

## 应用于反射镜支撑结构拓扑优化的共形正交基底

唐玉峰<sup>1,2</sup>, 施胤成<sup>3</sup>, 李文利<sup>1,2</sup>, 陈苡生<sup>1,2</sup>, 王冲<sup>2</sup>, 刘震宇<sup>2\*</sup><sup>1</sup>中国科学院大学材料科学与光电技术学院, 北京 100039;<sup>2</sup>中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 长春 吉林 130033;<sup>3</sup>丹麦技术大学, 丹麦 灵比 2800

**摘要** 传统的 Zernike 多项式在光机优化设计中存在着一定的局限性, 如离散情况下正交性损失仅适用于与圆同胚的边界光滑平面单连通区域。利用 Laplace 方程得到的特征模态所具有的离散正交性和共形性质, 在有限元数值离散的情况下, 实现对光学曲面变形的近似表述, 并对圆形光学反射镜支撑结构进行以特征基底系数极小为目标的结构拓扑优化。将特征模态的优化结果与 Zernike 多项式优化结果对比之后发现, 特征模态可以取得和 Zernike 多项式近似的优化性能。在此基础上, 进一步将特征模态应用于六边形曲面镜支撑结构的拓扑优化。

**关键词** 共形; 正交特征模态; 曲面变形近似; 非圆反射镜; 拓扑优化

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS230470

## 1 引言

在光机集成的分析与设计中, 多项式的使用可以将光机结构的有限元分析数据与光学测试的光学性能指标联系起来, 实现不同数据类型之间的传递以及增强对数据的理解<sup>[1]</sup>。多项式在表征光学表面变形时, 既起到了数据降维的作用, 同时又不像镜子表面变形 root mean square(RMS)值与 peak to valley(PV)值那样含义过于单一。Zernike 多项式<sup>[2]</sup>是最常用的多项式, 国外的 Genberg<sup>[3]</sup>、国内的牛憨笨等<sup>[4]</sup>都详细叙述了如何使用 Zernike 多项式进行镜面变形拟合。施胤成<sup>[5]</sup>将 Zernike 多项式引入光学反射镜结构的拓扑优化中, 使用 Zernike 拟合镜面变形, 以光学折反射定律构建起镜面变形 Zernike 系数和波像差 Zernike 系数的函数关系, 完成光力耦合场下的反射镜支撑结构拓扑优化。

但 Zernike 多项式存在着一些不足, 如仅适用于圆形镜面、在离散情况下的正交性损失、无法拟合高阶变形等。尽管 Shi 等<sup>[6]</sup>提出了能提高 Zernike 离散拟合精度的网格形式, 且存在着适用于其他面形的环状 Zernike 多项式、X-Y 多项式等, 甚至可以使用施密特正交化方法和 Zernike 多项式来产生规则面形的正交多项式<sup>[7-8]</sup>。但这些方法仍具有局限性, 不具有对弯曲面变形的适用性。于是, 需要一种更加具有通用性的方式来实现光机结构优化的数据传递。欧洲南方天文台(ESO)早在 20 世纪 90 年代就使用自由谐振多项式

拟合主镜变形<sup>[9]</sup>, 并成功应用于 VLT 望远镜; Trevino 等<sup>[10]</sup>指出 Bessel 多项式在拟合人眼虹膜时比 Zernike 多项式更加优秀。但自由谐振多项式偏重于实际的物理背景, Bessel 多项式仅是 Laplace 特征方程在圆域上的解。本文将抽象的 Laplace 偏微分方程在曲面上求解得到 Laplace 特征模态, 以上基底多项式均可视为特征模态在某些情况下的特例。Laplace 特征模态所具有的共形、离散正交性等性质也使其在使用局域模态信息进行曲面重构领域展现了强大的活力。受到这种启发, 本文尝试将 Laplace 特征模态运用到光学反射镜的优化设计中, 取得了很好的效果。

## 2 镜面变形的正交基底拟合方法

### 2.1 使用最小二乘拟合镜面变形

多项式表面就是使用未变形的基底表面加上附加的多项式来描述变形后的光学表面。这种镜面变形表述的方式可将有限元位移数据近似拟合成基底的简洁表述, 并作为固体力学场与几何光学场的接口。

对于一个离散的表面数据集, 描述它的基底拟合系数由最小二乘拟合获得<sup>[11]</sup>。考虑有限元模型中镜面上的一个网格节点  $i$ , 把有限元仿真得到的变形  $\delta_i$  和多项式描述的变形  $C_j Z_{ij}$  差的平方定义为一个最小二乘误差函数  $E$ 。在误差函数中, 为了考虑节点表示的光学表面面积对全局拟合的贡献, 可以引入一个与节点表面面积成比例的加权函数  $w_i$ 。最小二乘误差函

收稿日期: 2023-01-12; 修回日期: 2023-02-09; 录用日期: 2023-02-27; 网络首发日期: 2023-03-09

基金项目: 国家自然科学基金(62104227)

通信作者: \*liuzy@ciomp.ac.cn

数为

$$E = \sum_{i=1}^m \omega_i \left( \delta_i - \sum_{j=1}^n C_j Z_{ij} \right)^2, \quad (1)$$

