

# 排斥抛物势中相互作用时空调控的超冷玻色气体孤子的反射、局域、穿越与振荡行为操控

何章明, 朱钱泉\*, 潘湘

湖南工业大学理学院, 湖南 株洲 412007

**摘要** 考虑原子间相互作用随时间变化, 首先基于 Darboux 变换法, 得到一维无量纲的非线性薛定谔方程的孤子解, 发现排斥抛物势中超冷原子之间随时间呈指数增加(减小)的相互作用对孤子有一个阻力(推力)作用。然后, 利用直接数值模拟的方法研究了排斥抛物势中相互作用时空调控的超冷玻色气体孤子动力学行为, 发现: 当原子间相互作用不变时, 存在一个临界速率; 当原子间相互作用随空间坐标变化时, 不但孤子的临界局域速率会变小, 而且即使初始速率为 0, 孤子也可穿过势垒, 并产生一个周期性振荡行为, 振荡周期可通过改变囚禁频率和原子间相互作用来调控。相关结果可为超冷玻色气体在量子信息方面的应用提供一定的参考。

**关键词** 量子光学; 超冷玻色气体; 亮孤子; 原子间相互作用

**中图分类号** O469 **文献标志码** A

**DOI:** 10.3788/AOS230783

## 1 引言

相互作用时空调控的超冷玻色气体的实验实现, 不仅极大地拓宽了超冷原子物理的研究范围, 也为研究新奇量子现象提供了理想平台, 研究超冷玻色气体奇异物性和新奇量子态及其量子调控已成为当前玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)领域的热点之一<sup>[1-12]</sup>。大量的研究证实凝聚体中亮孤子在原子激光<sup>[12]</sup>和原子干涉仪<sup>[13-17]</sup>等方面有潜在的应用价值, 例如: 稳定传播的亮孤子可用来实现原子激光<sup>[18]</sup>; BEC 中孤子的融合和分裂可应用于 Sagnac 干涉仪<sup>[15]</sup>; 亮孤子通过 Rosen-Morse 势垒的碰撞分裂现象可用来实现干涉仪<sup>[17]</sup>。此外, 通过调节双组分 BEC 中原子间相互作用, 可控制亮-亮孤子的分裂和碰撞融合行为, 并产生贝尔态, 因此 BEC 在量子信息方面也具有潜在的应用价值<sup>[19]</sup>。

BEC 的物性可通过外部囚禁势阱和原子间相互作用来调控<sup>[20-23]</sup>。实验中, 人们发展了多种方法来调节凝聚体中原子间相互作用随时间或者空间坐标的变化, 例如光学 Feshbach 共振技术、磁-光 Feshbach 共振技术等。然而, 利用这些技术只能调节原子间相互作用在很小的范围内变化, 并且在这个过程中 BEC 因丢失原子而不稳定。在近年来的实验中, 基于磁 Feshbach 共振技术结合空间梯度磁场, 可调节 BEC 中原子间相互作用随空间坐标的变化, 并导致凝聚体中

的原子在空间中分布不均, 从而形成长时间存在的相互作用时空调控的凝聚体<sup>[24]</sup>。同时, 在实验中观察到亮孤子的形成, 相互作用时空调控的 BEC 的动力学行为也被首次研究<sup>[24]</sup>。理论上, 通过一类变换法, 张解放课题组得到了谐振势中相互作用时空调控的 BEC 的孤子解析解, 发现孤子数量与化学势和谐振势的能级有关<sup>[25]</sup>。利用相似变换, 王灯山课题组研究了一维和二维相互作用时空调控的 BEC, 发现在其中都存在稳定的局域非线性物质波<sup>[26-27]</sup>。当相互作用时空调控的 BEC 中原子间相互作用增加到一定值时, 光晶格中的离散亮孤子在晶格中可保持稳定<sup>[28]</sup>; 当相互作用时空调控的 BEC 中原子间相互作用呈高斯分布时, 在雪茄型凝聚体中也可形成法拉第波<sup>[29]</sup>。Sudharsan 等<sup>[30]</sup>发现化学势超过临界值时, 在二维相互作用时空调控的 BEC 中可形成稳定涡旋。大量的理论研究工作已经证明可以获得相互作用时空调控的 BEC 中孤子等非线性结构的解析解, 但很少涉及其动力学行为。基于此, 本文通过数值模拟来研究相互作用时空调控的凝聚体中亮孤子的动力学行为。结果发现, 当原子间相互作用不变时, 存在一个临界速率: 如果孤子的初速率大于临界速率, 孤子可以穿过排斥势垒; 如果孤子的初速率小于临界速率, 孤子运动到势垒中心时会被势垒反射回来; 如果孤子的初速率等于临界速率, 孤子运动到势垒中心后形成一个局域态。当原子间相互作用随

收稿日期: 2023-04-06; 修回日期: 2023-04-17; 录用日期: 2023-05-19; 网络首发日期: 2023-06-01

基金项目: 国家自然科学基金(11975094, 12005057)

通信作者: \*qianquanzhu@126.com

时间呈指数增加时,可以实现孤子运动的局域-反射和穿越-反射转变;当原子间相互作用随时间呈指数减小时,可以实现孤子运动的局域-穿越和反射-穿越转变。此外,当原子间相互作用随空间坐标变化时,不但孤子的临界局域速度会变小,而且即使初速度为0,孤子也可穿过势垒,并产生一个周期性振荡。

## 2 模型

考虑相互作用时空调控的凝聚体囚禁于排斥抛物势阱中,其性质可用无量纲的非线性薛定谔方程来描述,即

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2g(x, t)|\psi|^2\psi - \frac{\omega^2}{2}x^2\psi, \quad (1)$$

式中: $\omega$ 为常数;非线性系数 $g(x, t) = 2Na_s(x, t)/a_{\perp}$ ,其中 $N$ 表示凝聚体中的原子数量, $a_s$ 为S波的散射长度,凝聚体振动长度 $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/(M\omega_{\perp})}$ , $M$ 为BEC中原子的质量, $\omega_{\perp}$ 为谐振势阱的横向囚禁频率, $\hbar$ 为约化普朗克常量。无量纲参量选取为 $X = a_{\perp}x$ 、 $T = 2t/\omega_{\perp}$ 。基于BEC的实验,凝聚体中原子数量 $N$ 选为5000,同

