

## 各向异性海洋湍流下三种涡旋光束的信道容量

王明军<sup>1,2,3\*</sup>, 刘豪振<sup>1</sup>, 张佳琳<sup>1</sup>, 王姣<sup>4\*\*</sup><sup>1</sup>西安理工大学自动化与信息工程学院, 陕西 西安 710048;<sup>2</sup>西安市无线光通信与网络研究重点实验室, 陕西 西安 710048;<sup>3</sup>陕西理工大学物理与电信工程学院, 陕西 汉中 723001;<sup>4</sup>陕西科技大学电子信息与人工智能学院, 陕西 西安 710021

**摘要** 海洋湍流和光源参数对涡旋光束的信道容量有十分重要的影响。本文根据 Rytov 近似理论, 利用有限外尺度且不稳定分层的各向异性海洋湍流功率谱, 并引入  $xy$  平面上的两个各向异性因子来研究完美涡旋(PV)光束、拉盖尔高斯(LG)光束和贝塞尔高斯(BG)光束在海洋湍流下的信道容量, 数值模拟了束腰半径、接收孔径直径和海洋湍流参数等对三种光束信道容量的影响。数值结果表明: 当传输距离在 30~70 m 时, 较小束腰半径(小于 4 mm)的 PV 或者 LG 光束可获得比 BG 光束更大的信道容量; 但较大束腰半径(大于 12 mm)的 PV 或者 LG 光束的信道容量却大于 BG 光束。此外, 当束腰半径小于 2 mm 时, PV 光束的信道容量要大于 LG 和 BG 光束, 表明采用窄束腰半径(小于 2 mm)的 PV 光束相比 LG 和 BG 光束可以增大光通信系统的信道容量。本文的研究结果对海洋环境中光通信光源参数的选择具有重要意义。

**关键词** 海洋光学; 信道容量; 各向异性海洋湍流功率谱; 涡旋光束

中图分类号 P733.3

文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS230652

## 1 引言

水下无线光通信因其数据传输速率高<sup>[1]</sup>、能耗低和抗干扰能力强<sup>[2]</sup>等优点, 已被广泛应用于水下图像传输<sup>[3]</sup>、水下视频传输<sup>[4]</sup>、水下航行器<sup>[5]</sup>、水下搜救<sup>[6]</sup>等领域。涡旋光束携带有轨道角动量(OAM), 且不同 OAM 模式之间相互正交, 因此利用轨道角动量这一新维度可以显著提升水下无线光通信系统的信道容量<sup>[7]</sup>。

信道容量是衡量通信系统性能优劣的一个重要指标。近年来, 涡旋光束在海洋环境中的信道容量受到了广泛的研究。2016 年, 程明建等<sup>[8]</sup>根据 Nikishov 海谱模型, 研究了无衍射贝塞尔高斯(BG)光束在海洋湍流中的信道容量, 并与拉盖尔高斯(LG)光束作了对比, 表明无衍射 BG 光束在减轻海洋湍流的影响、提高信道容量方面优于 LG 光束。2020 年, 翟爽等<sup>[9]</sup>基于 Nikishov 海谱模型, 利用信道容量和迹距离研究了 LG 光束在海洋环境下的传播特性。2021 年, 翟爽等<sup>[10]</sup>根据 Nikishov 海谱模型, 研究了无衍射 BG 光束在海洋湍流中的量子信道容量。2022 年, 刘瑞熙等<sup>[11]</sup>基于 Elamassie 海谱模型, 研究了 LG 光束在海洋湍流下的信道容量。但是, Nikishov 谱和 Elamassie 谱都是在湍

流外尺度无限大的假设下得出来的, 这导致了零空间波数区域的奇异性问题<sup>[12]</sup>。考虑到 Nikishov 谱和 Elamassie 谱的局限性, Li 等<sup>[12]</sup>提出了一种新的具有外尺度和涡流扩散率比的海洋折射率波动空间功率谱, 因此更符合实际的海洋环境。

不同于 LG 光束和 BG 光束, 完美涡旋(PV)光束的初始径向轮廓与拓扑电荷无关, 使得具有不同拓扑电荷的 PV 光束具有相同的初始环宽度和半径, PV 光束的这种特性对于 OAM 复用系统的固定孔径发射机, 可以利用许多高阶 OAM 模式, 能极大地提高光通信系统的信道容量<sup>[13]</sup>。在一个双通道 OAM 多路复用的自由空间光通信链路中, Shao 等<sup>[14]</sup>证明了 PV 光束可以在显微镜物镜和正常透镜的帮助下同轴传输超过 1 m, 并且在相同环境下, 相比 LG 光束, 采用 PV 光束的通信系统性能更优。文献<sup>[15]</sup>对比了 PV、BG 和 LG 光束在相同大气湍流下的传播特性, 表明较小束腰的 PV 光束的传输性能要优于 BG 和 LG 光束。

综上所述, 在有限外尺度且不稳定分层的各向异性海洋湍流中, PV 光束的信道容量还没有被研究, 海洋湍流下 PV 光束的信道容量是否仍强于 LG 和 BG 光束尚不可知。本文在 Li 等<sup>[12]</sup>的海谱模型上, 不再保持  $xy$  平面上湍流单元的圆对称性, 并引入了描述  $xy$  平面

收稿日期: 2023-03-09; 修回日期: 2023-04-12; 录用日期: 2023-04-24; 网络首发日期: 2023-05-08

基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划培育项目(92052106)、国家自然科学基金(61771385, 62101313)、陕西省杰出青年科学基金(2020JC-42)

通信作者: \*wangmingjun@xaut.edu.cn; \*\*wangj922@sust.edu.cn

的两个各向异性因子来研究 PV、LG 和 BG 光束在各向异性海洋湍流下的信道容量。推导了球面波在各向异性不稳定分层海洋湍流中传播的空间相干长度,数值模拟了这三种涡旋光束的信道容量随光源参数和海洋湍流参数的变化曲线。

## 2 理论模型

如图 1 所示,假设 PV、BG、LG 光束在海洋湍流中均沿  $z$  方向传播, $\mu_x$ 和 $\mu_y$ 分别是湍流漩涡在  $x$  方向和  $y$  方向的两个各向异性因子。

在柱坐标系下,PV 光束在无湍流自由空间中传输至  $z$  处的复振幅表达式<sup>[13]</sup>为

$$E_{l_0}(\rho, \phi, z) = -\frac{i^{l_0+1} k A_0}{2az} \exp\left(ikz + \frac{ik\rho^2}{2z} + il_0\phi\right) \exp\left(\frac{b^2 - c^2}{4a}\right) J_{l_0}\left(\frac{bc}{2a}\right), \quad (1)$$

