied in the analysis of simulating aero-optical distortions[J]. Journal of Infrared and Millimeter Waves, 2007, 26(4): 312-316.
- [3] Gao Q, Yi S H, Jiang Z F, et al. Temporal evolution of the optical path difference of a supersonic turbulent boundary layer [J]. Chinese Physics B, 2013, 22(1): 014202.
- [4] Mathews E R, Wang K, Wang M, et al. LES analysis of hemisphere-on-cylinder turret aero-optics[C]//52nd Aerospace Sciences Meeting, January 13-17, 2014, National Harbor, Maryland. Reston: AIAA Press, 2014: 323.
- [5] Mathews E R, Wang K, Wang M, et al. LES of an aero-optical turret flow at high Reynolds number[C]//54th AIAA Aerospace Sciences Meeting, January 4-8, 2016, San Diego, California, USA. Reston: AIAA Press, 2016: 1461.
- [6] Mathews E R, Wang K, Wang M, et al. Numerical investigation of aero-optical distortions over a hemisphere-on-cylinder turret with gaps[C]//46th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference, June 22-26, 2015, Dallas, TX, USA. Reston: AIAA Press, 2015: 3248.
- [7] Kalensky M, Gordeyev S, Jumper E J. In-flight studies of aero-optical distortions around AAOL-BC[C]//AIAA AVIATION Forum, June 17-21, 2019, Dallas, Texas, USA. Reston: AIAA Press, 2019: 3253.
- [8] Burns W R, Jumper E J, Gordeyev S. A robust modification of a predictive adaptive-optic control method for aero-optics[C]//47th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference, June 13-17, 2016, Washington, DC, USA. Reston: AIAA Press, 2016: 3529.
- [9] De Lucca N G, Gordeyev S, Jumper E J, et al. Effects of acoustic waves on optical wavefronts in flight on AAOL-T[C]//48th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference, June 5-9, 2017, Denver, Colorado, USA. Reston: AIAA Press, 2017: 3832.
- [10] Sabha S, Sashidhar D, Wilcox C C, et al. Dynamic mode decomposition for aero-optic wavefront characterization[J]. Optical Engineering, 2022, 61(1): 013105.
- [11] Lumley J L. The structure of inhomogeneous turbulence[M]//Yaglom A M, Tatarski V I. Atmospheric turbulence and wave propagation. Moscow: Nauka, 1967: 166-178.
- [12] Lumley J L, Poje A. Low-dimensional models for flows with density fluctuations[J]. Physics of Fluids, 1997, 9(7): 2023-2031.
- [13] Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1987, 45(3): 561-571.
- [14] Breuer K S, Sirovich L. The use of the Karhunen-Loève procedure for the calculation of linear eigenfunctions[J]. Journal of Computational Physics, 1991, 96(2): 277-296.
- [15] 谢文科, 姜宗福. 气动光学畸变波前的本征正交分解和低阶近似[J]. 中国激光, 2007, 34(4): 491-495.
Xie W K, Jiang Z F. Proper orthogonal decomposition and low dimensional approximation of aero-optical aberrated wavefronts [J]. Chinese Journal of Lasers, 2007, 34(4): 491-495.
- [16] Liang Y C, Lee H P, Lim S P, et al. Proper orthogonal decomposition and its applications: part I: theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 252(3): 527-544.
- [17] 陈勇, 谢伟明, 袁强, 等. 一种波前特性分析方法及系统: CN114238862B[P]. 2022-09-13.
Chen Y, Xie W M, Yuan Q, et al. Wavefront characteristic analysis method and system: CN114238862B[P]. 2022-09-13.
- [18] 赵德修. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990: 110-112.
Zhao D X. Linear algebra[M]. Beijing: Higher Education Press, 1990: 110-112.
- [19] 陈勇, 谢伟明, 路大举, 等. 吊窗尾迹流动非稳态气动光学效应研究[J]. 光学学报, 2020, 40(16): 1601001.
Chen Y, Xie W M, Lu D J, et al. Study on unsteady aero-optical effect of turret wake[J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(16): 1601001.
- [20] Tamaki Y, Fukushima Y, Kuya Y, et al. Physics and modeling of trailing-edge stall phenomena for wall-modeled large-eddy simulation[J]. Physical Review Fluids, 2020, 5(7): 074602.
- [21] Sebastian K, Shu C W. Multidomain WENO finite difference method with interpolation at subdomain interfaces[J]. Journal of Scientific Computing, 2003, 19(1): 405-438.
- [22] Jameson A, Yoon S. LU implicit schemes with multiple grids for the Euler equations[C]//24th Aerospace Sciences Meeting, January 6-9, 1986, Reno, NV, USA. Reston: AIAA Press, 1986: 105.