式中:  $m$  为节点总数;  $n$  为基底项数;  $i$  和  $j$  分别为两者的指标;  $Z_{ij}$  为第  $j$  项多项式在节点  $i$  处的取值;  $C_j$  为对应的拟合系数。

对以上最小二乘问题进行求解, 即将误差函数求偏导并令其等于零以使误差函数关于系数最小化, 得到下述线性方程组, 求解之后即可得到所求系数  $C$ 。

$$HC = P, \quad (2)$$

式中:  $H$  为  $n \times n$  维矩阵, 为基底多项式的两两内积;  $C$ 、 $P$  为  $n \times 1$  维列向量。以  $j$ 、 $k$  作为行和列的指标, 其元素由下面两式计算:

$$H_{jk} = \sum_{i=1}^m Z_{ij} Z_{ik}, \quad (3)$$

$$P_j = \sum_{i=1}^m \omega_i \delta_i Z_{ij}. \quad (4)$$

## 2.2 矢高和法向位移

在上一小节, 使用最小二乘对镜面进行拟合时, 拟合的对象通常有两种。一种为镜子的矢高位移, 由光学表面到过顶点的切平面的距离来定义; 另一种为镜子的法向位移, 它沿着光学表面的法向测量表面误差, 如图 1、图 2 所示。

矢高  $h_{\text{sag}}$  可以直接由有限元模型计算得到的  $z$  方向位移  $d_z$  得到, 在某些情况下会对矢高进行修正。

$$h_{\text{sag}} = d_z, \quad (5)$$

对于表面的法向位移  $\delta$ , 可以通过有限元位移矢量  $(d_x, d_y, d_z)$  和表面的单位法向矢量  $(n_x, n_y, n_z)$  的点积来计算:

$$\delta = (d_x, d_y, d_z) \cdot (n_x, n_y, n_z). \quad (6)$$



图 1 矢高位移

Fig. 1 Sag displacements

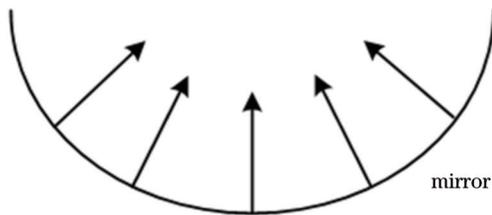


图 2 法向位移

Fig. 2 Normal displacements

以上两种方式均可以用来表示光学表面的形状改变。若选择矢高位移作为拟合对象, 可以使用 Zernike 多项式、 $X$ - $Y$  多项式作为基底进行拟合, 当 Laplace 方程的求解域由曲面退化到平面时, 特征模态也可以被用来拟合矢高数据。对于本研究要使用的特征模态基底来说, 由于其自身是曲面法向上的信息, 所以使用法向位移作为拟合对象来描述光学表面的变形, 同时可以适用于复杂曲面形式。

## 3 曲面 Laplace 方程特征模态求解

Laplace 特征方程来自于数学物理方法中的施图姆-刘维尔型微分方程的本征值问题, 其物理背景为物体的振动。其理论上的解析解为一组完备的正交函数组, 常见的 Bessel 多项式就是 Laplace 方程在圆域上的解析解。由于反射镜镜面通常是曲面的, 例如球面、抛物面或其他自由曲面等。因此采用曲面上的 Laplace 特征方程具有更广泛的适用性<sup>[12]</sup>, 而平面问题则是曲面问题的一种特例。

特征值问题的平面域数学描述如下:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \text{ in } \Omega \\ \partial u / \partial n_{\Gamma} = 0, \text{ on } \Gamma_N \end{cases}, \quad (7)$$

式中:  $\Delta$  为域  $\Omega$  内的 Laplace 算子, 作用于特征模态变量  $u$ ;  $\lambda$  为特征值, 在后面叙述中以  $\lambda$  代替;  $\partial u / \partial n_{\Gamma}$  表示场变量  $u$  在域  $\Omega$  的边界  $\Gamma_N$  法线方向上的导数。

$$\Delta u = -\nabla \cdot \nabla u, \quad (8)$$

在曲面上, 平面梯度算子  $\nabla$  应换成曲面切向梯度算子  $\nabla_s$ , 即

$$-\nabla_s \cdot \nabla_s u = \lambda u, \quad (9)$$

其中,

$$\nabla_s u = \nabla u - \nabla u \cdot \mathbf{n}^T \mathbf{n}. \quad (10)$$

上述算子用到了表面法向向量  $\mathbf{n}$ , 属于一种外蕴的表述形式。网格离散后, 外蕴方法在计算切向梯度算子时, 其计算的准确性取决于离散后的法向量是否表达准确, 而内蕴方法则取决于离散后面片的面内角度<sup>[13]</sup>。上述两种方式均依赖于剖分的质量, 而 Delaunay 三角剖分可以得到收敛于光滑曲面法向量的离散曲面法向量, 因此采用 Delaunay 三角剖分可以保证计算结果的准确性。如果曲面的形状较为规则, 可以采用分区的方式划分结构性四边形网格, 同样可以保证离散曲面法向量的精度。本研究的曲面离散采用了结构化四边形网格的剖分形式。在半径为 1 的球冠上求解的 1~15 阶特征模态如图 3 所示。