式中: $(\rho, \phi)$ 是柱坐标系下的二维位置矢量; $A_0$ 是光源参数; $l_0$ 是发送的 OAM 模式; $J_{l_0}(x)$ 是  $l_0$  阶第一类贝塞尔函数;参数  $a = 1/\omega_0^2 - ik/(2z)$ ,  $b = 2r_0/\omega_0^2$ ,  $c =$

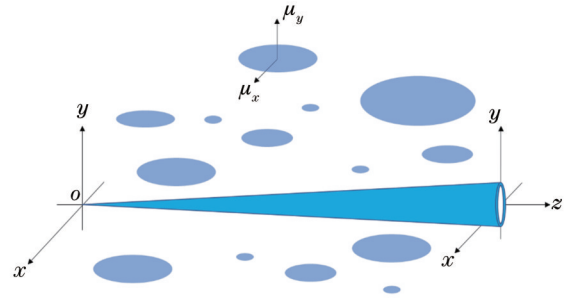


图 1 涡旋光束在海洋湍流中的传播

Fig. 1 Propagation of vortex beam in ocean turbulence

$-k\rho/z$ , 其中  $\omega_0$  和  $r_0$  分别是 PV 光束的环宽度和束腰半径。

根据 Rytov 近似理论,PV 光束在海洋湍流中传输至  $z$  处的复振幅<sup>[13]</sup>可以表示为

$$E(\rho, \phi, z) = E_{l_0}(\rho, \phi, z) \exp[\varphi_1(\rho, \phi, z)], \quad (2)$$

式中, $\varphi_1(\rho, \phi, z)$ 是由海洋湍流引起的随机相位扰动。PV 光束在海洋湍流中传输的二阶交叉谱密度<sup>[16]</sup>可以表示为

$$W_i(\rho, \phi, \rho', \phi', z) = \langle E(\rho, \phi, z) E^*(\rho', \phi', z) \rangle_i \approx E_{l_0}(\rho, \phi, z) E_{l_0}^*(\rho', \phi', z) \times \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}{\rho_0^2}\right], \quad (3)$$

式中: $*$ 表示复共轭; $\langle \cdot \rangle_i$ 表示对海洋湍流进行系综平均; $\rho_0$ 是球面波在各向异性海洋湍流中传播的空间相干长度,其表达式<sup>[17]</sup>为

$$\rho_0 = \left[ \frac{\pi^2 k^2 z}{3} \int_0^\infty \kappa^3 \phi_{\text{ocean}}(\kappa) d\kappa \right]^{-1/2}, \quad (4)$$

式中: $k = 2\pi/\lambda$ 是波数; $\phi_{\text{ocean}}(\kappa)$ 是各向异性且不稳定分层海洋湍流功率谱<sup>[18]</sup>,可以表示为

$$\phi_{\text{ocean}}(\kappa) = \varepsilon^{-1/3} \beta A^2 \chi_T \mu_x \mu_y \frac{1 + 4.6(\mu_x^2 \kappa_x^2 + \mu_y^2 \kappa_y^2)^{1/3} \eta^{2/3}}{4\pi(\mu_x^2 \kappa_x^2 + \mu_y^2 \kappa_y^2 + \kappa_0^2)^{11/6}} \times \left[ \exp\left(-\frac{\mu_x^2 \kappa_x^2 + \mu_y^2 \kappa_y^2}{K_T^2}\right) + \frac{1}{\omega^2 d_r} \exp\left(-\frac{\mu_x^2 \kappa_x^2 + \mu_y^2 \kappa_y^2}{K_S^2}\right) - \frac{1 + d_r}{\omega d_r} \exp\left(-\frac{\mu_x^2 \kappa_x^2 + \mu_y^2 \kappa_y^2}{K_{TS}^2}\right) \right], 0 < \kappa < \infty, \quad (5)$$

式中: $A$ 是热膨胀系数;空间频率  $\kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}$ ,  $\kappa_x$  和  $\kappa_y$  分别是空间频率在  $x$  方向和  $y$  方向的分量; $\mu_x$ 和 $\mu_y$ 是  $x$  方向和  $y$  方向的两各向异性因子,当  $\mu_x = \mu_y = 1$  时,式(5)为各向同性的海洋湍流功率谱; $\varepsilon$ 是单位质量流体的湍流动能耗散速率,取值范围为  $10^{-10} \sim 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}^3$ ;  $\chi_T$ 是温度方差耗散速率,取值范围为  $10^{-10} \sim 10^{-2} \text{ K}^2/\text{s}$ ;  $\kappa_0 = 1/L_0$ ,  $L_0$ 和 $\eta$ 分别是湍流外尺度和内尺度, $L_0$ 的取值范围是  $1 \sim 100 \text{ m}$ <sup>[12]</sup>,  $\eta$ 的取值范围为  $10^{-4} \sim 10^{-2} \text{ m}$ ;  $\omega$ 是温度盐度贡献比,取值范围为  $-5 \sim 0$ ,  $\omega$ 取  $-5$ 和 $0$ 分别代表完全由温度扩散和盐扩散引起的海洋湍流;参数<sup>[13]</sup> $K_i = R_i/\eta$ ,  $R_i = \sqrt{3} [W_i - 1/3 + 1/(9W_i)]^{3/2} / Q^{3/2}$ , 这里  $i = T, S, TS$ ,  $W_i = \{ [Pr_i^2 / (6\beta Q^{-2})^2 - Pr_i / (81\beta Q^{-2})]^{1/2} -$

$[1/27 - Pr_i / (6\beta Q^{-2})]^{1/3}$ ,  $Q$ 是无量纲常数,  $\beta$ 是奥布霍夫-科尔辛常数,  $Pr_T$ 是温度普朗特常数,  $Pr_S$ 是盐度普朗特常数,  $Pr_{TS} = 2Pr_T Pr_S / (Pr_T + Pr_S)$ ;  $d_r$ 是涡流扩散率,其表达式<sup>[13]</sup>为

$$d_r \approx \begin{cases} 1 / \left[ 1 - \sqrt{(|\omega| - 1) / |\omega|} \right]; & |\omega| \geq 1 \\ 1.85|\omega| - 0.85; & 0.5 \leq |\omega| \leq 1 \\ 0.15|\omega|; & |\omega| \leq 0.5 \end{cases} \quad (6)$$

在式(5)中,通过以下变量代换<sup>[19]</sup>:

$$\kappa_x = \frac{q_x}{\mu_x} = \frac{q \cos \theta}{\mu_x}, \quad \kappa_y = \frac{q_y}{\mu_y} = \frac{q \sin \theta}{\mu_y}, \quad q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}, \quad (7)$$