时考虑横向囚禁频率 $\omega_{\perp}$ 为 $100\pi$  Hz。

## 3 达布变换和孤子解

为研究原子间相互作用变化对BEC中孤子动力学性质的影响,首先选取 $a_s = -10.1\exp(4At)a_B$ ( $a_B$ 为玻尔半径, $A$ 为常数),然后基于达布变换精确求解式(1),构造如下Lax对:

$$\begin{cases} \Phi_x = U\Phi = \lambda J\Phi + P\Phi \\ \Phi_t = V\Phi = \sum_{j=0}^n V_j \lambda^{n-j} \Phi \end{cases}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \\ J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ P = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix} \\ V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & -v_{11} \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (3)$$

Lax对的可积条件为 $U_t - V_x + [U, V] = 0$ ,因此取

$$\begin{cases} p = \psi \exp[2At + iA(t)x^2 + iB(t)x + iC(t)] \\ q = -\bar{\psi} \exp[2At - iA(t)x^2 - iB(t)x - iC(t)] \\ v_{11} = 2i\lambda^2 + i \exp(4At)|\psi|^2 + [4Ax + 2\exp(4At)]\lambda \\ v_{12} = \exp(2At)\{2i\psi\bar{Q}\lambda + i\psi_x\bar{Q} + [2Ax + \exp(4At)]\psi\bar{Q}\} \\ v_{21} = \exp(2At)\{-2i\bar{\psi}Q\lambda - i\bar{\psi}_xQ - [2Ax + \exp(4At)]\bar{\psi}Q\} \end{cases}, \quad (4)$$

式中: $A = \pm\omega/2$ ;  $Q = \exp[-iAx^2 - i\exp(4At)x - i\exp(8At)/(8A)]$ ;  $B(t) = \exp(4At)$ ;  $C(t) = \exp(8At)/(8A)$ 。为了求解式(2),选取式(1)的一个初始平面波解

$$\psi_0 = Q \exp\left[2At + i\frac{\exp(8At)}{4A}\right], \quad (5)$$

将得到的Lax对的解代入一次达布变换式

$$\psi = \psi_0 \left[ 1 + 2(\lambda_{01} + \bar{\lambda}_{01}) \frac{z}{1 + |z|^2} \right], \quad (6)$$

即可得到式(1)的新解

$$\psi = \psi_0 \left[ -1 + 2 \frac{(\lambda_{01}^2 - 1)\cos\varphi + i\lambda_{01}\sqrt{\lambda_{01}^2 - 1}\sin\varphi}{\lambda_{01}^2 \cosh\theta + \lambda_{01}\sqrt{\lambda_{01}^2 - 1}\sinh\theta - \cos\varphi} \right], \quad (7)$$

式中: $\lambda_{01}$ 为谱参数; $z = \phi_1 \times \exp[-i\exp(8At)/(4A)]/\phi_2$ ;  $\theta = 2\sqrt{\lambda_{01}^2 - 1}\exp(4At) \times [x + \exp(4At)/(4A)]$ ;  $\varphi = \lambda_{01}\sqrt{\lambda_{01}^2 - 1} \times$

$\exp(8At)/(2A)$ 。

根据式(7)得到凝聚体初始时刻的密度分布,如图1所示。从图1(a)看到,当原子间相互作用随时间呈指数增加时,一个亮孤子出现在 $x \approx -12.9$ 处;当原子间相互作用随时间呈指数减小时,如图1(b)所示,亮孤子出现在 $x \approx 12.1$ 处。两种情况下,两个孤子的幅度和宽度相同,相应的运动轨迹如图2所示。从图2看到,当原子间相互作用随时间呈指数增加( $A = 0.02$ )时,亮孤子从 $x \approx -12.9$ 处向 $x$ 轴负方向匀速运动,此时孤子受到势垒的排斥推力 $F_1$ , $F_1$ 的方向沿着 $x$ 轴负方向,表明随时间呈指数增加的原子间相互作用对孤子运动产生一个阻力 $F_2$ , $F_2$ 的方向沿着 $x$ 轴正方向。在孤子运动过程中, $|F_1| = |F_2|$ ,使得孤子保持匀速运动。当原子间相互作用随时间呈指数减小( $A = -0.02$ )时,孤子从 $x \approx 12.1$ 处向势垒中心位置匀速运动,此时孤子受到的势垒排斥力 $F_1$ 的方向沿着 $x$ 轴正方向,因此随时间呈指数减小的原子间相互作用对孤子运动产生一个推力 $F_3$ , $F_3$ 的方向沿着 $x$ 轴负方向。在孤子运动过程中, $|F_1| = |F_3|$ ,因此孤子也保持匀速运动。

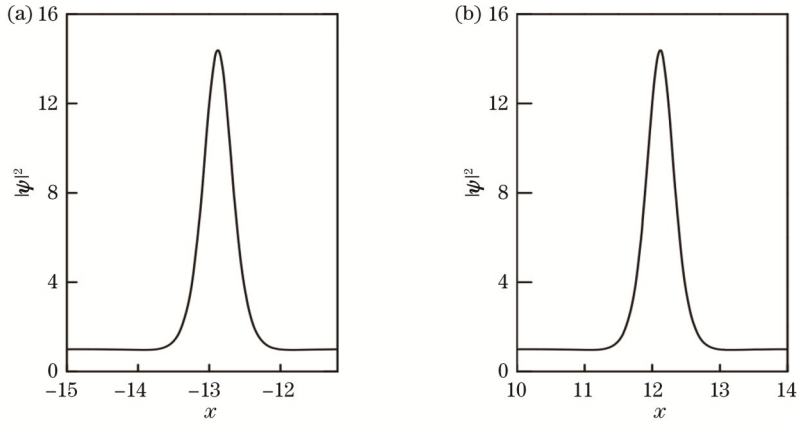


图 1 初始时刻凝聚体密度分布( $\lambda_{01} = 2.0$ )。(a)原子间相互作用随时间呈指数增加( $A=0.02$ );(b)原子间相互作用随时间呈指数减小( $A=-0.02$ )