Zernike and Proper Orthogonal Decomposition of Wavefront Modes of Aero-Optical Effects

Chen Yong¹, Li Yudong¹, Yuan Qiang^{1*}, Yao Xianghong¹, Shen Junqi¹, Chang Wei²,
Li Hongxun¹

¹Facility Design and Instrumentation Institute, China Aerodynamics Research and Development Center,
Mianyang 621000, Sichuan, China;

²Institute of Computational Aerodynamics, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang
621000, Sichuan, China

Abstract

Objective Proper orthogonal decomposition (POD) method has been widely applied to time-dependent field analysis, but its direct method and snapshot method both have their inherent problems. The former makes it difficult to solve eigenvalues and eigenvectors of correlation matrices, and the limited sampling number of the latter will affect statistical random field analysis. The direct method needs to solve eigenvalues and eigenvectors of spatial correlation matrices, and the correlation matrix dimensions are the spatial discrete points of the field. When there are more discrete points in the space, the matrix dimensions are high, which results in a large amount of computation, consumed time, occupied memory, and even difficult solutions. The snapshot method is to solve temporal correlation matrices. Generally, by sampling about 200 frames, the correlation matrix dimensions and computation amount are significantly reduced, which makes the POD method practical and operable. However, the few sampling frames will affect the statistical analysis of random field modes, and the calculated modes will vary with the frame number and interval time between frames. Thus, the Zernike and proper orthogonal decomposition (Z-POD) method based on the Zernike polynomial weighted coefficient is established for statistical wavefront mode analysis of aero-optical effects.

Methods The Z-POD method which introduces the wavefront reconstruction method based on Zernike polynomials is changed from the decomposition of the wavefront itself to that of the weighted coefficients of Zernike polynomials. For the circle domain, given the Zernike polynomial order, weighted coefficients correspond to wavefront distribution one by one, and polynomials of several hundred orders are usually enough to recover various complex wavefront shapes. Since the polynomial order is far less than the discrete point number in the wavefront space, the correlation matrix dimensions are reduced, with reduced computation amount and significantly improved computation calculation efficiency. The Z-POD method does not lose spatial resolution and does not need to limit the maximum samples. Therefore, the temporal statistical characteristics are not affected and predicted wavefront modes have high spatio-temporal resolution.

Results and Discussions To verify the effectiveness of the Z-POD method, we employ the large eddy simulation (LES) method to simulate flow around a cylinder and calculate the time series aero-optical effect wavefront generated by the Karman vortex street structure in the cylinder wake for wavefront modal analysis. The spatial resolution of the wavefront is 100×100 , the sampled frame number is 20000, and the order of Zernike polynomials is 217. First-order mode and steady-state wavefront distribution are similar (Fig. 7), second-order and third-order modes, and fourth-order and fifth-order modes are approximately paired with each other (Fig. 8). The first ten modes can restore the wavefront shape, the first 49 modes contain more than 97% energy, and the wavefront reconstructed with the complete modes has no essential differences from the original wavefront (Figs. 9 and 10). The modal weighted coefficients and their power spectrum decrease with increasing order. The peak frequencies of the power spectrum of weighted coefficients of the first five modes are consistent with those of fluctuation velocity at the center point of the optical window, corresponding to the main frequency of Karman vortex street, with the Strouhal number of about 0.22 (Figs. 3 and 11).

Conclusions As it is difficult for us to employ the POD method for statistical analysis of random fields with high spatial resolution and high sampling frames, the Z-POD method is proposed for wavefront modal analysis of time-dependent series aero-optical effects. Based on the original POD method, the Z-POD method introduces wavefront reconstruction based on Zernike polynomials and carries out POD of the weighted coefficients of Zernike polynomials instead of the wavefront itself. Since wavefront reconstruction based on Zernike polynomials has the function of dimensionality reduction for wavefront, the complex wavefront shape can be usually restored with polynomials of several hundred orders, and there is no strict restriction on the number of discrete points and sampling frames of wavefront. Therefore, the correlation matrix dimensions for the Z-POD method are significantly reduced, the computational efficiency is significantly improved, and the

wavefront modal analysis can be guaranteed to have a sufficiently high spatio-temporal resolution. In the time series data analysis of wavefront by Karman vortex generated in the wake flow around a cylinder, the Z-POD method also has the advantage of restoring the original wavefront shape with a few modes, and the energy ratios of the first order, 10th order, and 49th order modes are above 44%, 88%, and 97% respectively. Additionally, the wavefront reconstructed with the whole 217 modes is not substantially different from the original wavefront. The Z-POD method has been authorized by a China National invention patent. Since the wavefront reconstruction method based on Zernike polynomials is also applicable to the ring domain and square domain, it is also suitable for statistical analysis of wavefront modes on such domains, and can also be extended to analysis and processing of images, flow fields, and signals on two-dimensional fields.

Key words aero-optics; wavefront mode; proper orthogonal decomposition; Zernike polynomial