则  $d\kappa_x d\kappa_y = \frac{dq_x dq_y}{\mu_x \mu_y} = \frac{qdq d\theta}{\mu_x \mu_y}$ , 式(5)变为

$$\phi_{\text{ocean}}(q) = \varepsilon^{-1/3} \beta A^2 \chi_{\Gamma} \mu_x \mu_y \frac{1 + 4.6q^{2/3} \eta^{2/3}}{4\pi(q^2 + \kappa_0^2)^{11/6}} \times \left[ \exp\left(-\frac{q^2}{K_{\Gamma}^2}\right) + \frac{1}{w^2 d_{\Gamma}} \exp\left(-\frac{q^2}{K_S^2}\right) - \frac{1 + d_{\Gamma}}{w d_{\Gamma}} \exp\left(-\frac{q^2}{K_{TS}^2}\right) \right]. \quad (8)$$

将式(8)代入式(4)并利用积分公式<sup>[13]</sup>

$$\int_0^{\infty} \kappa^{2\mu} \frac{\exp\left(-\frac{\kappa^2}{K_m^2}\right)}{(\kappa_0^2 + \kappa^2)^{11/6}} d\kappa = \frac{1}{2} \kappa_0^{2\mu-8/3} \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) \times U\left(\mu + \frac{1}{2}; \mu - \frac{1}{3}; \frac{\kappa_0^2}{K_m^2}\right), \mu > -\frac{1}{2}, \quad (9)$$

可以得到各向异性海洋湍流中球面波空间相干长度的解析表达式为

$$\rho_0 = \left\{ \frac{\pi k^2 z (\mu_x^2 + \mu_y^2) \varepsilon^{-1/3} \beta A^2 \chi_{\Gamma}}{48 \mu_x^2 \mu_y^2} \left[ \kappa_0^{1/3} \Delta_1 + 4.6 \kappa_0 \eta^{2/3} \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \Delta_2 \right] \right\}^{-1/2}, \quad (10)$$

$$\Delta_1 = U\left(2; \frac{7}{6}; \frac{\kappa_0^2}{K_{\Gamma}^2}\right) + \frac{1}{w^2 d_{\Gamma}} U\left(2; \frac{7}{6}; \frac{\kappa_0^2}{K_S^2}\right) - \frac{1 + d_{\Gamma}}{w d_{\Gamma}} U\left(2; \frac{7}{6}; \frac{\kappa_0^2}{K_{TS}^2}\right), \quad (11)$$

$$\Delta_2 = U\left(\frac{7}{3}; \frac{3}{2}; \frac{\kappa_0^2}{K_{\Gamma}^2}\right) + \frac{1}{w^2 d_{\Gamma}} U\left(\frac{7}{3}; \frac{3}{2}; \frac{\kappa_0^2}{K_S^2}\right) - \frac{1 + d_{\Gamma}}{w d_{\Gamma}} U\left(\frac{7}{3}; \frac{3}{2}; \frac{\kappa_0^2}{K_{TS}^2}\right), \quad (12)$$

式中:  $\Gamma(\cdot)$  是 gamma 函数;  $U(\cdot)$  是第二类合流超几何函数。

PV 光束在海洋湍流信道中传播时, 必然会受到湍流的影响, 从而使接收到的 OAM 模式发生串扰, PV 光束经过海洋湍流后的复振幅可写成无穷多本征态的叠加<sup>[13]</sup>, 即

$$E(\rho, \phi, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha_l(l|l_0) \exp(i l \phi), \quad (13)$$

式中, 系数  $\alpha_l(l|l_0)$ <sup>[13]</sup> 可表示为

$$\alpha_l(l|l_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} E(\rho, \phi, z) \exp(-i l \phi) d\phi. \quad (14)$$

对系数  $\alpha_l(l|l_0)$  求湍流系综平均, 可以得到 PV 光束 OAM 模式探测概率密度函数<sup>[15]</sup>为

$$\langle |\alpha_l(l|l_0)|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} W_l(\rho, \phi, \rho', \phi', z) \exp[-i l(\phi - \phi')] d\phi d\phi'. \quad (15)$$

将式(3)代入式(15)得<sup>[13]</sup>

$$\langle |\alpha_l(l|l_0)|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{l_0}(\rho, \phi, z) E_{l_0}^*(\rho', \phi', z) \times \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}{\rho_0^2}\right] \times \exp[-i l(\phi - \phi')] d\phi d\phi'. \quad (16)$$

将式(1)代入式(16)并利用积分等式<sup>[16]</sup>得

$$\int_0^{2\pi} \exp[-i n \phi_1 + \gamma \cos(\phi_1 - \phi_2)] d\phi_1 = 2\pi \exp(-i n \phi_2) I_n(\gamma), \quad (17)$$

可以简化得到 PV 光束 OAM 模式探测概率密度的解析表达式为

$$\langle |\alpha_l(l|l_0)|^2 \rangle = \frac{\pi k^2 A_0^2}{2aa^* z^2} \exp\left(\frac{b^2 - c^2}{4a} + \frac{b^2 - c^2}{4a^*}\right) \times J_{l_0}\left(\frac{bc}{2a}\right) J_{l_0}\left(\frac{bc}{2a^*}\right) \exp\left(-\frac{2\rho^2}{\rho_0^2}\right) I_{l-l_0}\left(\frac{2\rho^2}{\rho_0^2}\right), \quad (18)$$

式中,  $I_{l-l_0}(\cdot)$  是  $l-l_0$  阶第一类修正贝塞尔函数。最后, 可以得到 PV 光束在各向异性且不稳定分层海洋

湍流中传播的 OAM 模式探测概率<sup>[13]</sup>为

$$P_{\text{PV}}(l|l_0) = \frac{\int_0^D \langle |\alpha_l(l|l_0)|^2 \rangle \rho d\rho}{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^D \langle |\alpha_l(m|l_0)|^2 \rangle \rho d\rho}, \quad (19)$$

式中,  $D$  为接收机孔径的直径。当  $l=l_0$  时,  $P_{\text{PV}}(l|l_0)$  表示正确接收发送 OAM 模式的概率, 该值越大表明海洋湍流对 PV 光束的干扰越小。