Fig. 1 Density distribution of the condensate at initial time ( $\lambda_{01} = 2.0$ ). (a) Atom interaction increases exponentially with time ( $A = 0.02$ ); (b) atom interaction decreases exponentially with time ( $A = -0.02$ )

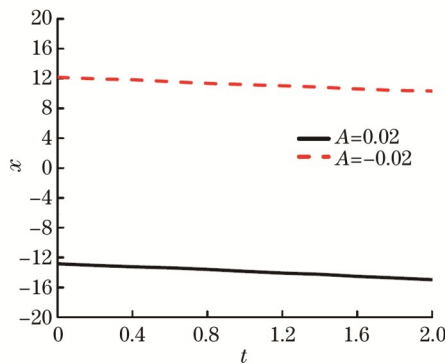


图 2  $\lambda_{01} = 2.0$ 时亮孤子的运动轨迹  
Fig. 2 Trajectories of bright soliton at  $\lambda_{01} = 2.0$

### 4 孤子反射、局域与隧穿

考虑原子间相互作用随空间坐标  $x$  变化后,式(1)无法解析求解,因此基于Crank-Nicolson方法来对排斥抛物势中相互作用时空调控的BEC的孤子动力学行为进行数值研究。式(1)的初始条件选为

$$\psi(x, 0) = \exp(-ivx) \operatorname{sech}(x - x_0), \quad (8)$$

式中: $v$ 为初始速率; $x_0$ 为初始位置。为了对比,首先考虑原子间相互作用不变,选取 $g = -2.0$ 。当孤子的初始速率 $v = 0.42400$ 时,其动力学行为如图3所示。从图3可发现:BEC中的孤子朝 $x$ 轴正方向运动,在 $t \approx 22$ 时到达势垒的中心位置;随着时间的继续推移,孤子整体向 $x$ 轴负方向运动。这表明孤子被势垒反射回来了,并且孤子没有发生分裂。接下来,设初始速率 $v = 0.42500$ ,其他参数不变,相应的孤子动力学行为如图4所示。从图4看到,在 $t \approx 20$ 时孤子到达势垒的中心位置,随着时间的继续推移,孤子穿过势垒中心,继续向 $x$ 轴正方向运动,期间孤子也没有发生分裂,表明孤子在这个初始速率下可穿过排斥势垒。

图3和图4所示结果也表明:孤子的初始速率存在

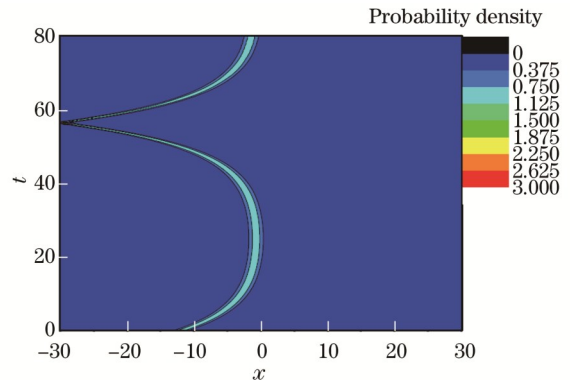


图 3  $v = 0.42400, g = -2.0, x_0 = -12.0, \omega = 0.1$ 时原子间相互作用不变的凝聚体中的孤子反射行为

Fig. 3 Reflection behavior of solitons in condensates with unchanged atom interaction when  $v = 0.42400, g = -2.0, x_0 = -12.0,$  and  $\omega = 0.1$

一个临界值。当初始速率比临界值小时,孤子就会被势垒反射回去;当初始速率比临界值大时,孤子可穿过势垒。为了找到这个临界速率,继续改变孤子的初始速率,发现当孤子的初始速率 $v = 0.42474$ 时,如图5所示,孤子运动到势垒中心位置后产生一个局域行为。这是因为孤子在排斥抛物势垒的作用下作减速运动,当运动到势阱中心后速度为0,而在势垒中心位置受到势垒的作用力也为0( $|F_1| = 0$ ),所以孤子产生局域行为。随着时间的继续推移,局域孤子的宽度和幅度不变,孤子保持稳定。为了研究囚禁势对孤子局域行为的影响,计算了不同囚禁频率下的孤子局域行为,相应的孤子临界局域速率随囚禁频率的变化关系如图6所示。从图6可看到,随着囚禁频率的增加,孤子的临界局域速率呈线性增加。

为了研究随时间变化的原子间相互作用对孤子局域、反射和穿越行为的影响,考虑 $a_s = -10.1 \exp(\lambda t) a_B$ ,其中 $\lambda$ 为常数。选取孤子的初始速



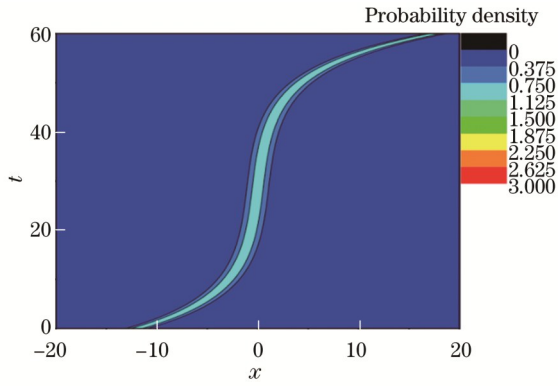


图 4  $v=0.42500$ 、 $g=-2.0$ 、 $x_0=-12.0$ 、 $\omega=0.1$  时原子间相互作用不变的凝聚体中的孤子穿越行为

Fig. 4 Transmission behavior of solitons in condensates with unchanged atom interaction when  $v=0.42500$ ,  $g=-2.0$ ,  $x_0=-12.0$ , and  $\omega=0.1$