## 4 曲面上 Laplace 特征模态的完备性

首先考察在曲面域上, 有限元求解 Laplace 方程得到的特征模态是否具有对变形的拟合能力。

### 4.1 理论基础

对于曲面上的问题, 引入流形这种工具是方便的。

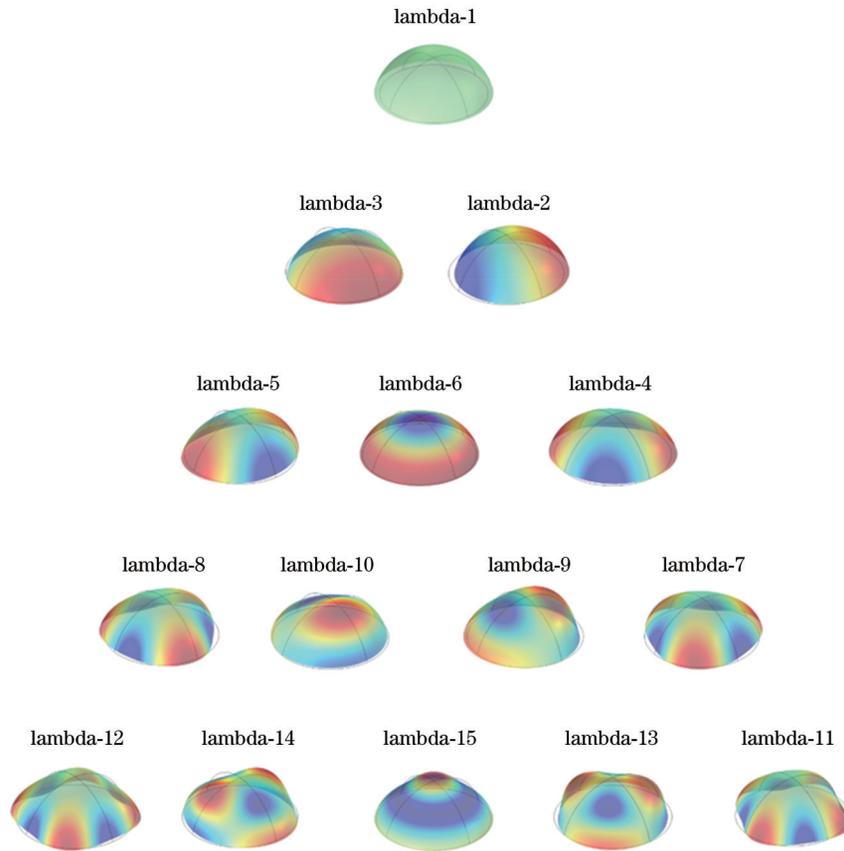


图 3 球冠特征模态

Fig. 3 Eigenmodes on spherical crown

在黎曼流形中, Laplace 特征函数有着关键的作用。因为在紧黎曼流形  $(M, s)$  上, 存在着施图姆-刘维尔分解, 即在一个紧的黎曼流形上, 在黎曼度量下的 Laplace 算子  $\Delta_s$ , 生成的特征函数  $\varphi_i$  可构成一组正交基, 对于任意的函数  $\phi \in L^2(M)$  可以写成一收敛级数<sup>[14]</sup>:

$$\phi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i, \quad a_i \in \mathbf{R}. \quad (11)$$

对于工程问题所处的  $\mathbf{R}^n$  空间, 其自带欧几里得度量使  $\mathbf{R}^n$  成为一个黎曼流形<sup>[15-16]</sup>。在三维空间中的正则曲面, 即没有尖点(可以定义法线)、没有边、也不与自身相交的曲面, 是三维欧氏空间  $\mathbf{R}^3$  的浸入子流形, 也就自然地诱导出一个度量。同时, 镜面作为  $\mathbf{R}^n$  中的有界闭集, 保证了其紧致性。于是, 工程中大部分光学镜面都可以视为一紧黎曼流形, 能够使用其域上的 Laplace 特征模态对其产生的变形进行任意精度的逼近。

#### 4.2 数值验证

通过以上叙述可知, 使用解析的特征函数可以对曲面的光滑变形进行任意精度的逼近。但解析的特征函数通常是无法获得的, 需要使用有限元方法来求解曲面上的特征方程得到特征模态的数值解。有限元方法主要着重于欧氏空间的偏微分方程解法, 所以本小

节要对曲面上求解 Laplace 特征方程的收敛性做一些验证。由于 Laplace 特征函数没有解析解, 无法验证有限元得到的数值解是否收敛于解析解。根据数值分析中的函数逼近理论<sup>[17]</sup>, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \phi - \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j \right\| = 0 \quad (12)$$

也就是说, 随着选取基底项数的增多, 逼近误差会收敛到零。现在要想使用离散的数值解来逼近变形, 则其也要具有收敛性, 同时也就认为有限元求解是可以接受的。本小节对球面镜给出一解析的变形来验证这一点。