LG 光束和 BG 光束的 OAM 模式探测概率推导过程与 PV 光束类似, 这里只给出它们的理论表达式。LG 光束的 OAM 模式探测概率密度<sup>[20]</sup>和探测概率的表达式分别为

$$\langle |\beta_l(l|l_0)|^2 \rangle = \frac{4\rho_0!}{\omega^2(z)(\rho_0 + |l_0|)!} \left[ \frac{2\rho^2}{\omega^2(z)} \right]^{|l_0|} \left\{ L_{\rho_0}^{|l_0|} \left[ \frac{2\rho^2}{\omega^2(z)} \right] \right\}^2 \times I_{l-l_0}\left(\frac{2\rho^2}{\rho_0^2}\right) \exp\left[-\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)} - \frac{2\rho^2}{\rho_0^2}\right], \quad (20)$$

$$P_{\text{LG}}(l|l_0) = \frac{\int_0^{\frac{D}{2}} \langle |\beta_l(l|l_0)|^2 \rangle \rho d\rho}{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{D}{2}} \langle |\beta_l(m|l_0)|^2 \rangle \rho d\rho}, \quad (21)$$

式中:  $\omega(z) = r_0 \left[ 1 + (z/z_R)^2 \right]^{1/2}$  是光束传播到  $z$  处的光斑尺寸;  $l_0$  是发送的 OAM 模式;  $p_0$  是径向模式数;  $r_0$  是

束腰半径;  $k = 2\pi/\lambda$  是波数,  $\lambda$  是光波长;  $z_R = kr_0^2/2$  是 Rayleigh 距离;  $L_{p_0}^{l_0}(x)$  是广义 Laguerre 多项式;  $D$  为接收机孔径的直径;  $I_{l-l_0}(\cdot)$  是  $l-l_0$  阶第一类修正贝塞尔函数。

BG 光束的 OAM 模式探测概率密度<sup>[8]</sup>和探测概率的表达式分别为

$$\langle |\delta_l(l|l_0)|^2 \rangle = \left( 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)^{-1} \exp \left[ - \left( \frac{2\rho^2}{r_0^2} + \frac{\eta_0^2}{2} \right) \left( 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)^{-1} - \frac{\eta_0^2}{2} \right] \times \exp \left( - \frac{2\rho^2}{\rho_0^2} \right) \left| J_{l_0} \left( \frac{\eta_0 \rho}{qr_0} \right) \right|^2 I_{l-l_0} \left( \frac{2\rho^2}{\rho_0^2} \right), \quad (22)$$

$$P_{\text{BG}}(l|l_0) = \frac{\int_0^{\frac{D}{2}} \langle |\delta_l(l|l_0)|^2 \rangle \rho d\rho}{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{D}{2}} \langle |\delta_l(m|l_0)|^2 \rangle \rho d\rho}, \quad (23)$$

式中:  $q = 1 + iz/z_0$ ;  $z_0 = kr_0^2/2$  是 Rayleigh 距离;  $l_0$  是发送的 OAM 模式;  $r_0$  是束腰半径;  $\rho = (\rho, \phi)$  是柱坐标系下的二维位置矢量;  $J_{l_0}(x)$  是  $l_0$  阶第一类贝塞尔函数;  $k = 2\pi/\lambda$  是波数,  $\lambda$  是光波长;  $\eta_0$  是决定光束轮廓大小的常数;  $D$  为接收机孔径的直径;  $I_{l-l_0}(\cdot)$  是  $l-l_0$  阶第

一类修正贝塞尔函数。

前面给出了涡旋光束 OAM 模式探测概率的具体公式, 而信道容量可以通过 OAM 模式探测概率量化。信道容量被定义为平均每符号传送的信息量的最大值<sup>[8]</sup>, 即

$$C = \max_{P(l_0)} [H(l_0) - H(l_0|l)], \quad (24)$$

式中:  $H(l_0)$  是信源熵;  $H(l_0|l)$  是条件熵, 发送 OAM 模式  $l_0 \in [-N, N]$ 。经过理论计算, 可以得出信道容量的计算公式为

$$C = \log_2(2N+1) + \frac{1}{2N+1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{l_0=-N}^N P(l|l_0) \left[ \log_2 P(l|l_0) - \log_2 \sum_{l_0=-N}^N P(l|l_0) \right]. \quad (25)$$

### 3 数值模拟及分析

根据上一节的理论模型, 下面对 PV、LG 和 BG 光束的信道容量随不同光源参数和海洋湍流参数的变化关系进行数值模拟。在没有特殊说明时, 以下仿真结果均取波长  $\lambda = 532 \text{ nm}$ <sup>[21]</sup>, 湍流内尺度  $\eta = 10^{-3} \text{ m}$ , 外尺度<sup>[12]</sup>  $L_0 = 50 \text{ m}$ , 热膨胀系数<sup>[11]</sup>  $A = 2.6 \times 10^{-4} \text{ liter/deg}$ 。BG 光束的波形参数  $\eta_0 = 10$ , 因为  $\eta_0$  越大, 海洋湍流对 BG 光束的干扰就越小<sup>[8]</sup>, LG 光束的径向模式数  $p_0 = 0$ , 设置 PV 光束的环宽度  $w_0 = 1.5 \text{ mm}$ , 因为较小的环宽度能有效抵抗海洋湍流的负面影响<sup>[13]</sup>。受海洋湍流的影响, 接收端光斑尺寸会增大, 故设置接收机孔径直径  $D = 0.04 \text{ m}$ 。湍流动能散率  $\epsilon = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^3$ , 温度方差耗散率  $\chi_T = 10^{-7} \text{ K}^2/\text{s}$ , 温度盐度贡献比  $w = -4$ , 各向异性因子  $\mu_x = 2, \mu_y = 3$ , 传输距离  $z = 70 \text{ m}$ , 其他参数为  $\beta = 0.41, Q = 2.5, Pr_T = 0.72, Pr_S = 700$ <sup>[13]</sup>。发送 OAM 模式  $l_0 \in [-N, N]$ ,  $N$  为正整数且在没有特殊说明时  $N$  取 1, 则发送端一共可能发送的 OAM 模式数  $L = 2N+1$ 。

图 2 给出了信道容量随束腰半径  $r_0$  和接收孔径直径  $D$  的变化曲线。图 2(a)~2(c) 是传输距离  $z = 30, 50, 70 \text{ m}$  时, 信道容量随束腰半径  $r_0$  的变化曲线, 可以