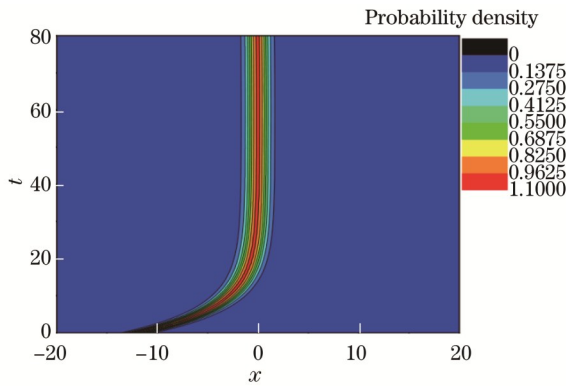


图 5  $v=0.42474$ 、 $g=-2.0$ 、 $x_0=-12.0$ 、 $\omega=0.1$  时原子间相互作用不变的凝聚体中的孤子局域行为

Fig. 5 Localization behavior of solitons in condensates with unchanged atom interaction when  $v=0.42474$ ,  $g=-2.0$ ,  $x_0=-12.0$ , and  $\omega=0.1$

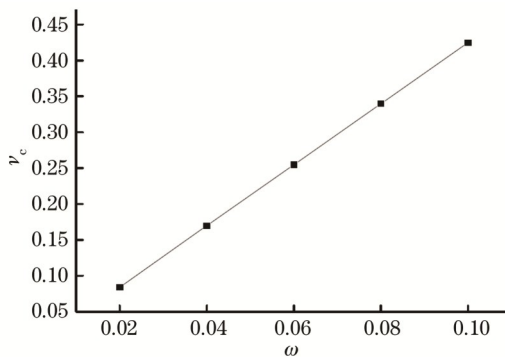


图 6  $g=-2.0$ 、 $x_0=-12.0$  时原子间相互作用不变的凝聚体中孤子的临界局域速率随囚禁频率的变化关系

Fig. 6 Critical local speed of solitons in condensates with unchanged atom interaction varying with potential frequency when  $g=-2.0$  and  $x_0=-12.0$

率等于临界局域速率  $v_c=0.42474$ ，不同的原子间相互作用下孤子的运动轨迹如图 7 所示，其中实线表示

相互作用不变( $\lambda=0$ )，虚线表示相互作用增加( $\lambda=0.01$ )，点线表示相互作用减小( $\lambda=-0.01$ )。当原子间相互作用随时间呈指数增加( $\lambda=0.01$ )时，孤子运动到势垒中心后被反射回来，这是因为当原子间相互作用不变时，孤子只受到势垒排斥力  $F_1$ 。当原子间相互作用指数增加时，孤子除了受到势垒的排斥力外，随时间呈指数增加的原子间相互作用对孤子也产生了一个阻力  $F_2$ 。 $F_1$  和  $F_2$  的方向都是沿着  $x$  轴负方向，所以孤子受到的合力  $|F_1+F_2|>|F_1|$ ，从而被反射回来。当原子间相互作用随时间呈指数减小( $\lambda=-0.01$ )时，孤子可以通过势垒，这是因为随时间呈指数减小的原子间相互作用对孤子产生了一个推力  $F_3$ ， $F_3$  的方向是沿着  $x$  轴正方向，与势垒排斥力  $F_1$  的方向相反，所以孤子受到的合力  $||F_1|-|F_3||<|F_1|$ ，因此孤子可以穿过势垒。图 7 所示的结果也表明：随时间呈指数变化的原子间相互作用会破坏孤子的局域行为，并通过调节原子间相互作用随时间呈指数增加(减小)来实现孤子运动从局域到反射(穿越)的转变。

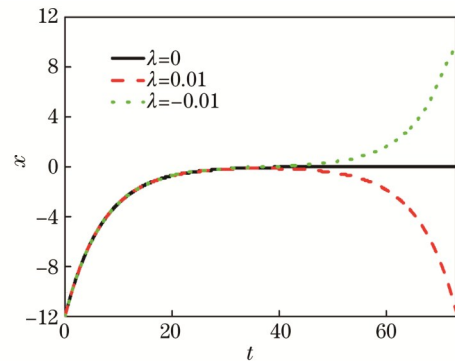


图 7  $v_c=0.42474$ 、 $x_0=-12.0$ 、 $\omega=0.1$  时不同原子间相互作用下孤子的位置变化

Fig. 7 Change of soliton position under different atom interactions when  $v_c=0.42474$ ,  $x_0=-12.0$ , and  $\omega=0.1$

接下来选取孤子的初速率小于临界局域速率，即  $v=0.42473$ ，不同原子间相互作用下孤子的运动轨迹如图 8 所示。从图 8 看到：当原子间相互作用不变( $\lambda=0$ )时，孤子运动到势垒中心后被反射回来；当原子间相互作用随时间呈指数减小( $\lambda=-0.01$ )时，孤子穿过了势垒，这也是因为随时间呈指数减小的原子间相互作用对孤子产生了一个推力  $F_3$ ， $F_3$  的方向沿着  $x$  轴正方向，与势垒排斥力  $F_1$  的方向相反，因此孤子受到的合力  $||F_1|-|F_3||<|F_1|$ ，孤子可以穿过势垒。当选取孤子的初速率大于临界局域速率，即  $v=0.42476$ ，相应的孤子运动轨迹如图 9 所示。从图 9 看到：当原子间相互作用不变( $\lambda=0$ )时，孤子穿过了势垒；当原子间相互作用随时间呈指数增加( $\lambda=0.01$ )时，孤子运动到势垒中心后被反射回来。图 8 和图 9 所示的结果表明：当原子间相互作用随时间呈指

数增加时,即使孤子的初始速率大于临界速率,也会被势垒反射回来,并可实现孤子运动从穿越到反射的转变;当原子间相互作用随时间呈指数减小时,即使孤子的初始速率小于临界速率,也可以穿过势垒,并可实现孤子运动从反射到穿越的转变。

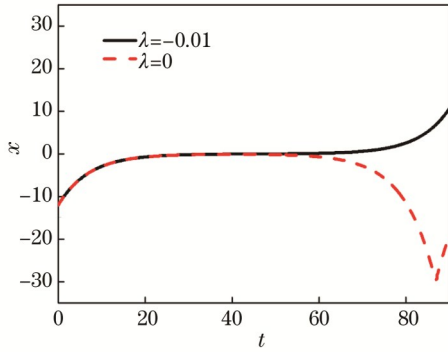


图 8  $v = 0.42473, x_0 = -12.0, \omega = 0.1$  时凝聚体中孤子的反射-穿越转变

Fig. 8 Reflection-transmission transition of solitons in condensates when  $v = 0.42473, x_0 = -12.0$ , and  $\omega = 0.1$