球面在欧氏空间中的表达式为  $x^2 + y^2 + (z - 1.2)^2 = 1.2^2 (z < 1.2)$ , 在其上有个解析的变形, 在欧氏空间中的表达式可写为  $1.01x^5 - 144x^4 + 2.03x^3y + 361y^3 + x^2 - 2y^2 + 3xy + 4x + 5y$ 。

利用球面的模态对变形进行拟合, 以 2-范数和无穷范数度量的误差随基底项数和网格密度的收敛如图 4、图 5 所示。

图 4、图 5 中网格尺寸并不代表实际的网格尺寸, 其值为 1~4, 数值越大网格越密, 在 Comsol 软件中代表的网格大小分别为细化、较细化、超细化、极细化, 其具体参数不详细写出。从图 4、5 可以看出, 拟合的误差随着基底项数的增多逐渐降低, 有收敛到零的趋势。

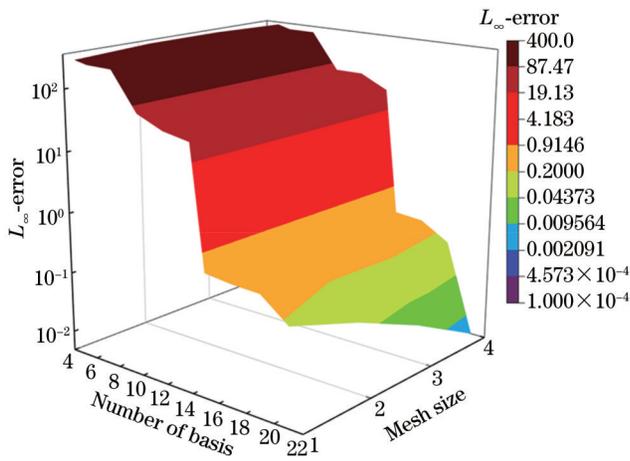


图 4 拟合误差的无穷范数  
Fig. 4 Infinite norm of fitting error

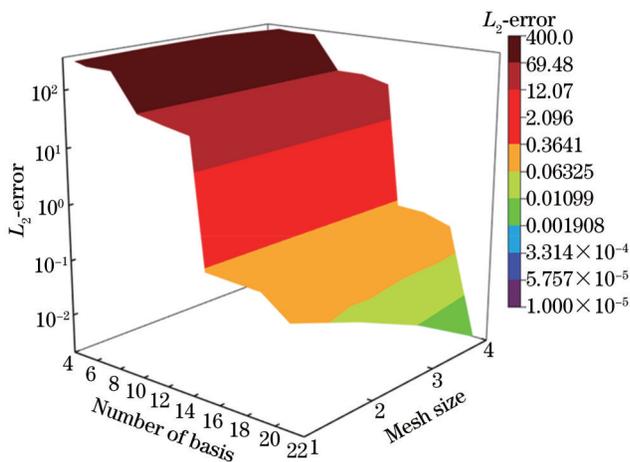


图 5 拟合误差的 2-范数  
Fig. 5 2-norm of fitting error

对此,可作如下简单解释,基于离散解对变形进行拟合,实际上相当于在  $m$  维( $m$  为节点数量)向量空间中给定了一向量表示变形  $\delta$ ,利用向量空间的基底  $e_i$ , $\delta$  可以写为

$$\sum_{i=1}^m \delta_i e_i \quad (13)$$

特征模态的正交性使它们能成为这个向量空间的基底,于是随着基底项数的增多,拟合误差会越来越小,直到选取与节点数量相同的特征模态阶数,此时误差为 0。然而这在实际中是不现实的,所以 Laplace 特征模态就提供了在不同曲面下、不同节点数量下,为变形所在“向量空间”生成“基底”的一种方法。

## 5 优 化

选取光学反射镜支撑的拓扑优化算例来说明 Laplace 特征模态在优化设计中的可行性。在本小节中,使用两个不同形状的反射镜进行优化:第 1 个为圆形抛物面镜,主要用来说明 Laplace 特征模态在圆域上的适用性;第 2 个为正六边形抛物面镜,用来说明

Laplace 特征模态在其他面形的可扩展性。

### 5.1 反射镜模型

优化使用的几何模型分为两个区域,顶部是反射镜区域,是拓扑优化中的非设计域,底部是支撑结构的初始区域,是优化中的设计域。图 6 为圆形抛物面几何,镜子和初始支撑结构的半径均为 1 m,其中心均具有半径为 0.2 m 的中心通孔,厚度分别为 0.1 m、0.2 m。图 7 的六边形几何均为图 6 中圆域的内接六边形,在工程实际中,六边形反射镜中心孔通常为圆孔,在这里为方便生成结构化网格,更改为六边形孔。两种模型所使用材料一致。反射镜材料为微晶玻璃,杨氏模量为 90.3 GPa、密度为 2530 kg/m<sup>3</sup>、泊松比为 0.243;支撑材料为超殷钢 4J32,杨氏模量为 141 GPa、密度为 8100 kg/m<sup>3</sup>、泊松比为 0.25。为降低数学模型的建模和求解复杂度,反射镜与支撑之间的连接简化为物理场连续的边界条件,即假设反射镜下底面有位移  $d_M$ ,支撑结构上底面有位移  $d_P$ ,则  $d_M = d_P$ 。通常中心通孔会有芯轴约束,在这里为简化模型,不予考虑。支撑下底面半径 0.5 m 处 3 定点 120° 对称固定约束,仅反射镜受重力,以上物理场如图 8 所示(图中小圆锥为指示支撑点位置,没有实体建模)。网格剖分方式采用映射和扫掠形成的六面体结构化网格,由于中心孔的存在,不会在中心处产生过于狭长的低质量网格,且六面体的力学性能较好。