看出, 存在一个  $r_0$  值, 使信道容量达到最大, 并且 PV 光束的信道容量峰值大于 BG 和 LG 光束, 随着传输距离的增大, 信道容量峰值点对应的束腰半径  $r_0$  也增大; PV 和 LG 光束的信道容量在  $r_0$  较小时要大于 BG 光束, 但当  $r_0$  的值较大时, BG 光束的信道容量反而大于 PV 和 LG 光束。图 2(d) 给出了信道容量随接收孔径直径的变化曲线, 并设置传输距离  $z = 70 \text{ m}$ , 束腰半径  $r_0$  分别取  $4 \text{ mm}$  和  $13 \text{ mm}$ 。受海洋湍流的影响, 接收孔径的直径应大于 2 倍的束腰半径, 可以看出信道容量随接收孔径的增大而减小并趋于稳定。这是因为接收机孔径的直径增大时, 位于接收孔径中的暗斑面积增大, 在初始孔和接收孔形成的圆柱形信道中发射的光束之间的像差也会增大, 导致 OAM 模式接收概率减小, 从而使信道容量降低<sup>[22]</sup>; 当接收孔径直径继续增大时, 接收 OAM 模式探测概率不再变化, 最终使信道容量趋于稳定。当三种光束的束腰半径均取  $4 \text{ mm}$  时, PV 和 LG 光束的信道容量大于 BG 光束; 而当束腰均取  $13 \text{ mm}$  时, BG 光束的信道容量却大于 PV 和 LG 光束。图 2 中的数值结果表明: 当利用涡旋光束进行水下通信时, 束腰半径是制约 PV、LG 和 BG 光束信道容量大小的重要因素。当传输距离小于  $70 \text{ m}$  而其他参数不变时, 选择较窄束腰半径的 PV 或者 LG 光束能获得比 BG 光束更大的信道容量; 而当

束腰半径的值更大时, PV 和 LG 光束的信道容量却低于 BG 光束; 此外, 当 PV 光束的束腰小于 2 mm 时, 能

获得比 LG 和 BG 光束更大的信道容量, 且在远距离传输时更优。

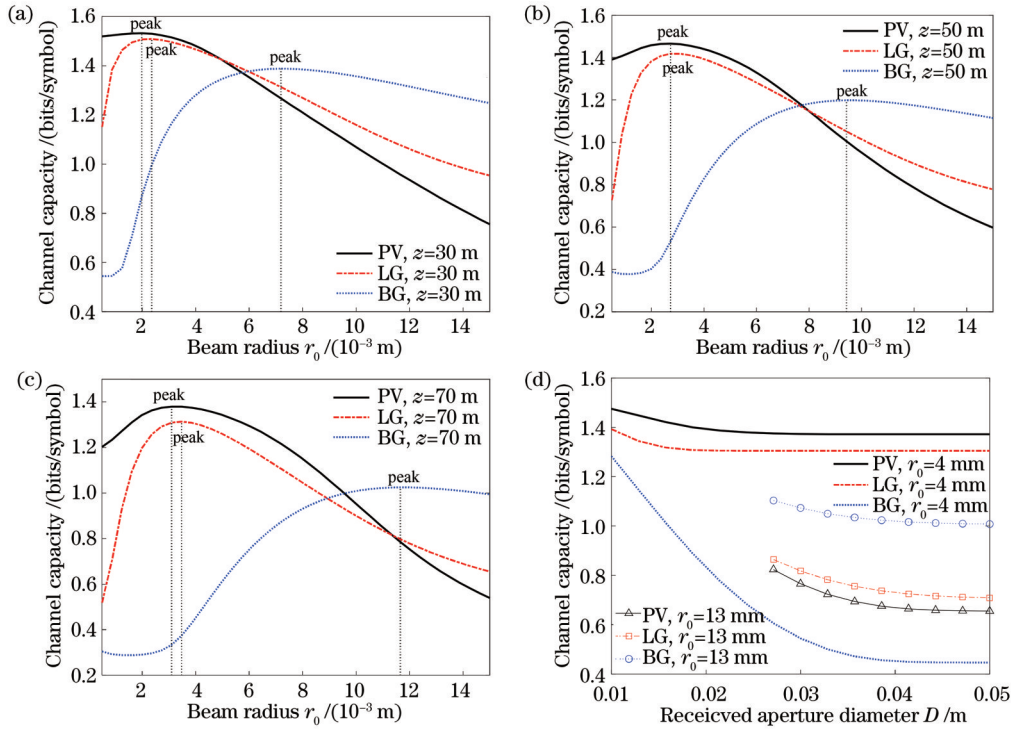


图 2 不同束腰半径和接收孔径直径下三种光束的信道容量。(a)、(b)、(c)束腰半径;(d)接收孔径直径

Fig. 2 Channel capacity of three beams under different beam waist radius and received aperture diameters. (a), (b), (c) Beam waist radius; (d) received aperture diameters

图 3 给出了信道容量随传输距离  $z$  和发送 OAM 模式数  $L$  的变化曲线, 讨论了束腰半径为 4 mm 和 13 mm 两种情况下的信道容量。在图 3(a)中可以看出, 信道容量随着传输距离的增大而减小。当束腰半径均取 4 mm 且传输距离在 30~70 m 时, PV 和 LG 光束的信道容量大于 BG 光束, 并且在远距离传输时更优; 而当束腰半径均取 13 mm 时, BG 光束的信道容量反而大于 PV 和 LG 光束, 这与图 2(a)~(c)中的仿真结果一致。在图 3(b)中, 设置传输距离为 70 m, 可以看出信道容量随着发送 OAM 模式数的增大而增加, 表明通过 OAM 复用可以提升通信系统的信道容量<sup>[7]</sup>。当束腰半径均取 4 mm 时, 无论发送 OAM 模式数为多少, PV 和 LG 光束的信道容量都大于 BG 光束; 而当束腰半径均取 13 mm 时, BG 光束的信道容量反而大于 PV 和 LG 光束。此外, 当发送 OAM 模式数大于 5 时, PV 光束的信道容量大于 LG 光束, 这是因为较大束腰半径的 LG 光束相比 PV 光束更容易受到湍流的影响<sup>[23]</sup>, 导致 OAM 模式发散严重, 接收端 OAM 模式探测概率降低, 从而导致信道容量减少。图 3 中的结果同样表明, 当三种光束的束腰半径相同且其他参数不变时, 选择较小束腰半径的 PV 或者 LG 光束可以获得比 BG 光束更大的信道容量; 而较大束腰半径的 PV 和 LG 光束的信道容量却低于 BG 光束。

