

光学学报

曲面光源蒙特卡罗建模方法

汤海松^{1,2}, 毛祥龙^{3*}, 冯泽心^{1,2**}, 李浩然^{1,2}

¹北京理工大学光电学院北京市混合现实与新型显示工程技术研究中心, 北京 100081;

²北京理工大学光电成像技术与系统教育部重点实验室, 北京 100081;

³中国科学院西安光学精密机械研究所空间光子信息新技术研究室, 陕西 西安 710119

摘要 光源建模方法是光学仿真算法的核心之一, 决定了仿真结果的精度。然而对任意面型的光源建模难度高, 建模方法很少被公开讨论。本研究系统地介绍曲面光源建模方法。基于均匀性假设, 对曲面光源的空间特性、方向特性进行统计学描述, 给出采样光线参数应满足的概率密度函数和采样方法。对两个曲面光源实例进行建模, 当采样光线数量在 10^7 量级时, 建模结果在指定接收器上形成的辐照度分布与理论值间最大相对偏差在 1% 之内, 建模精度很高。同时, 分析了两种采样方法对曲面光源建模精度和速度的影响, 可为曲面光源建模过程提供一定指导。

关键词 光学仿真; 蒙特卡罗; 光源建模; 曲面光源; 均匀采样

中图分类号 O439 文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS230880

1 引言

科学计算软件协助科研和工程技术人员实现高效的科学研究和工程设计^[1-2]。然而, 目前成熟的商用科学计算软件多由发达国家提供, 自主研发科学计算软件和相应数据库是我国科学工作者的迫切需求。在光学设计、加工与制造领域亦是如此, 当前我国成像与照明光学设计大多依赖美国 Ansys 公司的 Zemax 和 Synopsys 公司的 CodeV 软件、Lighttools 软件等。光学设计软件国产化具有重要意义。

蒙特卡罗光学仿真方法可运用在成像效果仿真^[3-4]、图形渲染^[5]、散射分析^[6-7]、照明设计^[8-11]等方向, 在光学和计算机图形学等领域备受关注。蒙特卡罗光学仿真基于随机光线采样和统计方法可克服光传输积分表达式难以直接求解的问题。基于蒙特卡罗方法的光学设计软件通过随机光线采样对光源建模, 追迹光线在空间和光学元件中的传输路径, 统计接收器上光分布实现仿真^[8-12]。

蒙特卡罗光学仿真的准确性依赖于光传输过程随机模型与物理现实接近程度。光源建模是至关重要的部分, 其直接决定仿真结果准确性。除常见的点光源、平行光源和平面光源外, 对曲面光源建模也尤为重要。延展的灯丝, 弯曲的荧光灯管等是生活中常见的曲面光源。另外, 远红外波段光学系统需要考虑光机元件在常温条件下自发辐射的红外杂散光^[13-14], 光机结构

中非透明元件对外辐射发生在表面几 μm 内, 辐射特性仅与表面状态有关, 与内部特性无关^[15-16]。这些元件中往往存在诸多复杂曲面, 也可视为曲面光源。复杂曲面光源建模难度较大, 当前相关公开学术讨论不多。曲面光源建模相关统计学原理和方法, 如曲面采样理论, 已经非常成熟^[17-19], 目前缺少的是针对曲面光源建模方法较为系统性的讨论。

本文系统地介绍曲面光源蒙特卡罗建模方法。使用均匀性假设对曲面光源辐射空间特性和方向特性进行变量分离, 给出光源各特性的统计学模型及光线采样方法, 并提出光源建模准确性验证方法。介绍曲面光源蒙特卡罗建模基本原理和方法, 展示对两个曲面光源的建模结果, 并分析不同采样方法对建模精度和速度的影响。

2 基本原理

本小节系统地介绍曲面光源蒙特卡罗建模方法, 内容分为曲面光源的物理特性、统计学模型、基本采样方法以及建模结果准确性分析方法。

2.1 曲面光源的物理特性

光源辐射特性包含空间特性、方向特性、光谱特性、偏振特性以及相位特性等, 本研究只考虑曲面光源特的空间特性和方向特性。曲面光源辐射特性可使用辐射亮度 $L(s, d)$ 描述, 其中, s 表示曲面上的点坐标, d 表示方向。假设曲面光源方向特性在表面上处处相

收稿日期: 2023-04-26; 修回日期: 2023-05-25; 录用日期: 2023-06-05; 网络首发日期: 2023-06-28

基金项目: 国家自然科学基金(62105357)、中国科学院青年创新促进会项目(2019394)

通信作者: *maoxianglong@opt.ac.cn; **fzx84@126.com

同,这足以描述大多数辐射体。如此可对辐射亮度 $L(s, d)$ 进行变量分离,使用多个不同函数分别描述其空间特性和方向特性。

曲面光源空间特性包括曲面上不同点辐射出射度及曲面面型。辐射出射度 $M(u, v)$ 为曲面光源上单位面积辐射通量,其中, (u, v) 为曲面参数。曲面光源最大特点是其面型各异,曲面是三维空间中的二维几何体,使用两个参数 (u, v) 即可描述曲面上任意点位置。在光学领域中,可使用 $s = f(u, v)$ 表示笛卡儿坐标系中的曲面^[20],此为曲面参数化表达。曲面上三维点坐标 $s = (x, y, z)$ 都是关于参数 (u, v) 的函数,其具体形式为

$$\begin{cases} x = f_x(u, v) \\ y = f_y(u, v) \\ z = f_z(u, v) \end{cases} \quad (1)$$

曲面上参数 (u, v) 对应点处法向量为

$$\nu = \pm \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, -\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \quad (2)$$

法向量正负号对应曲面内外侧。曲面上面积微元 dS 简称面元^[21]:

$$dS = \sqrt{G_1 G_3 - G_2^2} du dv, \quad (3)$$

$$\begin{cases} G_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \\ G_2 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ G_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \end{cases} \quad (4)$$

称 $A(u, v) = \sqrt{G_1 G_3 - G_2^2}$ 为曲面表面面积权重,其反映曲面面积在不同参数处的变化率。 $z = f(x, y)$ 形式曲面是 $s = f(u, v)$ 形式曲面在 $x \propto u, y \propto v, z = f_z(u, v)$ 时的特例。

曲面光源上任意面元向各方向辐射能量,其以表面法向量为中心方向,向半空间辐射能量,不向背面辐射。在面元处以曲面法线方向为 z 轴建立局部坐标系,面元辐射方向特性 $I(\theta_{loc}, \varphi_{loc})$ 表示面元向方向 $(\theta_{loc}, \varphi_{loc})$ 单位立体角辐射的光通量,其中, $\theta_{loc}, \varphi_{loc}$ 分别为局部球坐标系下的天顶角和方位角,下标 loc 表示曲面局部坐标系。常见光源包括朗伯光源 $I(\theta_{loc}, \varphi_{loc}) = I_0 \cos \theta_{loc}$ 、各向同性光源 $I(\theta_{loc}, \varphi_{loc}) = I_0$ 等,其中, I_0 为光源中心方向辐射强度。

在曲面光源方向特性处处相同的假设下,其辐射特性为

$$L = K_0 M(u, v) I(\theta_{loc}, \varphi_{loc}), \quad (5)$$

式中: K_0 为能量系数;光源辐射通量为 Φ_0 。且有

$$\iint_{\Omega_{loc}} \iint_S K_0 M(u, v) I(\theta_{loc}, \varphi_{loc}) dS d\Omega_{loc} = \Phi_0, \quad (6)$$