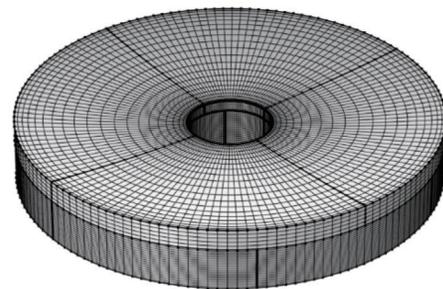


图 6 圆形镜子  
Fig. 6 Circular mirror

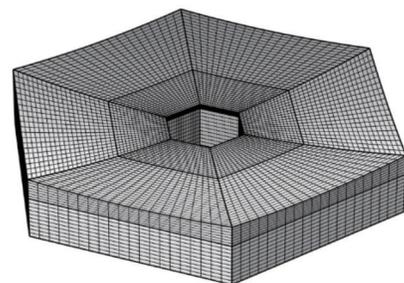


图 7 六边形镜子  
Fig. 7 Hexagonal mirror

### 5.2 拓扑优化数学模型

在本例中,使用 SIMP 插值函数的变密度法进行拓扑优化。反射镜为优化的非设计区域,其设计变量

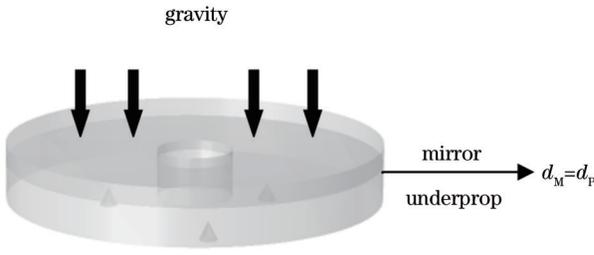


图 8 模型物理场

Fig. 8 Model physical field

$\rho \equiv 1$ 。支撑结构为设计区域,其设计变量在迭代过程中发生改变。高质量的光学性能意味着光学表面的变形较小,于是将基底系数作为目标函数、支撑结构的轻量化以及某些基底系数作为约束函数。

于是,本例的数学模型如下所示:

$$\min: J = f(C) = C_1^2, \quad (14)$$

$$\text{s.t.}: K(\rho)U(\rho) = F(\rho), \quad (15)$$

$$HC(U) = P(U), \quad (16)$$

$$\Sigma \rho \leq V_0 \alpha, \quad (17)$$

$$C_i^2 < C_i^*, \quad (18)$$

$$0 < \rho_{\min} < \rho < 1, \quad (19)$$

式中: $\rho$ 为设计变量向量; $f(C)$ 为基底系数的函数; $C_1$ 为第一项基底系数; $C_i$ 为其他项基底拟合系数; $C_i^*$ 为对应的系数上限值,在这里统一取 $1 \times 10^{16}$ ,以使系数尽可能得小。由于基底系数存在正负,在这里对系数取平方,方便优化的进行。对于在约束中选取的基底项,在下文中会根据具体问题具体分析。 $V_0$ 为设计区域的体积; $\alpha$ 为体积分数上限。其他两个等式为两个控制方程。一个控制固体力学场, $K$ 、 $U$ 、 $F$ 对应有限元的刚度矩阵、位移向量和载荷向量,在优化中均为设计变量的函数;另一个方程对位移进行拟合,以上章节已做过介绍,在此不做赘述。

### 5.3 敏度分析

首先,考虑目标 $J$ 对系数向量 $C$ 的梯度,为推导过程方便,目标函数均用 $f(C)$ 代替,其结果只需将 $f(C)$ 有关项代入即可。引入拉格朗日乘子 $\lambda_1$ ,有

$$\bar{J} = f(C) + \lambda_1^T (HC - P), \quad (20)$$

两边对设计变量求导:

$$\frac{\partial f(C)}{\partial \rho} = \frac{d\bar{J}}{d\rho} = \frac{\partial f(C)}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial \rho} + \lambda_1^T \left( H \frac{\partial C}{\partial \rho} - \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) = \left[ \frac{\partial f(C)}{\partial C} + \lambda_1^T H \right] \frac{\partial C}{\partial \rho} - \lambda_1^T \frac{\partial P}{\partial \rho}, \quad (21)$$