图 4 数值模拟了束腰半径均为 4 mm 和 13 mm 时信道容量随不同海洋湍流参数的变化曲线。从图 4(a)中可以看出, 三种光束的信道容量都随湍流内尺度的增大而增加, 这是因为较小的湍流内尺度代表海洋链路中存在更多的湍流涡旋<sup>[13]</sup>, 导致接收端 OAM 模式串扰增强, 从而使信道容量降低。从图 4(b)中可以看出, 当外尺度小于 10 m 时, 信道容量随外尺度的增加仅减小了很低的数值<sup>[24]</sup>, 而当外尺度继续增大时, 信道容量不再减小, 保持在一个较稳定的数值上。在图 4(c)、4(d)中, 信道容量会随湍流动能耗散率  $\epsilon$  的增加而增加; 随温度方差耗散率  $\chi_T$  的增加而减小, 产生这些结果的原因是较小的湍流动能耗散率和较大的温度方差耗散率代表更强的海洋湍流<sup>[11]</sup>, 导致接收 OAM 模式概率减小, 从而使水下光通信链路的信道容量降低。从图 4(e)中可以看出, 固定  $\mu_x=2$  时, 三种光束的信道容量都随各向异性因子  $\mu_y$  的增加而增加, 原因是湍流的各向异性降低了折射率的波动<sup>[25]</sup>, 从而减少了海洋湍流造成的干扰, 即接收端 OAM 模式串扰减小, 从而使光通信链路的信道容量增大。从图 4(f)中可以看出, 相比盐度变化引起的海洋湍流, 温度变化引起的海洋湍流对信道容量的负面影响要更小。这是因为由盐扩散主导的海洋湍流比由温度扩散主导的海洋湍流更强<sup>[11]</sup>, 从而使接收端 OAM 模式串

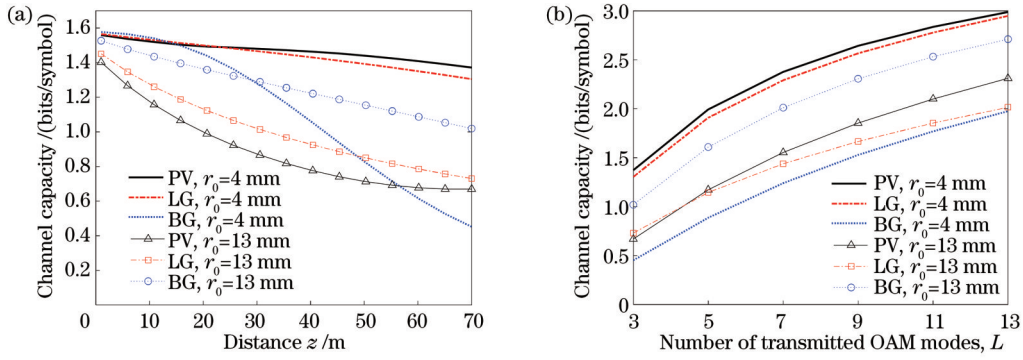


图 3 不同传输距离和发送 OAM 模式数下三种光束的信道容量。(a)传输距离;(b)发送的 OAM 模式数

Fig. 3 Channel capacity of three beams at different transmission distances and numbers of transmitted OAM modes. (a) Transmission distances; (b) numbers of transmitted OAM modes

扰增强,导致信道容量降低。图 4 中的数值结果也表明,在相同海洋湍流环境中,较窄束腰半径的 PV 或者

LG 光束可获得比 BG 光束更大的信道容量;而较大束腰半径的 PV 和 LG 光束的信道容量要小于 BG 光束。

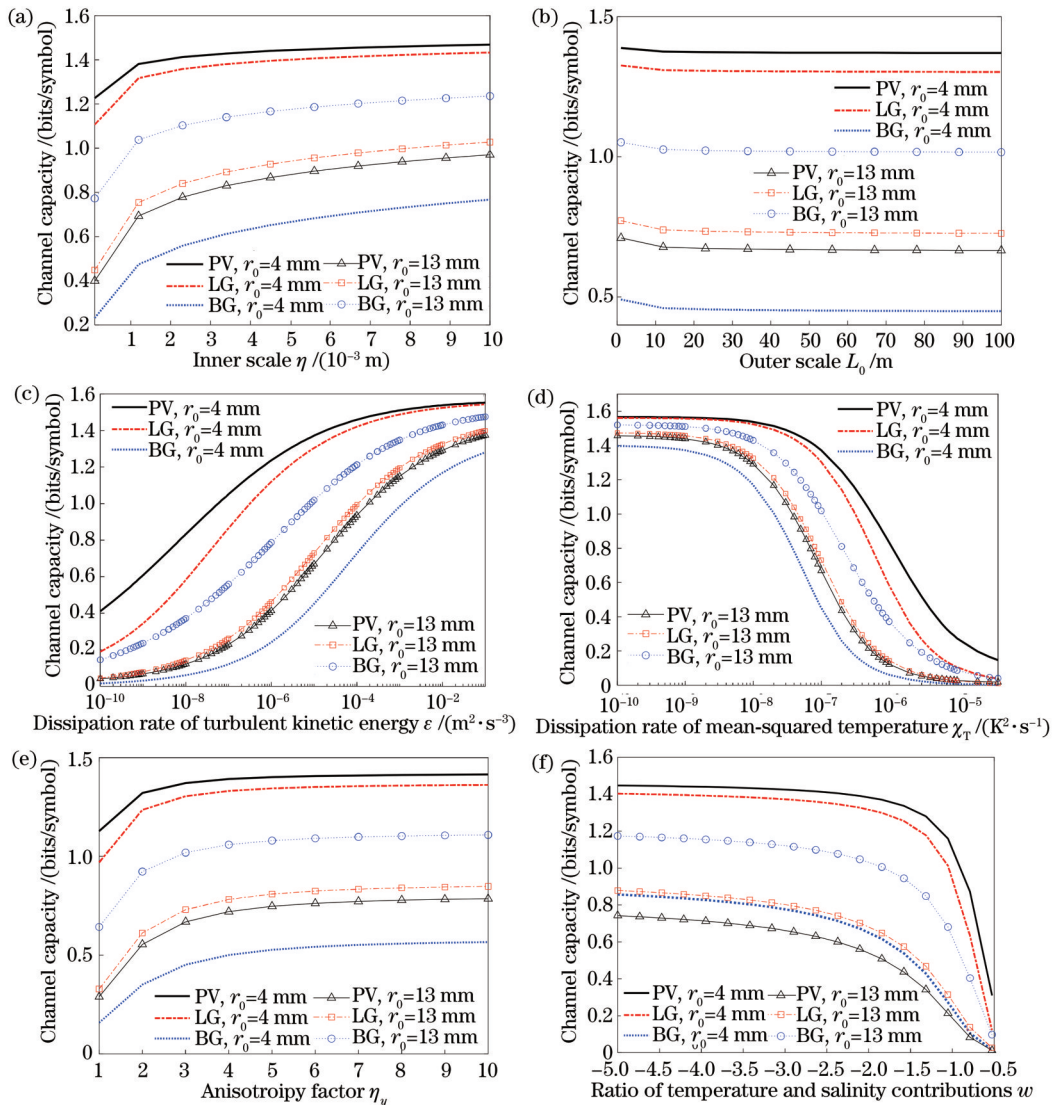


图 4 不同海洋湍流参数下三种光束的信道容量。(a)内尺度;(b)外尺度;(c)湍流动能耗散率;(d)温度方差耗散率;(e)各向异性因子;(f)温度盐度贡献比

Fig. 4 Channel capacity of three beams under different ocean turbulence parameters. (a) Inner scale; (b) outer scale; (c) dissipation rate of turbulent kinetic energy; (d) dissipation rate of mean-squared temperature; (e) anisotropy factor; (f) ratio of temperature and salinity contributions