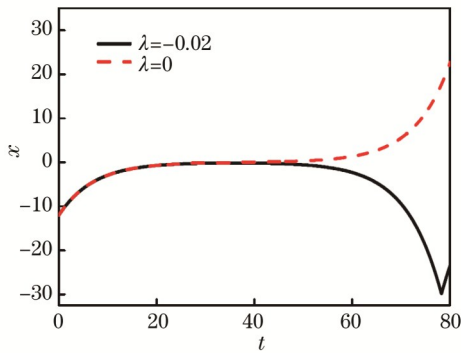


图 9  $v = 0.42476, x_0 = -12.0, \omega = 0.1$  时凝聚体中孤子的穿越-反射转变

Fig. 9 Transmission-reflection transition of solitons in condensates when  $v = 0.42476, x_0 = -12.0$ , and  $\omega = 0.1$

为了研究相互作用时空调控的凝聚体中的孤子动力学行为,考虑 S 波散射长度  $a_s = -10.1(1 - kx^2)a_B$ , 其中  $k$  为常数。此时, S 波散射长度绝对值  $|a_s|$  随着坐标  $|x|$  的增大而减小,  $k$  越大, S 波散射长度绝对值  $|a_s|$  变化越快。当孤子的初始速度  $v = 0.39777$  时,其动力学行为如图 10 所示。从图 10 可发现,孤子在  $t \approx 24$  时到达势阱的中心位置,然后孤子位置保持不变,幅度呈高低变化。与图 5 所示的孤子局域行为相比,图 10 所示的孤子局域速率变小。接下来,计算不同囚禁频率下相互作用时空调控的凝聚体中的孤子局域行为。相应的孤子临界局域速率随囚禁频率的变化如图 11 所示。从图 11 可看到,孤子临界局域速率与囚禁频率仍呈线性关系,但是与图 6 所示的结果相比,孤子的局域速率变小。这是因为孤子除了受到势垒的排斥

力外,原子间相互作用随空间坐标  $|x|$  的增大而变小,而减小的原子间相互作用同样对孤子有一个推力  $F_4$ 。在初始时刻,  $F_4$  的方向沿着  $x$  轴正方向,与势垒给予的排斥力方向相反,因此孤子受到的合力  $||F_1| - |F_4|| < |F_1|$ , 为克服合力产生局域行为所需的初始速率也小。

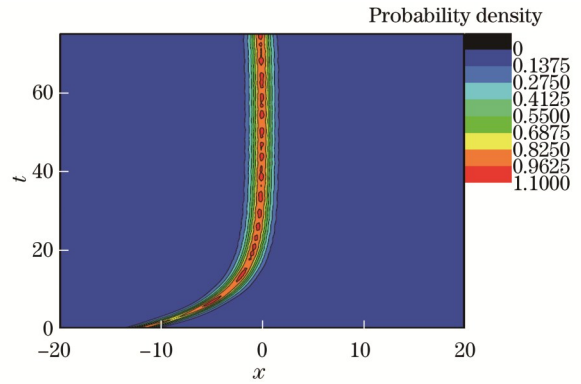


图 10  $v = 0.39777, k = 0.001, x_0 = -12.0, \omega = 0.1$  时相互作用时空调控凝聚体中孤子的局域行为

Fig. 10 Localization behavior of solitons in inhomogeneous condensates when  $v = 0.39777, k = 0.001, x_0 = -12.0$ , and  $\omega = 0.1$

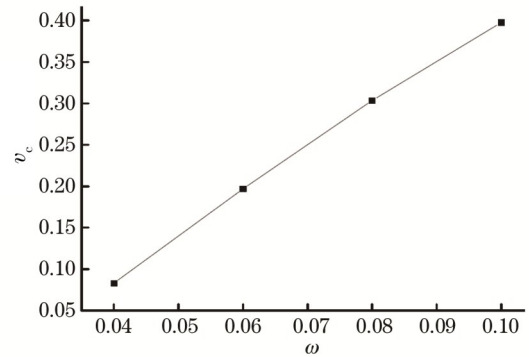


图 11  $k = 0.001, x_0 = -12.0$  时相互作用时空调控凝聚体中孤子的临界局域速率随囚禁频率的变化关系

Fig. 11 Critical local speed of solitons in inhomogeneous condensates varying with the potential frequency when  $k = 0.001$  and  $x_0 = -12.0$

为了研究推力  $F_4$  对凝聚体中孤子性质的影响,选取孤子初始速率  $v = 0$ ,并减小囚禁频率,选取  $\omega = 0.02$ ,相应的孤子运动轨迹如图 12 所示。从图 12 可发现,在时间  $t$  从 0 增加到 40 的过程中,即使 BEC 中孤子的初始速率为 0,孤子还是朝  $x$  轴正方向运动,在  $t \approx 40$  时到达势垒中心  $x = 0$  处。这因为孤子受到势垒的排斥力  $F_1$  ( $F_1$  方向沿着  $x$  轴负方向) 和沿着  $x$  轴负方向减小的原子间相互作用对孤子的推力  $F_4$  ( $F_4$  的方向沿着  $x$  轴正方向),在这段时间内  $|F_4| > |F_1|$ ,孤子受到的合力 ( $||F_4| - |F_1||$ ) 的方向指向  $x$  轴正方向,所以孤子在这个合力的作用下沿着  $x$  轴正方向运动。随着时间