式中: $d\Omega_{loc} = \sin \theta_{loc} d\theta_{loc} d\varphi_{loc}$, 表示立体角微分。对于方向特性随空间位置变化的曲面光源,可组合多个均匀曲面光源近似描述。光源其他特性同样可分离变量单独处理。

2.2 曲面光源的统计学模型

曲面光源蒙特卡罗建模需将光源物理特性转化为统计模型,即概率密度函数,并采样随机光线。光线是高纬度随机变量,单根光线具有起始点坐标 $s_r = (x_r, y_r, z_r)$ 、光线方向 $d_r = (l_r, m_r, n_r)$ 、能量权重 ω_r 等参数,其中, (l, m, n) 表示方向向量。单根光线的参数为 $(x_r, y_r, z_r, l_r, m_r, n_r, \omega_r)$, 下标 r 表示光线。光线各参数不完全独立。光线起始点坐标 s_r 满足曲面方程,由参数 u_r, v_r 采样并计算而得。光线方向 d_r 由 $\theta_{loc}, \varphi_{loc}$ 确定,模为 1。在使用采样光线仿真光学系统中光能量传输过程时,光线起始点坐标和方向将用于求解光能量传输路径,光线能量权重将会根据斯内尔定律等调整以仿真光能量变化。

光线各参数采样过程满足不同概率分布。光线起始点坐标参数 u_r, v_r 服从的概率密度函数为 $f_M(u_r, v_r)$, 其正比于光源辐射出射度和表面面积权重乘积 $M(u, v) \cdot A(u, v)$:

$$f_M(u_r, v_r) = \frac{M(u_r, v_r) \cdot A(u_r, v_r)}{\iint_S M(u_r, v_r) dS} = \frac{M(u_r, v_r) \cdot A(u_r, v_r)}{\iint M(u_r, v_r) \cdot A(u_r, v_r) du_r dv_r} \quad (7)$$

若曲面光源各点辐射出射度相等,则参数 u_r, v_r 服从的概率密度函数为

$$f_M(u_r, v_r) = \frac{A(u_r, v_r)}{S_0}, \quad (8)$$

式中: S_0 表示曲面光源表面积。该概率密度函数使得在面积权重较大的参数处采样概率较大,进而使曲面上采样点分布均匀。使用 $f_I(\theta_{loc}, \varphi_{loc})$ 表示光线方向参数 $\theta_{loc}, \varphi_{loc}$ 满足的概率密度函数,其正比于单位立体角辐射通量 $I(\theta_{loc}, \varphi_{loc})$:

$$f_I(\theta_{loc}, \varphi_{loc}) = \frac{I(\theta_{loc}, \varphi_{loc}) \cdot \sin \theta_{loc}}{\iint_{\Omega_{loc}} I(\theta_{loc}, \varphi_{loc}) d\Omega_{loc}} \quad (9)$$

局部坐标系下采样方向为

$$\begin{cases} l_{loc} = \sin \theta_{loc} \cos \varphi_{loc} \\ m_{loc} = \sin \theta_{loc} \sin \varphi_{loc} \\ n_{loc} = \cos \theta_{loc} \end{cases} \quad (10)$$

光线方向由局部坐标系下采样方向和曲面局部法

向量 ν 计算而得:

$$\begin{pmatrix} l_r \\ m_r \\ n_r \end{pmatrix} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \begin{pmatrix} l_{loc} \\ m_{loc} \\ n_{loc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{loc} \\ m_{loc} \\ n_{loc} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

式中: \mathbf{R}_y 表示绕 y 轴的旋转矩阵; \mathbf{R}_z 表示绕 z 轴的旋转矩阵; α, β 为旋转角度。

$$\begin{cases} \alpha = \arccos\left(\frac{n_\nu}{\|\nu\|_2}\right) \\ \beta = \arg\left(\frac{l_\nu + m_\nu \cdot j}{\|\nu\|_2}\right) \end{cases}, \quad (12)$$

式中: $\nu = (l, m, n)$; j 为虚部单位; \arg 为辐角主值; $\|\cdot\|_2$ 表示向量二范数。

据上述概率密度函数采样而得的光线参数能量权重 $\omega_r = 1$, 且辐射出射度恒定时曲面上采样点分布均匀, 称此采样方法为等权重均匀采样。此外, 还可引入额外权重, 简化采样过程, 称为参数空间均匀采样。该方法在曲面的参数空间均匀采样, 引入辐射出射度权重 $\omega_M(u_r, v_r) \propto M(u_r, v_r) \cdot A(u_r, v_r)$; 对立体角均匀采样, 引入强度权重 $\omega_I(\theta_{loc}, \varphi_{loc}) \propto I(\theta_{loc}, \varphi_{loc})$ 。如此, 光线能量权重 ω_r 正比于 $\omega_M \cdot \omega_I$, 不再为常数。该方法可避免按照目标概率分布采样计算过程中积分和插值运算, 降低采样过程复杂性提升程序计算速度。

采样单根光线需生成 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, 其中, ξ_1, ξ_2 用于计算光线起始点坐标, ξ_3, ξ_4 用于计算光线方向。采样多根光线获得光线簇, 光线簇由矩阵 $(x_r, y_r, z_r, l_r, m_r, n_r, \omega_r)$ 表示, 采样光线数量越大建模结果越准确。采样完成后, 将光线能量权重根据辐射通量进行变换, 使光线能量权重之和为辐射通量:

$$\omega'_r = \frac{\Phi_0 \cdot \omega_r}{\|\omega_r\|_1}, \quad (13)$$

式中: ω_r 为初步计算的光线能量权重; ω'_r 为变换后光线能量权重; $\|\cdot\|_1$ 表示向量一范数。至此便完成曲面光源的蒙特卡罗建模。

由上述建模方法生成的光线数据具有一定通用性, 光线簇矩阵能准确地描述光线几何与能量信息。将光线数据按照指定数据格式写入文件, 可导入常见光学设计软件中使用。

2.3 基本采样方法

由计算机易获取 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数, 此小节介绍如何使用逆变换采样法^[22]采样任意概率分布。

对于连续随机变量的一维概率密度函数 f , 其累积

分布为 F , 则 F^{-1} 作用于 $[0, 1]$ 上的均匀随机数即可获得服从于 f 分布的随机数, 此方法称为逆变换采样法。对于二维分布 $f(u, v)$, 先根据边缘分布 $f(u) = \int f(u, v) dv$ 对参数 u 逆变换采样, 进而根据采样结果和条件概率对参数 v 进行逆变换采样:

$$f(v) \Big|_u = \frac{f(u, v)}{f(u)}. \quad (14)$$

据此对最大天顶角为 θ_0 的立体角均匀采样可使用:

$$\begin{cases} \theta_{loc} = \arccos[1 - (1 - \cos \theta_0) \xi_3] \\ \varphi_{loc} = 2\pi \xi_4 \end{cases}. \quad (15)$$

对各向同性光源光线方向采样也可使用式(15), 对朗伯光源光线方向采样使用^[6]:

$$\begin{cases} \theta_{loc} = \frac{1}{2} \arccos[1 - (1 - \cos 2\theta_0) \xi_3] \\ \varphi_{loc} = 2\pi \xi_4 \end{cases}. \quad (16)$$

采样过程使用数值积分和插值方法解决概率密度函数表达式中曲面积分无法被有限基本初等函数表达的问题。首先, 使用均匀网格划分参数空间 (u, v) , 计算格点处概率密度函数值。使用复化梯形公式^[23]求解累积概率密度函数:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} f(x_k) \right]. \quad (17)$$