## 4 结 论

本文建立了在各向异性且不稳定分层海水介质中, PV、LG 和 BG 光束的信道容量模型, 研究了这三种光束在不同海洋湍流参数和光源参数下的信道容量。数值模拟结果表明: 束腰半径对三种光束信道容量的影响很大, 存在一个最佳束腰尺寸, 使三种光束的信道容量达到峰值, 并且 PV 光束的信道容量峰值大于 BG 和 LG 光束。当传输距离在 30~70 m 时, 较小束腰半径 (小于 4 mm) 的 PV 或者 LG 光束可获得比 BG 光束更大的信道容量; 而较大束腰半径 (大于 12 mm) 的 PV 或者 LG 光束的信道容量却明显小于 BG 光束; 并且当束腰半径小于 2 mm 时, PV 光束的信道容量大于 LG 和 BG 光束的信道容量, 表明采用窄束腰半径 (小于 2 mm) 的 PV 光束可以给通信系统带来更大的信道容量。此外, 三种光束的信道容量都随温度方差耗散率、温度盐度贡献比、传输距离的增大而减小; 随发送 OAM 模式数、湍流内尺度、湍流动能耗散率、各向异性因子的增大而增大; 随接收机孔径直径的增大而减小并最终保持稳定, 但这三种光束的信道容量受湍流外尺度的影响却很小。本文的研究结果对于海洋环境下光通信链路的实现和光源参数的选择具有重要的参考价值。

## 参 考 文 献

- [1] Cheng Y X, Yang X Q, Zhang Y F, et al. 50 m/187.5 Mbit/s real-time underwater wireless optical communication based on optical superimposition[J]. Chinese Optics Letters, 2023, 21(2): 020601.
- [2] Sun X B, Kang C H, Kong M W, et al. A review on practical considerations and solutions in underwater wireless optical communication[J]. Journal of Lightwave Technology, 2019, 38(2): 421-431.
- [3] 杨莫愁, 吴仪, 冯国英. 水下鬼成像的研究进展[J]. 光学学报, 2022, 42(17): 1701003.  
Yang M C, Wu Y, Feng G Y. Research progress of underwater ghost imaging[J]. Acta Optica Sinica, 2022, 42(17): 1701003.
- [4] Shen C, Guo Y J, Oubei H M, et al. 20-meter underwater wireless optical communication link with 1.5 Gbps data rate[J]. Optics Express, 2016, 24(22): 25502-25509.
- [5] Chen Y H, Duan Z Y, Zheng F Z, et al. Underwater optical guiding and communication solution for the AUV and seafloor node[J]. Applied Optics, 2022, 61(24): 7059-7070.
- [6] 赵太飞, 王晶, 张杰, 等. 蛙人协作中的水下无线光通信邻居发现方法[J]. 光学学报, 2018, 38(12): 1206002.  
Zhao T F, Wang J, Zhang J, et al. Neighbor discovery method for frogmen cooperation in underwater wireless optical communication[J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(12): 1206002.
- [7] Zhou H B, Su X Z, Minoofar A, et al. Utilizing multiplexing of structured THz beams carrying orbital-angular-momentum for high-capacity communications[J]. Optics Express, 2022, 30(14): 25418-25432.
- [8] Cheng M J, Guo L X, Li J T, et al. Channel capacity of the OAM-based free-space optical communication links with Bessel-Gauss beams in turbulent ocean[J]. IEEE Photonics Journal, 2016, 8(1): 7901411.
- [9] Zhai S A, Zhu Y, Zhang Y X, et al. Effects of oceanic turbulence on orbital angular momenta of optical communications[J]. Journal of Marine Science and Engineering, 2020, 8(11): 869.
- [10] Zhai S A, Wang J C, Zhu Y, et al. Quantum-channel capacity of distributing orbital-angular-momentum states for underwater optical quantum communication[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2020, 38(1): 36-41.
- [11] 刘瑞熙, 马磊. 海洋湍流对光子轨道角动量量子通信的影响[J]. 物理学报, 2022, 71(1): 010304.  
Liu R X, Ma L. Effects of ocean turbulence on photon orbital angular momentum quantum communication[J]. Acta Physica Sinica, 2022, 71(1): 010304.
- [12] Li Y, Zhang Y X, Zhu Y. Oceanic spectrum of unstable stratification turbulence with outer scale and scintillation index of Gaussian-beam wave[J]. Optics Express, 2019, 27(5): 7656-7672.
- [13] Hu Z H, Liu H L, Xia J, et al. Propagation characteristics of the perfect vortex beam in anisotropic oceanic turbulence[J]. Applied Optics, 2020, 59(32): 9956-9962.
- [14] Shao W, Huang S J, Liu X P, et al. Free-space optical communication with perfect optical vortex beams multiplexing[J]. Optics Communications, 2018, 427: 545-550.
- [15] Murakami Y, Kishikawa H, Goto N. Comparative studies of atmospheric turbulence effects on orbital angular momentum beams[C]//26th Optoelectronics and Communications Conference, July 3-7, 2021, Hong Kong, China. Washington, D.C.: Optica Publishing Group, 2021: JS3E.6.
- [16] 尹霄丽, 郭翊麟, 同浩, 等. 汉克-贝塞尔光束在海洋湍流信道中的螺旋相位谱分析[J]. 物理学报, 2018, 67(11): 114201.  
Yin X L, Guo Y L, Yan H, et al. Analysis of orbital angular momentum spectra of Hankel-Bessel beams in channels with oceanic turbulence[J]. Acta Physica Sinica, 2018, 67(11): 114201.
- [17] Cheng M J, Guo L X, Li J T, et al. Propagation of an optical vortex carried by a partially coherent Laguerre - Gaussian beam in turbulent ocean[J]. Applied Optics, 2016, 55(17): 4642-4648.
- [18] Wang S L, Yang D H, Yu Z, et al. Evolution of temporal broadening of ultrashort optical pulse propagation in general ocean turbulence[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2022, 39(4): 674-681.
- [19] Cheng M J, Guo L X, Li J T, et al. Propagation properties of an optical vortex carried by a Bessel-Gaussian beam in anisotropic turbulence[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2016, 33(8): 1442-1450.
- [20] Pan S X, Wang L, Wang W N, et al. An effective way for simulating oceanic turbulence channel on the beam carrying orbital angular momentum[J]. Scientific Reports, 2019, 9: 14009.
- [21] 任庭瑞, 于笑楠, 佟首峰, 等. 基于数字信号处理的高灵敏度水下光通信收发机设计与评估[J]. 中国激光, 2022, 49(4): 0406005.  
Ren T R, Yu X N, Tong S F, et al. Design and evaluation of high-sensitivity underwater optical communication transceiver based on digital signal processing[J]. Chinese Journal of Lasers, 2022, 49(4): 0406005.
- [22] Yang H B, Yan Q Z, Wang P, et al. Bit-error rate and average capacity of an absorbent and turbulent underwater wireless communication link with perfect Laguerre-Gauss beam[J]. Optics Express, 2022, 30(6): 9053-9064.
- [23] Wang W, Wang P, Pang W N, et al. Evolution properties and spatial-mode UWOC performances of the perfect vortex beam subject to oceanic turbulence[J]. IEEE Transactions on Communications, 2021, 69(11): 7647-7658.
- [24] Wang S L, Yang D H, Zhu Y, et al. Capacity analysis of oceanic channels with localized Lommel-Gaussian vortex beams[J]. Applied Optics, 2021, 60(14): 4135-4142.
- [25] Wang X G, Yang Z, Zhao S M. Influence of oceanic turbulence