由 $H$ 矩阵的对称性 $H = H^T$ ,并消去 $\frac{\partial C}{\partial \rho}$ ,即令

$$\frac{\partial f(C)}{\partial C} + \lambda_1^T H = 0 \quad (22)$$

得伴随方程

$$H\lambda_1 = -\frac{\partial f(C)}{\partial C}^T. \quad (23)$$

利用式(22)求解伴随变量 $\lambda_1$ 之后,即可利用下式求解敏度:

$$\frac{\partial f(C)}{\partial \rho} = \frac{d\bar{J}}{d\rho} = -\lambda_1^T \frac{\partial P}{\partial \rho}. \quad (24)$$

接下来,需要求解 $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ , $P$ 是求解拟合问题线性方程组的右端项,为一个 $n \times 1$ 的向量, $n$ 取决于拟合使用的基底项数。这里仅以其中的第 $i$ 项为例进行求解,即考虑 $\frac{\partial P_i}{\partial \rho}$ ,同样引入拉格朗日乘子 $\lambda_2$ ,得到

$$\bar{J} = P_i + \lambda_2^T (KU - F), \quad (25)$$

进一步有

$$\frac{\partial P_i}{\partial \rho} = \frac{d\bar{J}}{d\rho} = \frac{\partial P_i}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \lambda_2^T \left( K \frac{\partial U}{\partial \rho} + U \frac{\partial K}{\partial \rho} - \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) = \left( \frac{\partial P_i}{\partial U} + \lambda_2^T K \right) \frac{\partial U}{\partial \rho} + \lambda_2^T \left( U \frac{\partial K}{\partial \rho} - \frac{\partial F}{\partial \rho} \right). \quad (26)$$

由于是各向同性材料有 $K = K^T$ ,消去 $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ ,得伴随

方程

$$K\lambda_2 = -\left( \frac{\partial P_i}{\partial U} \right)^T. \quad (27)$$

敏度由下式求得

$$\frac{\partial P_i}{\partial \rho} = \frac{d\bar{J}}{d\rho} = \lambda_2^T \left( U \frac{\partial K}{\partial \rho} - \frac{\partial F}{\partial \rho} \right). \quad (28)$$

对于上述两式, $U \frac{\partial K}{\partial \rho} - \frac{\partial F}{\partial \rho}$ 为一个经典弹性场的

灵敏度分析<sup>[18]</sup>,在此不作赘述。对于 $\frac{\partial P_i}{\partial U}$ , $P_i$ 的公式上述在最小二乘问题中已给出, $U$ 实际为 $\delta$ 。于是对于向量 $\frac{\partial P_i}{\partial U}$ 的一个元素 $\left( \frac{\partial P_i}{\partial U} \right)_j$

$$\left( \frac{\partial P_i}{\partial U} \right)_j = \frac{\partial P_i}{\partial U_j} = \frac{\partial \sum \omega_i \delta_i Z_{ji}}{\partial \delta_j} = \begin{cases} \omega_i Z_{ji}, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (29)$$

至此,敏度分析无未知量,敏度求解已完成。

### 5.4 数值验证

上述所建立的拓扑优化模型是非线性非凸的优化问题,需要经过不断的迭代来得到局部最优解。迭代由有限元分析、曲面变形拟合、敏度分析、寻优等4个主要部分构成。在每一步的迭代寻优中使用移动渐近线法(MMA)<sup>[19]</sup>求解。所提算法的实现使用了有限元软件Comsol与Matlab<sup>[20]</sup>。

为了比较特征模态和Zernike多项式的优化效果,使用11项基底对镜面进行拟合,Zernike选取前11项,特征模态选取与Zernike较为相似的11项。在11项基底中,选取两组多项式中相同的第一项——偏移作为

优化目标。三点支撑结构极易产生三叶像差的变形, 所以将三叶项作为优化约束, 同时加入两项圆周对称项在不影响对称性的前提下提高优化复杂性。

#### 5.4.1 圆域上的拓扑优化结果

分别使用 Zernike 和特征模式拟合的圆形反射镜支撑结构的拓扑优化结果如图 9、图 10 所示。从图 9 可以看到: 优化出的结构呈现 1/3 对称性, 这是因为在物理模型中, 重力载荷呈圆周对称, 三点固定约束呈 1/3 对称; 在拓扑优化模型中, 优化目标及约束都具有 1/3 对称性。在图 9 中展示了用四个 Zernike 项约束的

优化结果, 其中, 两个约束为共轭的三叶项, 另外两个为圆周对称的球差项。根据约束的云图和优化结果分析, 对三叶的约束是产生三瓣叶状结构的主要原因, 而中心的立柱结构是为了约束“球差”项。在单瓣叶状结构两个枝杈连接处的较大鼓包增强了两个结构之间的连接强度, 同时将较大质量转移到底部, 虽未在优化中引入稳定性约束也未考虑支撑结构自重, 但此结构也间接增加了稳定性, 较为合理。叶状结构的上表面具有较大的面积, 增大了与反射镜之间的接触面积, 减小了镜面自重产生的应力。