式中: $[a, b]$ 为积分区间, 被分成 k 等份; 区间等分点为 $x_k = a + i\Delta (i=0, 1, \dots, k)$, 记 $\Delta = \frac{b-a}{k}$, i 为索引。

求解反函数以及条件概率时使用插值方法计算函数值。

计算机只能产生伪随机数和准随机数, 使用伪随机数容易出现采样点聚集的问题。准随机数, 如 Sobol 序列, 是一种低差异性序列, 能保证采样点在取值区间内分布均匀, 可用于提升蒙特卡罗方法仿真精度^[9]。伪随机数和准随机数的选择对光源建模的精度有较大影响, 将在后文中讨论。

2.4 建模结果准确性分析

为验证曲面光源蒙特卡罗建模方法准确性, 使用采样光线仿真曲面光源在指定接收器上形成的辐照度分布, 比较其与理论值之间差距, 衡量建模结果精度。

首先推导曲面光源在接收器上某点形成的辐照度。坐标原点上点光源在垂直 z 轴平面接收器上形成的理论辐照度分布 $E_i(x_i, y_i)$ 为

$$E_i(x_i, y_i) = \frac{I \cdot H_i}{(x_i^2 + y_i^2 + H_i^2)^{3/2}}, \quad (18)$$

式中: H_i 为接收器距点光源垂直距离; (x_i, y_i) 分别为接收器上点在 x 和 y 方向上距点光源水平距离; I 为点光源向接收器上点 (x_i, y_i) 方向上辐射强度。

对于曲面光源,如图 1 所示,接收器位置 $z = h_t$, 欲求曲面光源在接收器上点 (x, y) 形成的辐照度。光源上点 (u, v) 处面积微元为 dS , 将其视为点光源, 其与接收器上点的位置相对关系为

$$\begin{cases} H_t = h_t - z(u, v) \\ x_t = x - x(u, v) \\ y_t = y - y(u, v) \end{cases} \quad (19)$$

若曲面光源为朗伯光源, 并且其表面积为 S_0 , 可得其辐射亮度为 $L = \frac{\Phi_0}{\pi S_0}$, 则面元辐射强度为 $I = L \cos \theta_{loc} dS$ 。其中, θ_{loc} 为表面局部坐标系中天顶角, 由辐射方向与曲面法向量 ν 的夹角计算:

$$\theta_{loc} = \arccos \left[\frac{(x_t, y_t, H_t) \cdot \nu}{\|(x_t, y_t, H_t)\|_2 \cdot \|\nu\|_2} \right] \quad (20)$$

将式(19)和式(20)代入式(18)并沿曲面积分即可求得曲面光源在接收器上某点的辐照度:

$$E_t(x, y) = \iint_S \frac{H_t L \cos \theta_{loc}}{(x_t^2 + y_t^2 + H_t^2)^{3/2}} dS \quad (21)$$

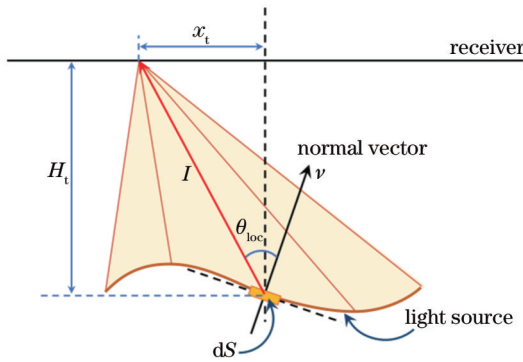


图 1 曲面光源在接收器上辐射的辐照度理论值计算示意图
Fig. 1 Schematic diagram of calculating the theoretical value of irradiance on the receiver radiated by the surface light source

求解接收器上某一区域内平均辐照度可计算该区域内一系列点上的辐照度值, 并由数值积分计算平均辐照度 E_{int} , 下标 int 表示根据数值积分得到的理论值

表 1 曲面光源的 XY 多项式表面参数

Table 1 Parameters of the XY-polynomial surface of the surface light source

Polynomial term	Parameter value	Polynomial term	Parameter value	Polynomial term	Parameter value
c	0.0100	$c_3 x^2$	0.0050	$c_7 x^2 y$	0.0013
k	-0.0800	$c_4 xy$	-0.0100	$c_8 xy^2$	-0.0008
$c_1 x$	-0.1000	$c_5 y^2$	0.0040	$c_9 y^3$	-0.0011
$c_2 y$	-0.1000	$c_6 x^3$	0.0010		

XY 多项式曲面光源建模过程中各参数采样结果如图 3 所示, 图中采样点数均为 1024。图 3(a)~(c) 为等权重均匀采样结果。图 3(a) 为曲面表面均匀采样结果, 图 3(b) 为朗伯分布方向采样结果, 在天顶角大

结果。将蒙特卡罗方法仿真结果 E 与理论值 E_{int} 比较, 可衡量蒙特卡罗方法建模结果的准确性, 称为相对误差:

$$e_E = \frac{E - E_{int}}{E_{int}} \times 100\% \quad (22)$$

3 结果与分析

选取两个曲面光源, 展示曲面光源蒙特卡罗建模结果, 分析建模准确性。其中, 第 1 个曲面光源使用 XY 多项式描述, 第 2 个曲面光源使用非均匀有理 B 样条 (NURBS) 曲面描述。最后, 比较等权重均匀采样和参数空间均匀采样两种方法的建模精度和速度, 并比较使用伪随机数和准随机数得到的建模结果。

例中, 曲面光源中心置于坐标原点, 曲面向 z 轴正方向发光。光源表面辐射出射度 M 处处相等, 且为朗伯光源, 曲面上每个点都以法向量为中心向 2π 半空间辐射能量, 光源总的辐射通量 $\Phi_0 = 1 \text{ W}$ 。平面接收器中心放置于点 $(0, 0, 50) \text{ nm}$ 处, 接收器垂直于 z 轴。接收器长宽均为 100 mm , 被划分为 11×11 个网格。计算理论辐照度值时, 采样曲面上 1000×1000 网格点计算数值积分。每个接收器网格内采样 11×11 个点计算平均辐照度。

3.1 XY 多项式曲面光源

第 1 个曲面光源使用 XY 多项式表达^[20]:

$$z = \frac{c(x^2 + y^2)}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2(x^2 + y^2)}} + \sum_{i=1}^n c_i x^i y^i, \quad (23)$$

$$\begin{cases} \eta = \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{1 + 8i}}{2} \right\rfloor \\ \mu = i - \frac{\eta(\eta + 1)}{2} \\ \lambda = \eta - \mu \end{cases} \quad (24)$$

式中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示向下取整; 该 XY 多项式曲面的曲率 c 、二次曲面系数 k 以及高次项系数 c_i 如表 1 所示。曲面在 xOy 面上投影为矩形, 长宽均为 20 mm 。曲面面型如图 2 所示。

的区域具有更高的采样概率, 图 3(c) 为采样光线, 光线长度表示能量权重, 其光线能量权重处处相等。图 3(d)~(f) 为参数空间均匀采样结果。图 3(d) 中曲面表面采样并不均匀, 采样点权重不同, 由于该曲面面积