# Channel Capacity of Three Vortex Beams in Anisotropic Ocean Turbulence

Wang Mingjun<sup>1,2,3\*</sup>, Liu Haozhen<sup>1</sup>, Zhang Jialin<sup>1</sup>, Wang Jiao<sup>4\*\*</sup>

<sup>1</sup>*School of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, Shaanxi, China;*

<sup>2</sup>*Xi'an Key Laboratory of Wireless Optical Communication and Network Research, Xi'an 710048, Shaanxi, China;*

<sup>3</sup>*School of Physics and Telecommunication Engineering, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723001, Shaanxi, China;*

<sup>4</sup>*School of Electronic Information and Artificial Intelligence, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, Shaanxi, China*

## Abstract

**Objective** Due to the high data transmission rate, low energy consumption, and strong anti-interference ability, underwater wireless optical communication has been widely applied to underwater image transmission, underwater video transmission, underwater vehicles, underwater search and rescue, and other fields. As the vortex beams carry orbital angular momentum (OAM) and are orthogonal among different OAM modes, underwater optical communication can be conducted using the vortex beams. On one hand, in the atmospheric turbulent environment, the utilization of perfect vortex (PV) beams is proven to improve the channel capacity of optical communication system compared with Laguerre-Gauss (LG) and Bessel-Gauss (BG) beams. Meanwhile, it is unknown whether the channel capacity is still stronger than LG and BG beams when PV beams are adopted for optical communication in the ocean turbulent environment. On the other hand, most previous studies on the channel capacity of vortex beams in ocean turbulent environments have employed the power spectrum models of Nikishov or Elamassie, but both models are proposed under the assumption of infinite scale outside turbulence, which has certain limitations. Therefore, we explore the channel capacity of PV, LG, and BG beams transmitted in anisotropic ocean turbulence using the recently reported ocean turbulence power spectrum with finite outer scale. Our research is of great significance for implementing optical communication links and selecting light source parameters in the marine environment.

**Methods** According to the Rytov approximation theory, the spatially coherent length of spherical wave propagation under anisotropic ocean turbulence is derived. OAM mode detection probability and channel capacity for PV, LG, and BG beam propagation in anisotropic ocean turbulence are calculated. Additionally, we simulate the channel capacity changes of PV, LG, and BG beams with beam radius, receiving aperture, transmission distance, number of transmitted OAM modes, turbulence inner and outer scales, turbulent energy dissipation rate, temperature variance dissipation rate, anisotropy factor, and temperature salinity contribution ratio.

**Results and Discussions** The numerical simulation results of Fig. 2(a)–(c) show that the beam waist radius is an important factor limiting the channel capacity of PV, LG, and BG beams. When the transmission distance is less than 70 m and other parameters remain unchanged, PV or LG beams with a narrower waist radius (less than 4 mm) can obtain a larger channel capacity than that of BG beam. However, when the beam radius is larger (greater than 12 mm), the channel capacity of PV and LG beams is lower than that of BG beams. In addition, when the PV beam is less than 2 mm, the channel capacity is greater than those of LG and BG beams, and it is better for long-distance transmission. The numerical simulation results of Fig. 2(d) indicate that the channel capacity decreases and stabilizes with the rising receiving aperture. The numerical simulation results of Fig. 3(a) reveal that the channel capacity decreases with the increasing transmission distance. The numerical simulation results of Fig. 3(b) show that the channel capacity rises with the increase in the number of transmitted OAM modes. The numerical simulation results of Fig. 4(a) demonstrate that the channel capacity increases with the growing inner scale of turbulence. The numerical simulation results of Fig. 4(b) show that the channel capacity decreases only by a very low value with the increasing outer scale, and when the outer scale continues to grow, the channel capacity does not decrease and remains at a relatively stable value. The numerical simulation results of Fig. 4(c)–4(d) reveal that the channel capacity increases with the rising turbulent kinetic energy dispersion, and decreases with the increasing temperature variance dissipation rate. The numerical simulation results of Fig. 4(e) show that the channel



capacity increases with the rising anisotropy factor, and those of Fig. 4(f) indicate that the channel capacity decreases with the increasing temperature salinity contribution ratio.

**Conclusions** The beam radius has a great influence on the channel capacity of the three beams, and there is an optimal girdle size to make the channel capacity of the three beams peak, and the peak channel capacity of PV beam is greater than those of BG and LG beams. When the transmission distance is from 30 to 70 m, PV and LG beams with a smaller waist radius (less than 4 mm) can obtain a larger channel capacity than that of BG beam. However, the channel capacity of PV and LG beams with a larger waist radius (greater than 12 mm) is significantly lower than that of BG beam. Additionally, when the beam waist radius is less than 2 mm, the channel capacity of PV beam is greater than those of LG and BG beams, which indicates that PV beam with a narrow waist radius (less than 2 mm) can bring greater channel capacity to the communication system. In addition, the channel capacity of the three beams decreases with the increasing temperature variance dissipation rate, temperature salinity contribution ratio, and transmission distance. Meanwhile, it increases with the rising number of transmitted OAM modes, turbulent inner scale, turbulent kinetic energy dissipation rate, and anisotropic factor. Then, it decreases and eventually stabilizes as the aperture diameter of the receiver increases, but is very little affected by the turbulent outer scale.

**Key words** ocean optics; channel capacity; anisotropic ocean turbulence power spectrum; vortex beams