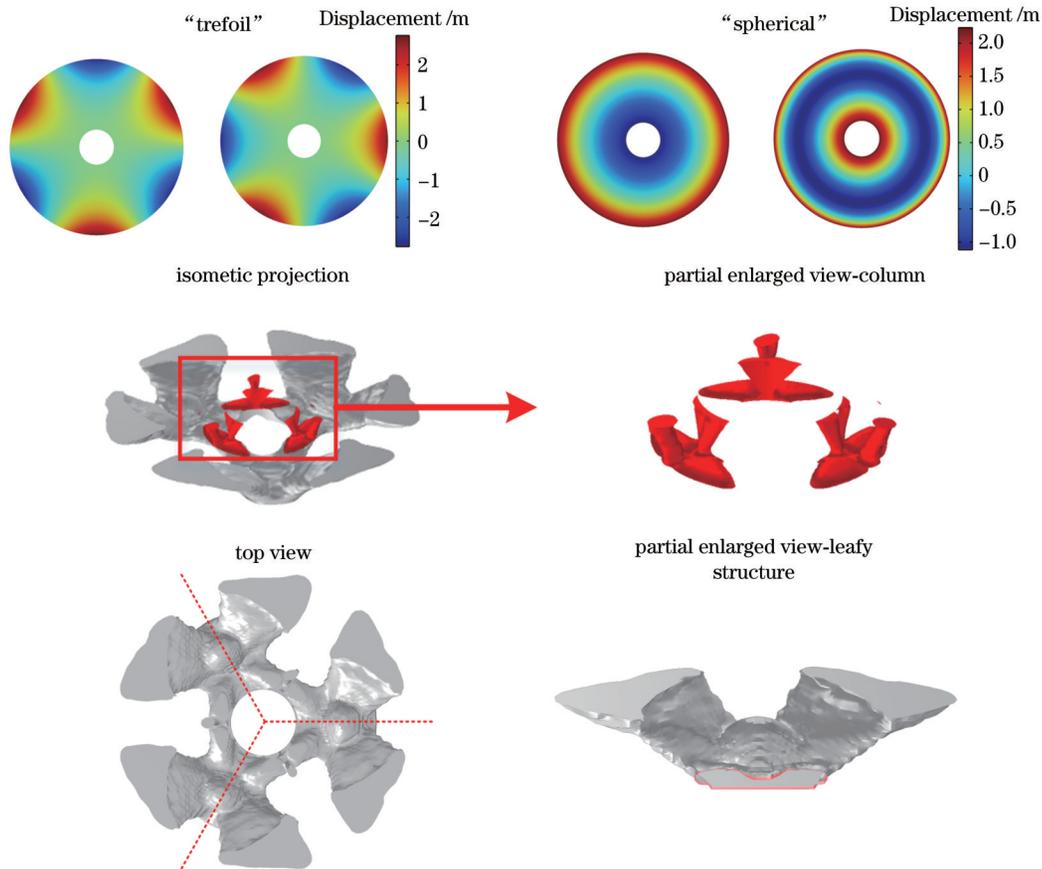


图 9 Zernike 优化结果

Fig. 9 Zernike optimization results

图 10 显示的是使用模式得到的优化结果, 整体特征和 Zernike 拟合得到的基本一致, 图中显示了具体的分析情况。特征模式中的三叶项与 Zernike 的三叶项类似, 导致生成的优化结果中叶状结构基本无差异。特征模式的两个球差项与 Zernike 的两项差异较大, 特征模式的低阶球差在中心处取得最大值, 而 Zernike 项则在中心处取最小值, 低阶球差的这种差异加上两个基底中高阶球差分布基本一致, 导致特征模式的“球差”项在中心处占了极大的比重。于是特征模式仅在中心处生成立柱, 而 Zernike 拟合则会在中心附近发生分叉产生两个立柱。

两种不同基底拟合方法在优化前后的系数对比如表 1 所示, 对于优化模型中的目标函数——偏移项

(piston), Zernike 和特征模式的表述一致。以偏移项为指标, 可以看出, 两种基底得到的优化效果基本一致。以 RMS 值和 PV 值为指标来看, 特征模式比 Zernike 多项式得到的结果虽然差一点, 但差别不大。基于以上指标可以认为, 使用特征模式可以实现与 Zernike 多项式相同的优化效果。

关于两种不同基底在优化过程中的稳定性, 图 11、图 12 显示出两者在此算法中具有基本一致的稳定性。其中, 作为目标的第一项系数 (Zernike 第一项  $C_1$ 、特征模式第一项  $C_1$ ) 两者在迭代过程中的目标值走向基本一致, 其余三个约束, 包括一个低阶球差 (Zernike 第四项  $C_4$ 、特征模式第八项  $C_8$ ), 一个高阶球差 (Zernike 第十一项  $C_{11}$ 、特征模式第二十一项  $C_{21}$ ), 两