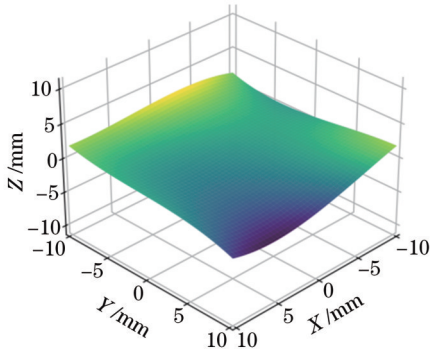


图 2 XY 多项式曲面

Fig. 2 XY-polynomial surface

权重 A 变化率不大, 采样点权重比较接近。图 3(e) 中采样方向在 2π 立体角内均匀分布, 天顶角较大处权重较小。图 3(e) 中采样光线的长度不同, 表示各采样光线能量权重不同。曲面光源在接收器上形成的理论辐照度分布如图 4 所示, 该计算结果具有很高的空间分

辨率。采样光线数量为 2^{24} ($\approx 1.6 \times 10^7$) 时, XY 多项式曲面光源蒙特卡罗建模的误差分析如图 5 所示, 两种建模方法结果误差绝对值小于 1.0%, 建模精度较高。且等权重均匀采样比参数空间均匀采样精度略高。上述采样过程均使用 Sobol 准随机数。

3.2 NURBS 曲面光源建模

第 2 个曲面光源使用 NURBS 曲面表达, 其表达式^[24]为

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^p \sum_{i'=0}^q N_{i,p}(u) N_{i',q}(v) Q_{i,i'}, \quad (25)$$

式中: 曲面参数 u, v 的范围为 $[0, 1]$; $Q_{i,i'}$ 为曲面控制点网格, i, i' 分别为索引; p, q 为阶数; N 为 NURBS 基函数。该曲面光源使用 3 阶 NURBS 曲面表达, 具有 C^2 连续性, 其经过式 (26) 所示面上的 21×21 个点, 其中, $R_0 = 7, R_1 = 6$, 这些点由参数 $u_{\text{torus}}, v_{\text{torus}}$ 在取值范围内均匀划分而得, $u_{\text{torus}} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right], v_{\text{torus}} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ 。

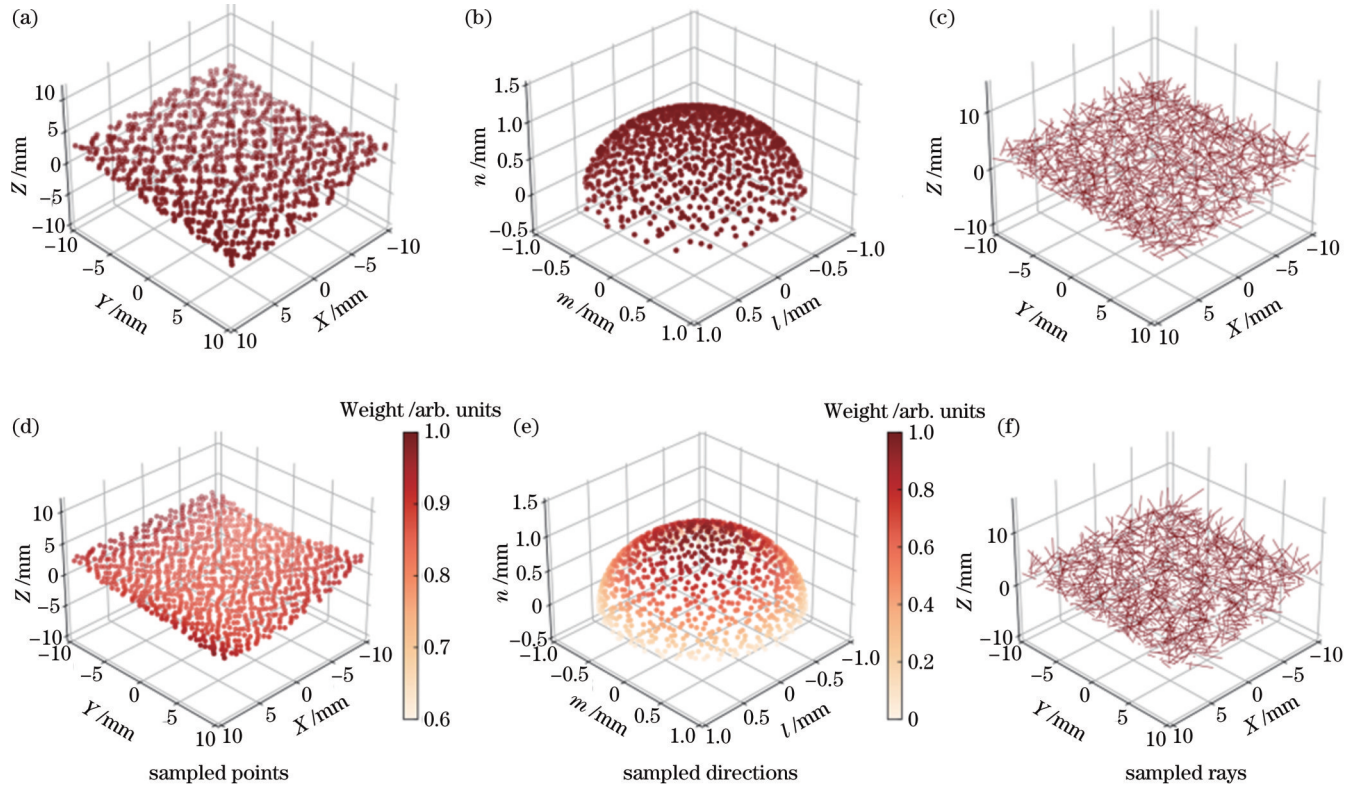


图 3 XY 多项式曲面光源采样结果。(a)(b)(c) 等权重均匀采样的采样点、采样方向和采样光线; (d)(e)(f) 参数空间均匀采样的采样点、采样方向和采样光线及其权重

Fig. 3 Sampling results for the XY-polynomial surface light source. (a) (b) (c) Sampled points, directions, and rays of uniform sampling with equal weights; (d) (e) (f) sampled points, directions, and rays of uniform sampling in parameter space with weights

$$\begin{cases} x = (R_0 + R_1 \cos u_{\text{torus}}) \cos v_{\text{torus}} \\ y = (R_0 + R_1 \cos u_{\text{torus}}) \sin v_{\text{torus}} \\ z = R_0 (2 \cdot \sin u_{\text{torus}} - \sqrt{3}) \end{cases} \quad (26)$$

该曲面为环面一部分, 下标 torus 表示环面。光源表面形状如图 6 所示。NURBS 曲面由 Python 的

geomdl 库构建^[25], 预先计算参数空间上 1000×1000 个等距点, 使用线性插值计算表面上的点坐标和偏导数。

对 NURBS 曲面光源各光线参数的采样结果如图 7 所示, 图中采样点数为 1024。图 7 中各参数的意义与图 3 相同。图 7(a)~(c) 为等权重均匀采样结果。图 7