$t$  从 40 增加到 80, 孤子穿过势垒, 继续受到势垒的排斥力  $F_1$  (此时  $F_1$  的方向变为沿着  $x$  轴正方向) 和沿着  $x$  轴正方向减小的原子间相互作用对孤子的推力  $F_4$  (此时  $F_4$  方向变为沿着  $x$  轴负方向), 孤子受到的推力同样大于势垒给予的排斥力 ( $|F_4| > |F_1|$ ), BEC 中孤子受到的合力 ( $|F_4| - |F_1|$ ) 的方向指向  $x$  轴负方向, 因此孤子在这个合力的影响下作减速运动。当时间  $t \approx 80$ , 孤子运动到  $x = 12$  处, 速率变为 0。随着时间继续增加, 孤子在合力作用下 (合力方向沿着  $x$  轴负方向) 沿着  $x$  轴负方向运动, 在  $t \approx 120$  时, 孤子回到势阱中心  $x = 0$  处。在  $t \approx 160$  时, 孤子回到初始位置  $x = -12$  处, 并且速率变为 0。相同的现象在图 12 中其他相同的时间段也能被观察到, 相应孤子受到势垒的排斥力  $F_1$  和因原子间相互作用减小而产生的推力  $F_4$  的共同作用, 合力 ( $|F_4| - |F_1|$ ) 的方向总是指向势垒中心  $x = 0$  处, 从而类似于在谐振势阱中产生一个周期性振荡, 振荡周期  $T \approx 160$ 。

为了研究原子间相互作用变化对孤子周期性振荡的影响, 计算不同  $k$  值下孤子的振荡行为, 相应的振荡周期随  $k$  值的变化如图 13 所示。从图 13 看到, 孤子的振荡周期随着  $k$  值的增大而变小, 这是因为随着  $k$  值的增大, S 波散射长度绝对值  $|a_s|$  减小速度越快, 即原子间相互作用的减小速度越快, 对孤子产生的推力  $F_4$  也越大, 即孤子受到的合力 ( $|F_4| - |F_1|$ ) 增大, 导致孤子振荡周期减小。

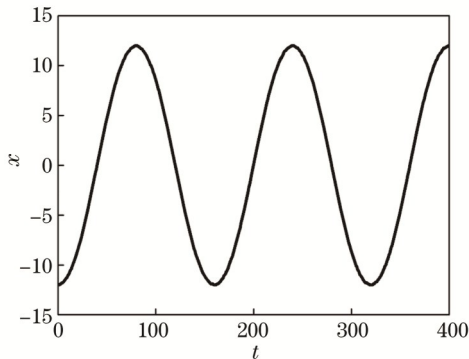


图 12  $v = 0, k = 0.001, x_0 = -12.0, \omega = 0.02$  时凝聚体中孤子的周期性振荡行为

Fig. 12 Periodic oscillation behavior of solitons in condensates when  $v = 0, k = 0.001, x_0 = -12.0,$  and  $\omega = 0.02$

最后, 为了研究囚禁势阱对孤子周期振荡行为的影响, 计算了不同囚禁频率下孤子的振荡行为, 相应的振荡周期随频率  $\omega$  的变化如图 14 所示。从图 14 看到, 孤子的振荡周期随着频率  $\omega$  的增加而增大。这是因为随着势垒频率  $\omega$  的增大, 孤子受到的势垒排斥力  $F_1$  增大, 因此孤子受到的合力  $|F_4| - |F_1|$  减小, 导致孤子振荡周期增大。图 13 和 14 所示的结果也表明: 可通过调节原子间相互作用和囚禁势垒实现对孤子周期

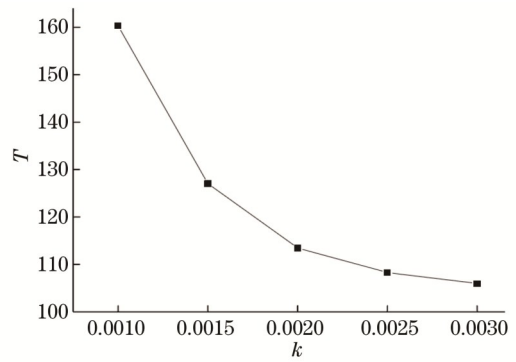


图 13  $v = 0, x_0 = -12.0, \omega = 0.02$  时不同原子间相互作用下孤子的振荡周期

Fig. 13 Oscillation period of solitons under different interatomic interactions when  $v = 0, x_0 = -12.0,$  and  $\omega = 0.02$

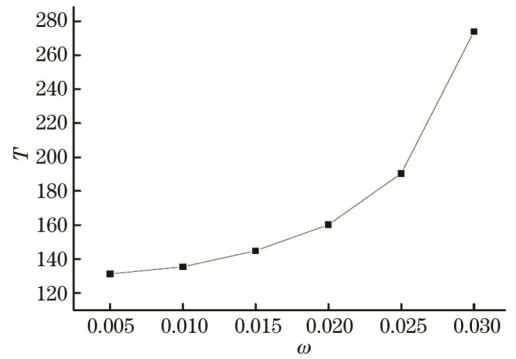


图 14  $v = 0, x_0 = -12.0, k = 0.001$  时不同势阱囚禁频率下孤子的振荡周期

Fig. 14 Oscillation period of solitons at different potential frequencies when  $v = 0, x_0 = -12.0,$  and  $k = 0.001$

性振荡的精确控制。

## 5 结 论

对凝聚体中孤子的穿越、反射、局域和周期性振荡行为进行数值模拟。首先基于 Darboux 变换法, 得到一维无量纲的非线性薛定谔方程的孤子解, 发现随时间呈指数增加 (减小) 的原子间相互作用对孤子有一个阻力 (推力) 作用。然后, 利用 Crank-Nicolson 方法对孤子的动力学行为进行数值模拟。当原子间相互作用不变时, 存在一个临界速率: 如果孤子的初速率大于临界速率, 孤子可以穿过排斥势垒; 如果孤子的初始速率小于临界速率, 孤子运动到势垒中心处时被势垒反射回来; 如果孤子的初速率等于临界速率, 孤子运动到势垒中心后形成一个局域态, 并且临界局域速率随着囚禁频率的增加而线性增大, 即孤子局域行为可通过调节外部势来控制。当原子间相互作用随时间呈指数增加时, 孤子的局域行为消失, 并且即使孤子的初始速率大于临界速率, 也会被势垒反射回来, 实现孤子运动的局域-反射和穿越-反射转变; 当原子间相互作用随时间呈指数减小时, 孤子的局域现象同样消失, 并且即使