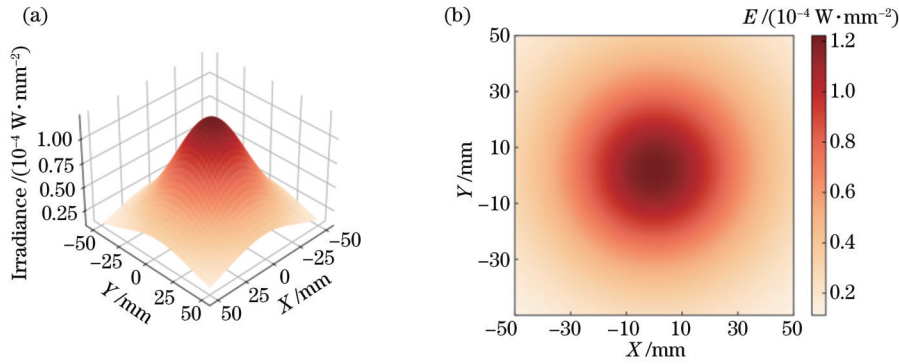


图 4 XY 多项式曲面光源在接收器上形成的理论辐照度分布。(a)3D 图;(b)2D 图

Fig. 4 Theoretical irradiance distribution on the receiver formed by the XY-polynomial surface light source. (a) 3D; (b) 2D

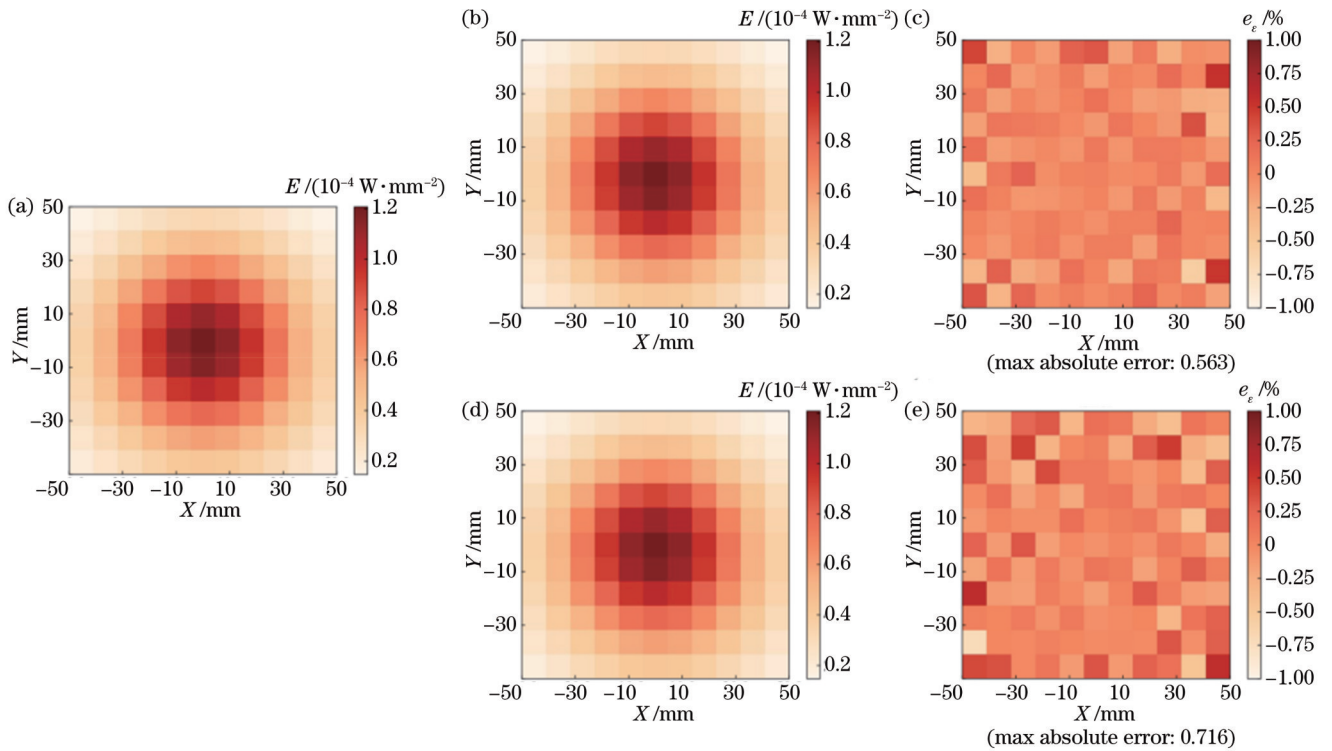


图 5 XY 多项式曲面光源蒙特卡罗建模误差分析。(a) 曲面光源在接收器上形成的辐照度分布理论值;(b)(c) 等权重均匀采样方法仿真的辐照度分布及其误差;(d)(e) 参数空间均匀采样方法仿真的辐照度分布及其误差

Fig. 5 Error analysis of Monte Carlo modeling results for XY-polynomial surface light source. (a) Theoretical value of irradiance distribution on the receiver formed by surface light source; (b) (c) irradiance distribution on the receiver simulated by uniform sampling with equals weights and its error; (d) (e) irradiance distribution on the receiver simulated by uniform sampling in parameter space and its error

(d)~(f)为参数空间均匀采样结果。图 7(d)中曲面靠近中心部分采样点数较多,因此权重较小。NURBS 曲面光源在接收器上形成的理论辐照度分布如图 8 所示。采样光线数量为 2^{24} ($\approx 1.6 \times 10^7$) 时,NURBS 曲面光源蒙特卡罗建模误差分析如图 9 所示,两种建模方法结果误差最大绝对值小于 1.0%,建模精度较高。且等权重均匀采样比参数空间均匀采样精度略高。上述采样过程均使用 Sobol 准随机数。

针对 NURBS 曲面光源建模实例,分析等权重均匀采样和参数空间均匀采样在不同采样光线数时的建

模误差和建模时间,如图 10 所示。此处建模误差为 11×11 个接收器网格上误差绝对值的均值。由图 10 (a) 可知,随光线数量增加,曲面光源建模平均误差逐渐减小。此例中,采样光线数量相同时,等权重均匀采样建模精度略高。且相比于伪随机数,使用准随机数能提高建模精度。不同光线数量下两种采样方法所需的时间如图 10(b) 所示。计算速度受到不同随机数的影响较小,为避免曲线重合降低图像可读性,图 10(b) 中只比较使用伪随机数的建模时间。由图 10(b) 可知,建模时间随采样光线数量增加而增加,参数空间均

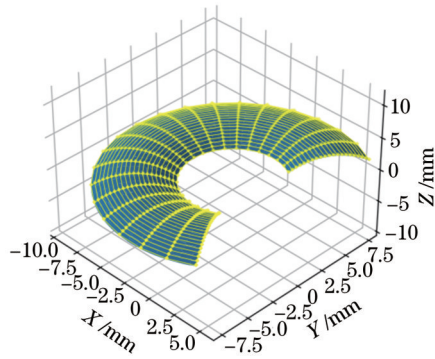


图 6 NURBS 曲面及其经过的网格点

Fig. 6 NURBS surface and the grid points the surface pass through

均匀采样方法的建模速度远快于等权重均匀采样方法, 因为等权重均匀采样使用逆变换采样, 其中存在计算量较大的数值积分和插值计算。在实际建模过程中, 可根据具体问题在计算精度和速度间权衡, 选择不同建模方法。由图 10(b) 可知, 若欲使建模精度接近 1% 且尽可能快速建模, 可采用准随机数, 使用参数空间均匀采样方法采样约 100 万条光线。相比于等权重均匀采样, 参数空间均匀采样实现相同精度虽需更多光线, 但建模时间小于 2 s。本研究采用 i9-12900k CPU 和 Nvidia RTX 3090 GPU 于 Windows 10 平台上分析建模方法的速度。编程语言为 Python, 主要使用的科学计算库为 SciPy^[26] 和 CuPy^[27] 等。

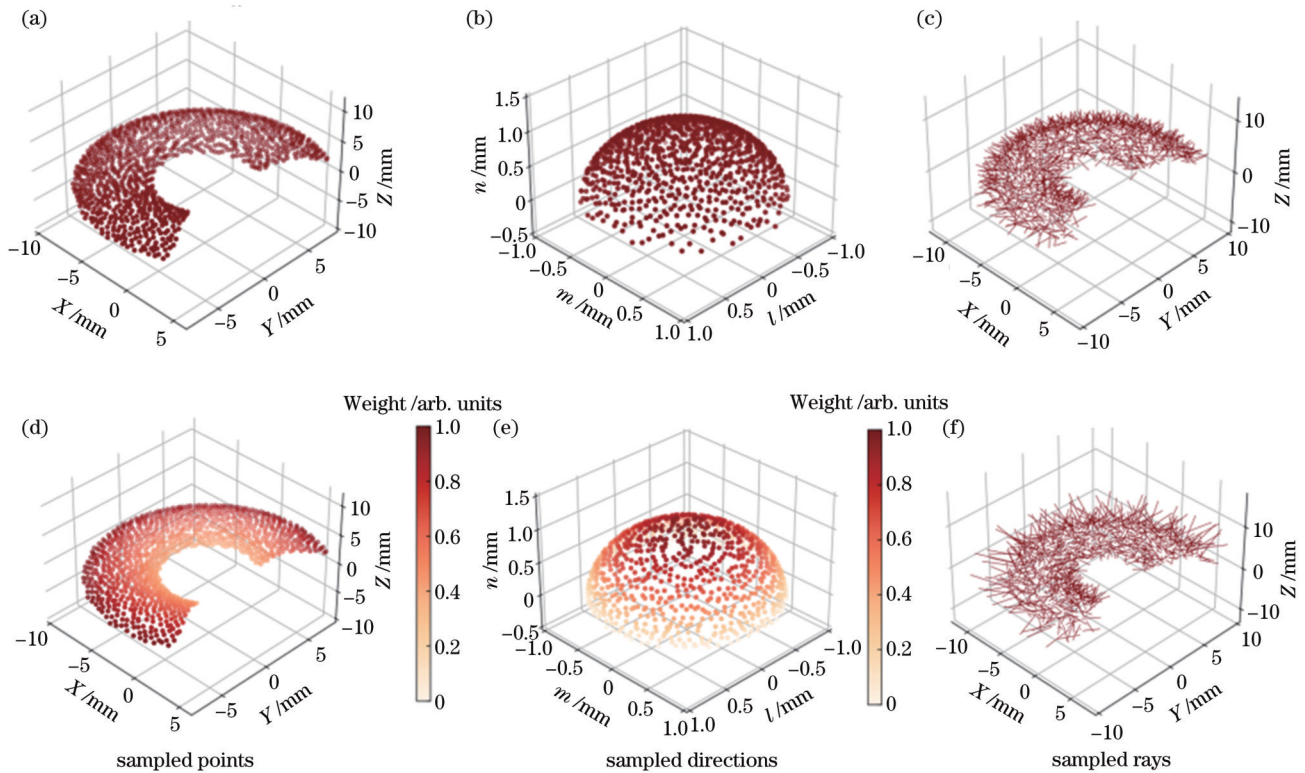


图 7 NURBS 曲面光源采样结果。(a)(b)(c) 等权重均匀采样的采样点、采样方向和采样光线; (d)(e)(f) 参数空间均匀采样的采样点、采样方向和采样光线及其权重

Fig. 7 Sampling results for the NURBS surface light source. (a) (b) (c) Sampled points, directions, and rays of uniform sampling with equal weights; (d) (e) (f) sampled points, directions, and rays of uniform sampling in parameter space with weights

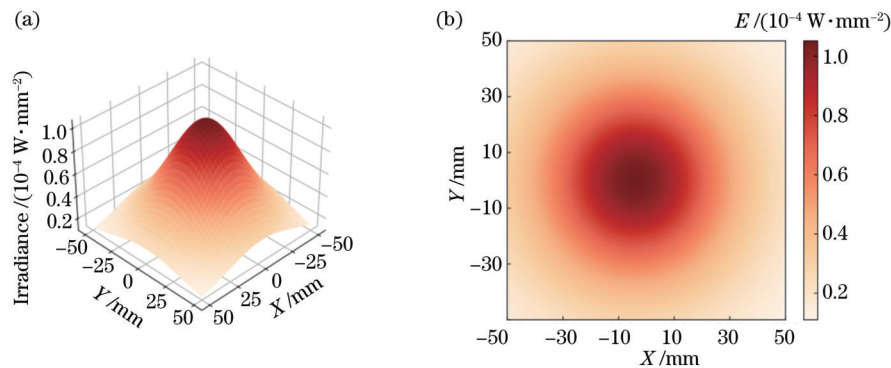


图 8 NURBS 曲面光源在接收器上形成的理论辐照度分布。(a) 3D 图; (b) 2D 图

Fig. 8 Theoretical irradiance distribution on the receiver formed by the NURBS surface light source. (a) 3D; (b) 2D

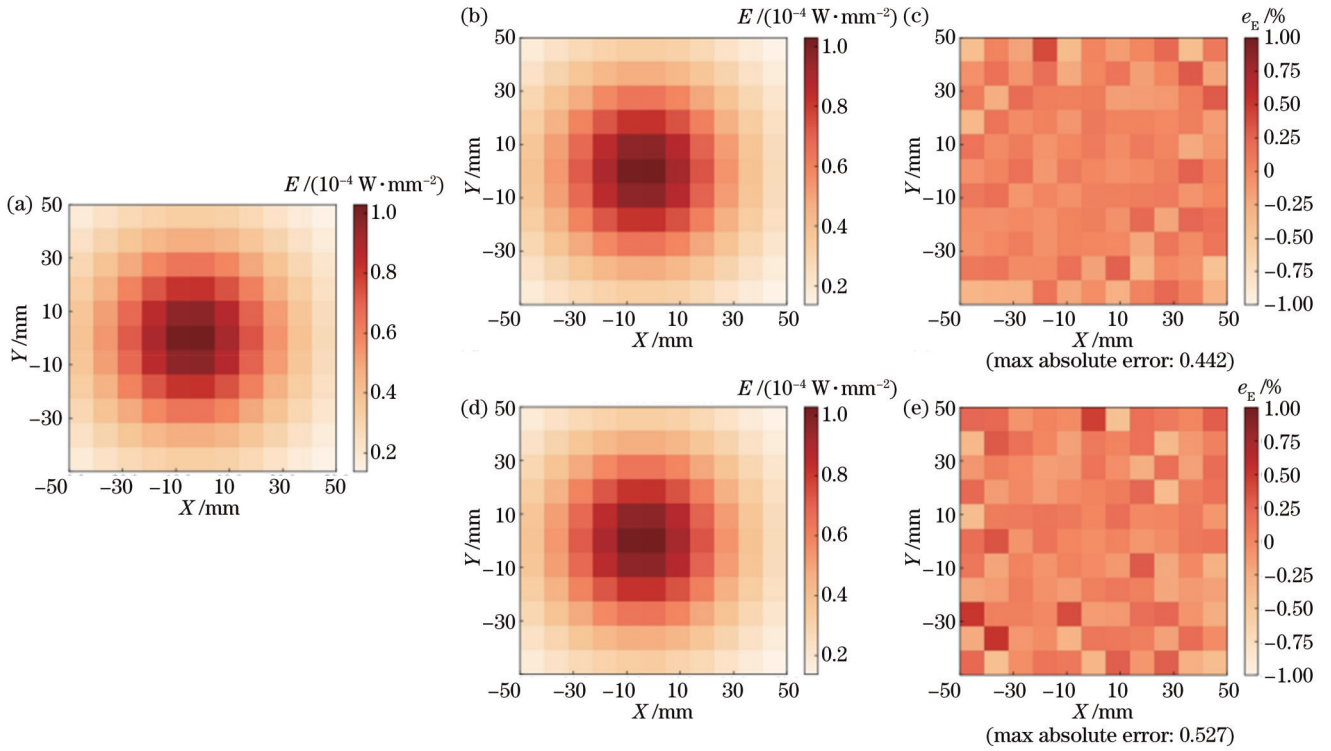


图 9 NURBS 曲面光源蒙特卡罗建模误差分析。(a) 曲面光源在接收器上形成的辐照度分布理论值；(b)(c) 等权重均匀采样方法仿真的接收器辐照度分布及其误差；(d)(e) 参数空间均匀采样方法仿真的接收器辐照度分布及其误差