孤子的初始速率小于临界速率,也可以穿过势垒,实现孤子运动的局域-穿越和反射-穿越转变。此外,当原子间相互作用随空间坐标 $|x|$ 的增大而减小时,不但孤子的临界局域速度会变小,而且即使初始速率为0,孤子也可穿过势垒,并产生一个周期性振荡行为。振荡周期可通过改变囚禁频率和原子间相互作用来控制。相关结果可为未来凝聚体的应用提供参考。

## 参 考 文 献

- [1] Kengne E, Liu W M, Malomed B A. Spatiotemporal engineering of matter-wave solitons in Bose-Einstein condensates [J]. *Physics Reports*, 2021, 899: 1-62.
- [2] Kengne E, Lakhssassi A, Liu W M, et al. Phase engineering, modulational instability, and solitons of Gross-Pitaevskii-type equations in 1+1 dimensions[J]. *Physical Review E*, 2013, 87(2): 022914.
- [3] Sakkaf L A, Uthayakumar T, Khawaja U A. Quantum reflection of dark solitons scattered by reflectionless potential barrier and position-dependent dispersion[J]. *Physical Review E*, 2022, 105(6): 064207.
- [4] Kim M, Rabga T, Lee Y, et al. Suppression of spontaneous defect formation in inhomogeneous Bose gases[J]. *Physical Review A*, 2022, 106(6): L061301.
- [5] Rakhimov A, Abdurakhmonov T, Narzikulov Z, et al. Self-consistent theory of a homogeneous binary Bose mixture with strong repulsive interspecies interaction[J]. *Physical Review A*, 2022, 106(3): 033301.
- [6] He X G, Zhao D, Li L, et al. Engineering integrable nonautonomous nonlinear Schrödinger equations[J]. *Physical Review E*, 2009, 79(5): 056610.
- [7] Cheng Y S, Adhikari S K. Localization of collisionally inhomogeneous condensates in a bichromatic optical lattice[J]. *Physical Review A*, 2011, 83(2): 023620.
- [8] Zhong W P, Belić M R, Malomed B A, et al. Solitary waves in the nonlinear Schrödinger equation with Hermite-Gaussian modulation of the local nonlinearity[J]. *Physical Review E*, 2011, 84(4): 046611.
- [9] Liu Q H, Qian D B. Construction of modulated amplitude waves via averaging in collisionally inhomogeneous Bose-Einstein condensates[J]. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2012, 19(2): 255-268.
- [10] Zhang S L, Zhou Z W, Wu B A. Superfluidity and stability of a Bose-Einstein condensate with periodically modulated interatomic interaction[J]. *Physical Review A*, 2013, 87(1): 013633.
- [11] Yan Z Y, Konotop V V, Yulin A V, et al. Two-dimensional superfluid flows in inhomogeneous Bose-Einstein condensates [J]. *Physical Review E*, 2012, 85(1): 016601.
- [12] 陈影, 周昱, 马晓栋. 玻色-爱因斯坦凝聚均匀系统中集体激发的朗道阻尼[J]. *光学学报*, 2022, 42(16): 1627001.  
Chen Y, Zhou Y, Ma X D. Landau damping of collective excitation in Bose-Einstein condensed homogeneous system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2022, 42(16): 1627001.
- [13] Helm J L, Billam T P, Gardiner S A. Bright matter-wave soliton collisions at narrow barriers[J]. *Physical Review A*, 2012, 85(5): 053621.
- [14] Helm J L, Rooney S J, Weiss C, et al. Splitting bright matter-wave solitons on narrow potential barriers: quantum to classical transition and applications to interferometry[J]. *Physical Review A*, 2014, 89(3): 033610.
- [15] Helm J L, Cornish S L, Gardiner S A. Sagnac interferometry using bright matter-wave solitons[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(13): 134101.
- [16] Polo J, Ahufinger V. Soliton-based matter-wave interferometer [J]. *Physical Review A*, 2013, 88(5): 053628.
- [17] Li S C, Fu L B, Duan W S, et al. Nonlinear Ramsey interferometry with Rosen-Zener pulses on a two-component Bose-Einstein condensate[J]. *Physical Review A*, 2008, 78(6): 063621.
- [18] He Z M, Wang D L, Ding J W, et al. Effect of interspecies interactions on the collision properties of bright-bright solitons in two-species Bose-Einstein condensates[J]. *The European Physical Journal D*, 2012, 66(5): 139.
- [19] Gertjerken B, Billam T P, Blackley C L, et al. Generating mesoscopic bell states via collisions of distinguishable quantum bright solitons[J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(10): 100406.
- [20] 文林, 梁毅, 周晶, 等. 线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响[J]. *物理学报*, 2019, 68(8): 080301.  
Wen L, Liang Y, Zhou J, et al. Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates[J]. *Acta Physica Sinica*, 2019, 68(8): 080301.
- [21] Dong G J, Hu B, Lu W P. Ground-state properties of a Bose-Einstein condensate tuned by a far-off-resonant optical field[J]. *Physical Review A*, 2006, 74(6): 063601.
- [22] Dong G J, Hu B. Management of Bose-Einstein condensates by a spatially periodic modulation of the atomic s-wave scattering length[J]. *Physical Review A*, 2007, 75(1): 013625.
- [23] Mayteevarunyoo T, Malomed B A, Dong G J. Spontaneous symmetry breaking in a nonlinear double-well structure[J]. *Physical Review A*, 2008, 78(5): 053601.
- [24] Di Carli A, Henderson G, Flannigan S, et al. Collisionally inhomogeneous Bose-Einstein condensates with a linear interaction gradient[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(18): 183602.
- [25] Tian Q, Wu L, Zhang J F, et al. Exact soliton solutions and their stability control in the nonlinear Schrödinger equation with spatiotemporally modulated nonlinearity[J]. *Physical Review E*, 2011, 83(1): 016602.
- [26] Wang D S, Hu X H, Hu J P, et al. Quantized quasi-two-dimensional Bose-Einstein condensates with spatially modulated nonlinearity[J]. *Physical Review A*, 2010, 81(2): 025604.
- [27] Wang D S, Hu X H, Liu W M. Localized nonlinear matter waves in two-component Bose-Einstein condensates with time- and space-modulated nonlinearities[J]. *Physical Review A*, 2010, 82(2): 023612.
- [28] Gligorić G, Maluckov A, Hadžievski L, et al. Discrete localized modes supported by an inhomogeneous defocusing nonlinearity [J]. *Physical Review E*, 2013, 88(3): 032905.
- [29] Balaž A, Paun R, Nicolin A I, et al. Faraday waves in collisionally inhomogeneous Bose-Einstein condensates[J]. *Physical Review A*, 2014, 89(2): 023609.
- [30] Sudharsan J B, Radha R, Fabrelli H, et al. Stable multiple vortices in collisionally inhomogeneous attractive Bose-Einstein condensate[J]. *Physical Review A*, 2015, 92(5): 053601.

# Reflection, Localization, Transmission, and Oscillation Behaviors of Solitons in Ultracold Bose Gases with Spatiotemporally Modulated Interactions in an Expulsive Parabolic Potential

He Zhangming, Zhu Qianquan\*, Pan Xiang

College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, Hunan, China

## Abstract

**Objective** The experimental realizations of collisionally inhomogeneous ultracold Bose gases have not only greatly broadened the research scopes of ultracold atomic physics but also provided an ideal platform to explore novel quantum phenomena. Especially, studies on the peculiar properties and the novel quantum states and their quantum control in collisionally inhomogeneous ultracold Bose gases have been hot topics in the fields of both ultracold atomic physics and quantum information. The bright solitons of ultracold Bose gases have potential applications in quantum information, atomic interferometers, and atom lasers. Gertjerenken *et al.* predicted that the bright-bright solitons could be used to generate Bell states. Helm *et al.* found that the division and fusion of bright solitons in the ultracold Bose gases trapped in the ring well could be used to implement the Sagnac interferometer. Furthermore, in the composite potential composed of harmonic trap potential and Rosen-Morse barrier, the collision of the bright soliton can also be applied to the interferometer. In addition, stable propagation of bright solitons can be used to achieve atomic lasers. The precise control of the bright soliton in ultracold Bose gases is particularly important for the application of ultracold Bose gases.

Experiments have confirmed that the ultracold Bose gases can be controlled by adjusting the external potential and the interaction strength between atoms. With the development of experimental techniques, atomic interactions can be tuned by utilizing Feshbach resonance. In theoretical studies, several forms of time-dependent atomic interactions, such as the exponential function and the periodic function, have been proposed. The changed atomic interaction has an important effect on the properties of bright solitons in the ultracold Bose gases. For example, as atomic interaction increases, the amplitude of the bright soliton in the ultracold Bose gases increases, and its width decreases. When the atomic interaction exceeds a critical value, a transition behavior from oscillation to localization is observed in the ultracold Bose gases.

**Methods** Firstly, we use the Darboux transformation to obtain the analytical solution of solitons in ultracold Bose gases with the time-dependent atomic interactions. Then, we explore the dynamics of solitons in the ultracold Bose gases with spatiotemporally modulated interactions in an expulsive parabolic potential by Crank-Nicolson method.

**Results and Discussions** Firstly, we obtain the analytical solution of solitons in ultracold Bose gases by Darboux transformation. It is found that the atomic interaction increasing (decreasing) exponentially with time has a drag (push) effect on solitons in ultracold Bose gases with an expulsive parabolic potential (Fig. 2). Then, the dynamics behavior of bright solitons is explored by Crank-Nicolson method. There is a critical initial speed of solitons in the ultracold Bose gases with unchanged atomic interaction. When the initial speed of solitons is less than the critical value, a reflection behavior of solitons can be observed (Fig. 3). When the initial speed of solitons exceeds the critical value, a transmission behavior of solitons can be found (Fig. 4). When the initial speed of solitons is equal to the critical value, a localization behavior of solitons can be observed (Fig. 5). In order to investigate the effect of expulsive parabolic potential on this localization behavior of solitons, we calculate localization behaviors of solitons at different trapping frequencies. It is found that the critical initial speed of solitons increases with the trapping frequency (Fig. 6).

Subsequently, we consider the exponentially time-dependent atomic interactions. When the initial speed of solitons is equal to the critical value, a transition behavior from localization to reflection (transmission) is observed in the ultracold Bose gases with exponentially increasing (decreasing) atomic interactions (Fig. 7). When the initial speed of solitons is less than the critical value, the transition behavior from reflection to transmission is observed in the ultracold Bose gases with exponentially decreasing atomic interactions (Fig. 8). When the initial speed of solitons exceeds the critical value, the transition behavior from transmission to reflection can be found in the ultracold Bose gases with exponentially increasing atomic interactions (Fig. 9).

Finally, we calculate the dynamics behavior of bright solitons in the ultracold Bose gases with spatially modulated interactions in an expulsive parabolic potential. The localization behavior of solitons in the ultracold Bose gases with an expulsive parabolic potential can also be found (Fig. 10). Compared with that in Fig. 6, the critical local speed of the soliton in Fig. 11 decreases. Even if the initial speed is 0, the soliton can also pass through the potential barrier (Fig. 12).



It is mainly attributed to the position-dependent atomic interaction. Meanwhile, a periodic oscillation of solitons with an expulsive potential barrier is newly observed (Fig. 12). The oscillation period of solitons can be controlled by tuning the atomic interaction (Fig. 13) and the trapping frequency of potential (Fig. 14).

**Conclusions** In this paper, we analyze the reflection, localization, transmission, and oscillation behaviors of solitons in ultracold Bose gases with spatiotemporally modulated interactions in an expulsive parabolic potential, and find that: 1) the atomic interaction increasing (decreasing) exponentially with time has a drag (push) effect on solitons in ultracold Bose gases with an expulsive parabolic potential; 2) there is a critical initial speed of solitons in the ultracold Bose gases with unchanged atomic interaction, and a localization behavior of soliton can be observed at the critical speed; 3) the localization-reflection and transmission-reflection transitions of solitons are obtained by tuning the atom interactions; 4) a periodic oscillation of solitons with an expulsive potential barrier is newly observed, and the oscillation period of solitons can be controlled by tuning the atomic interaction and the trapping frequency of potential. These results can provide some help for the application of ultracold Bose gases in quantum information.

**Key words** quantum optics; ultracold Bose gases; bright solitons; atomic interaction