Fig. 9 Error analysis of Monte Carlo modeling results for NURBS surface light source. (a) Theoretical value of irradiance distribution on the receiver formed by surface light source; (b) (c) irradiance distribution on the receiver simulated by uniform sampling with equal weights and its error; (d) (e) irradiance distribution on the receiver simulated by uniform sampling in parameter space and its error

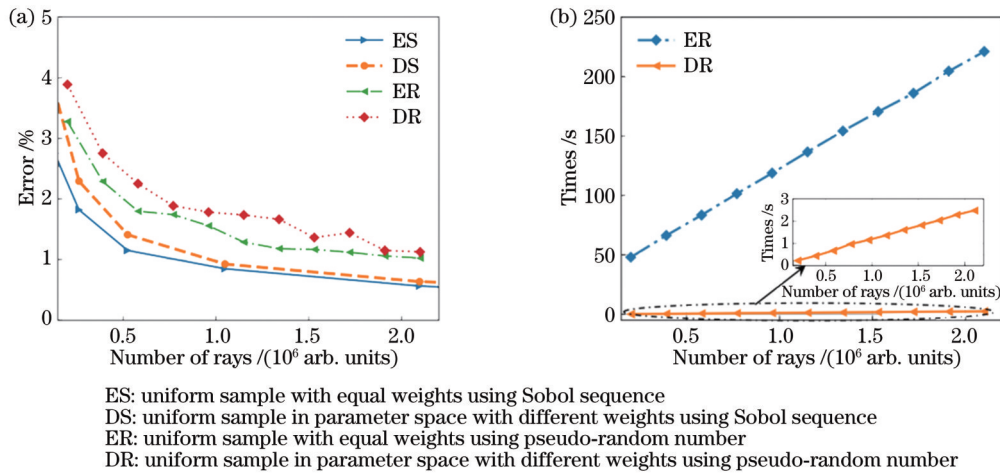


图 10 不同曲面光源建模方法的误差和所需时间比较。(a) 不同建模方法的误差随光线数量变化情况；(b) 不同建模方法所需的时间随光线数量变化情况

Fig. 10 Comparison of error and time consumption of different modeling methods for surface light sources. (a) The error of different modeling methods varying with the number of rays; (b) the time consumption of different modeling methods varying with the number of rays

4 结 论

系统性地介绍了曲面光源蒙特卡罗建模理论和方法。基于均匀性假设,对不同辐射特性进行变量分离,指出光线采样过程中各参数应满足的概率密度函数。

给出等权重均匀采样和参数空间均匀采样两种光线采样方法。针对两个曲面光源建模,当采样光线数量为 $2^{24} (\approx 1.6 \times 10^7)$ 时,建模结果在指定接收器上形成的辐照度分布的误差在 1% 之内,建模精度很高。探究不同采样方法以及不同随机数对建模精度和速度的影

响,可为曲面光源建模提供指导。

科学研究与工程实践中存在一些体光源,这种光源一般是透明的,光源内部辐射出的光会经过光源自身向外传输,如气体光源、红外透镜等。对这种类型体光源准确建模还需进一步探究。首先,体光源边界一般由单个闭合表面或者多个表面组合描述。描述体光源采样光线起始坐标点满足的概率密度函数较为复杂。其次,体光源起始点坐标采样是一个三维问题,如何提升三维概率密度函数的采样效率也值得探究。最后,需要定量描述体光源内部辐射光向外传输过程中发生的能量衰减,这会影响建模准确性。在后续研究过程中,将探究复杂体光源建模方法丰富光源建模理论和方法。

参 考 文 献

- [1] 陈志明. 科学计算: 科技创新的第三种方法[J]. 中国科学院院刊, 2012, 27(2): 161-166.
Chen Z M. Scientific computing: the third pillar in science and technology innovations? [J]. Bulletin of Chinese Academy of Sciences, 2012, 27(2): 161-166.
- [2] 朱少平. 浅谈科学计算[J]. 物理, 2009, 38(8): 545-551.
Zhu S P. A brief report on scientific computing[J]. Physics, 2009, 38(8): 545-551.
- [3] Schmidt T W, Novák J, Meng J, et al. Path-space manipulation of physically-based light transport[J]. ACM Transactions on Graphics, 32(4): 129.
- [4] Liu B, Yuan Y, Li S, et al. Simulation of light-field camera imaging based on ray splitting Monte Carlo method[J]. Optics Communications, 2015, 355: 15-26.
- [5] Jakob W, Speierer S, Roussel N, et al. DR.JIT: a just-in-time compiler for differentiable rendering[J]. ACM Transactions on Graphics, 41(4): 124.
- [6] Liang Y, Muhammad W, Hart G R, et al. A general-purpose Monte Carlo particle transport code based on inverse transform sampling for radiotherapy dose calculation[J]. Scientific Reports, 2020, 10: 9808.
- [7] 曾祥伟, 张燕, 杨钧秀. 基于偏振蒙特卡罗法的散射环境前向传输优化算法[J]. 光学学报, 2023, 43(18): 1829001.
Zeng X W, Zhang Y, Yang J X. Forward transports into scattering media by an improved polarized Monte Carlo program [J]. Acta Optica Sinica, 2023, 43(18): 1829001.
- [8] Pattanaik S N, Mudur S P. Computation of global illumination in a participating medium by Monte Carlo simulation[J]. The Journal of Visualization and Computer Animation, 1993, 4(3): 133-152.
- [9] Keller A. A quasi-monte Carlo algorithm for the global illumination problem in the radiosity setting[M]//Niederreiter H, Shiue P J S. Monte Carlo and quasi-monte Carlo methods in scientific computing. Lecture notes in statistics. New York: Springer, 1995, 106: 239-251.
- [10] McCabe H. Markov chain monte Carlo methods for global illumination[D]. Ireland: Image Synthesis Group, Department of Computer Science, Trinity College, 1999: 1-57.
- [11] Laakom F, Raitoharju J, Iosifidis A, et al. Monte Carlo dropout ensembles for robust illumination estimation[C]//2021 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN), July 18-22, 2021, Shenzhen, China. New York: IEEE Press, 2021.
- [12] Veach E. Robust monte Carlo methods for light transport simulation[M]. Palo Alto: Stanford University, 1998: 29-70.
- [13] 周军, 李娟, 王庆丰, 等. 基于自发辐射抑制的红外光机系统优化设计[J]. 光学学报, 2015, 35(3): 0322003.
Zhou J, Li J, Wang Q F, et al. Optimized design of infrared opto-mechanical systems based on the spontaneous emission suppression[J]. Acta Optica Sinica, 2015, 35(3): 0322003.
- [14] 袁磊, 王毕艺, 罗超, 等. 红外探测系统的激光辐照热效应仿真分析[J]. 强激光与粒子束, 2023, 35(2): 021003.
Yuan L, Wang B Y, Luo C, et al. Simulation analysis of thermal effect of laser irradiation in infrared detection system[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2023, 35(2): 021003.
- [15] Palchetti L, Barucci M, Belotti C, et al. Observations of the downwelling far-infrared atmospheric emission at the Zugspitze observatory[J]. Earth System Science Data, 2021, 13(9): 4303-4312.
- [16] Sgheri L, Belotti C, Ben-Yami M, et al. The FORUM end-to-end simulator project: architecture and results[J]. Atmospheric Measurement Techniques, 2022, 15(3): 573-604.
- [17] Diaconis P, Holmes S, Shahshahani M. Sampling from a manifold[M]//Jones G, Shen X T. Advances in modern statistical theory and applications: a festschrift in honor of Morris L. Eaton. Beachwood: Institute of Mathematical Statistics, 2013, 10: 102-125.
- [18] Baggenstoss P M. Uniform manifold sampling (UMS): sampling the maximum entropy PDF[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(9): 2455-2470.
- [19] Zappa E, Holmes-Cerfon M, Goodman J. Monte Carlo on manifolds: sampling densities and integrating functions[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2018, 71(12): 2609-2647.
- [20] Ye J F, Chen L, Li X H, et al. Review of optical freeform surface representation technique and its application[J]. Optical Engineering, 2017, 56(11): 110901.
- [21] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析-下册[M]. 5版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
Mathematical analysis-volume II[M]. 5th ed. Beijing: Higher Education Press, 2019.
- [22] Olver S, Townsend A. Fast inverse transform sampling in one and two dimensions[EB/OL]. (2013-07-04)[2023-05-24]. <https://arxiv.org/abs/1307.1223>.
- [23] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. Numerical recipes: the art of scientific computing[M]. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007: 155-167.
- [24] Rogers D F. An introduction to NURBS: with historical perspective[M]. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
- [25] Bingol O R, Krishnamurthy A. NURBS-Python: an open-source object-oriented NURBS modeling framework in Python [J]. SoftwareX, 2019, 9: 85-94.
- [26] Virtanen P, Gommers R, Oliphant T E, et al. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python[J]. Nature Methods, 2020, 17(3): 261-272.
- [27] Nishino R, Loomis S H C. CuPy: a Numpy-compatible library for NVIDIA GPU calculations[EB/OL]. [2023-05-04]. http://learningsys.org/nips17/assets/papers/paper_16.pdf.

Monte Carlo Modeling Method for Surface Light Source

Tang Haisong^{1,2}, Mao Xianglong^{3*}, Feng Zexin^{1,2}, Li Haoran^{1,2}

¹*Beijing Engineering Research Center of Mixed Reality and Advanced Display, School of Optics and Photonics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;*

²*MOE Key Laboratory of Optoelectronic Imaging Technology and Systems, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;*

³*The New Technology Laboratory of Space Photon Information, Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710119, Shaanxi, China*

Abstract

Objective Monte Carlo simulations are widely applied in the fields such as imaging evaluations, graphical rendering, scattering analysis, and illumination design. Light source modeling, which directly determines the accuracy of the simulation results, is crucial in Monte Carlo simulation. However, light source modeling, especially surface light source modeling, is difficult and rarely discussed publicly. Surface light sources including extended filaments and curved fluorescent tubes are still commonly employed in general and special lighting. Additionally, the external radiation of the non-transparent components of the mechanical structure can also be considered as surface light sources in stray light analysis of far-infrared optical systems. We provide a Monte Carlo modeling method for surface light sources. In this method, we introduce a statistical model of the surface light source and two ray sampling strategies. Results show that the proposed modeling method has high precision. The influence of different sampling strategies and different random numbers on the modeling accuracy and speed is also discussed to guide balancing the modeling accuracy and speed.

Methods Based on the homogeneity assumption, we analyze the spatial and orientational properties of the surface light source separately. We clarify the stochastic ray parameters including the starting point coordinates, direction vectors, energy weights, and their physical implications in the Monte Carlo modeling. Based on the radiation properties of the source, the desired probability density functions for different parameters of the ray are derived. In addition, we describe how to sample the parameters following an arbitrary two-dimensional probability density function based on inverse transform sampling. We introduce two ray sampling strategies of uniform sampling with equal weights and uniform sampling in parameter space. The former strategy samples the rays strictly according to the probability density functions, with equal energy weights. The latter strategy assigns the corresponding weights to the rays and ensures that the weights are proportional to the desired probability density functions, which can considerably improve the computational speed by avoiding numerical integration and interpolation operations. The proposed method can model light sources with arbitrary surfaces, with strong versatility. To verify the accuracy of the modeling results, the integral formula of the irradiance distribution formed by the surface light source on the receiver is derived as the theoretical illuminance distribution (Fig. 1). The accuracy of the modeling method is measured by comparing the relative deviation of the simulated irradiance distribution of the sampled rays from the theoretical value.

Results and Discussions Monte Carlo modeling results and precision analysis are implemented for two different surface light sources, which are expressed by XY-polynomial (Fig. 2) and non-uniform rational B-spline (NURBS) (Fig. 6) respectively. The sampled starting points, ray directions, and rays (Figs. 3 and 7) are provided respectively to show the differences between the two sampling strategies. The calculated theoretical irradiance distributions formed by the two surface light sources at the specified receiver have an extremely high spatial resolution, which can be regarded as continuous (Figs. 4 and 8). The maximum relative deviation between the simulated value and the theoretical value is within 1% for 2^{24} ($\approx 1.6 \times 10^7$) sampling rays, demonstrating a high modeling accuracy (Figs. 5 and 9). The uniform sampling strategy with equal weights leads to slightly higher modeling accuracy than that of uniform sampling in parameter space. For the NURBS surface light source, we analyze the differences in modeling accuracy and speed between the two sampling strategies under different numbers of rays and the influence of different random numbers on modeling accuracy (Fig. 10). This shows that the average modeling error gradually decreases while the modeling time increases with the rising number of rays. In contrast to pseudorandom numbers, the utilization of quasi-random numbers can improve the modeling accuracy. The strategy of uniform sampling in parameter space is faster than that of uniform sampling with equal weights since the latter employs the computationally expensive inverse transform sampling.

Conclusions We propose a Monte Carlo modeling method for surface light sources. Based on the homogeneity assumption, the spatial and orientational radiation characteristics are analyzed separately. Probability density functions and

sampling strategies are presented for different parameters of the rays, and a way to verify the accuracy of the modeling results is also proposed. For the two modeling examples of surface light sources, the maximum relative deviation of the simulated irradiance distribution from the theoretical value at the specified receiver is less than 1% when the number of sampled rays is at the order of 10^7 , demonstrating high modeling accuracy. In addition, the effect of different sampling strategies on modeling accuracy and speed is analyzed under different numbers of rays. The uniform sampling strategy with equal weights leads to higher modeling accuracy. In contrast, the uniform sampling strategy in parameter space is considerably faster. Comparisons through different random numbers show that quasi-random numbers can improve modeling accuracy.

Key words optical simulation; Monte Carlo; light source modeling; surface light source; uniform sampling