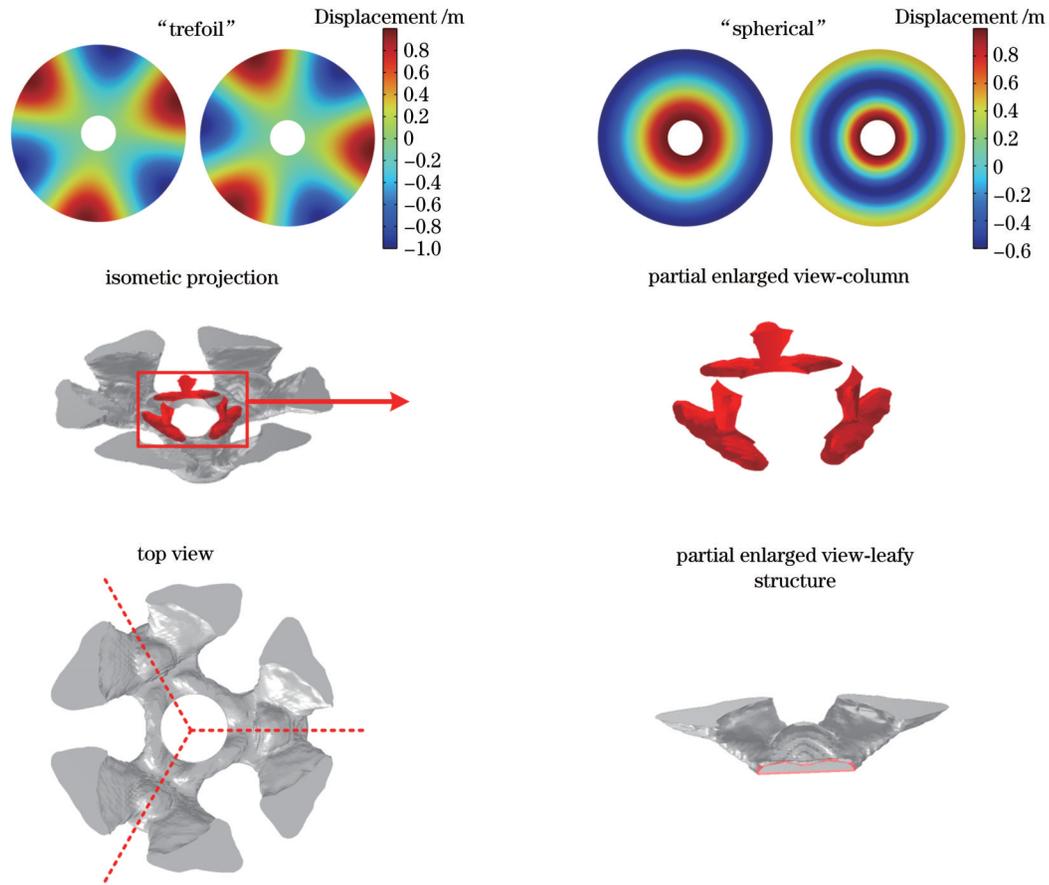


图 10 特征模态优化结果  
Fig. 10 Eigenmode optimization results

个三叶(由于两个三叶项为共轭项,故将两者同时考虑,Zernike 第九、十项  $C_9$ 、 $C_{10}$ ,特征模态第六、七项  $C_6$ 、 $C_7$ )在前 50 步都会有振荡,但在之后的迭代中均趋于稳定。

#### 5.4.2 六边形曲面镜上的拓扑优化结果

上一小节说明在圆域上,使用特征模态可以实现与 Zernike 相同的优化效果。此一节将模态应用于

Zernike 多项式不适用的六边形镜子。在六边形抛物面的镜面上,其特征模态已没有 Zernike 多项式来对照,但仍有一些项显示出 Zernike 多项式存在的一些特征,使用这些项来作为目标和约束进行优化,所用项的云图如图 13 所示。为了展示球差和三叶项在优化中的作用,本小节的优化算例使用的项有所差异。

表 1 优化前后数值  
Table 1 Values before and after optimization

Assessment	Zernike			Eigenmode		
	Initial value	Final value	Final value / Initial value	Initial value	Final value	Final value / Initial value
Piston	$-5.0180 \times 10^{-5}$	$-2.2215 \times 10^{-6}$	4.43%	$5.0162 \times 10^{-5}$	$2.2073 \times 10^{-6}$	4.40%
RMS /m	$8.72783 \times 10^{-5}$	$2.22737 \times 10^{-6}$	2.55%	$8.72783 \times 10^{-5}$	$3.84229 \times 10^{-6}$	4.40%
PV /m	$6.45 \times 10^{-6}$	$5.63 \times 10^{-7}$	8.73%	$6.45 \times 10^{-6}$	$6.78 \times 10^{-7}$	10.51%
Volume fraction	0.3	0.2		0.3	0.2	

图 14 显示了优化结果具体的分析情况。算例中镜子的几何以及物理场在 5.1 节中已做过介绍。根据前一个算例的分析可知,依然可以使用偏移项作为优化目标,三叶项和球差项作为优化约束。不同的是本算例一个结果未使用球差项约束,另外一个结果则对两个球差项进行了约束。从图中可以看出:两个优化

结果明显不同,使用了球差项的算例显示出了圆镜优化结果的特征,只是因为形状的变化对叶状的结构产生了一些影响;而未使用球差的算例则明显偏向于对三叶的约束,在叶状结构上生成了小叶状结构来约束三叶项中的细节部分。在这里选取使用四项基底约束的优化结果进行定量展示:优化后的偏移项为

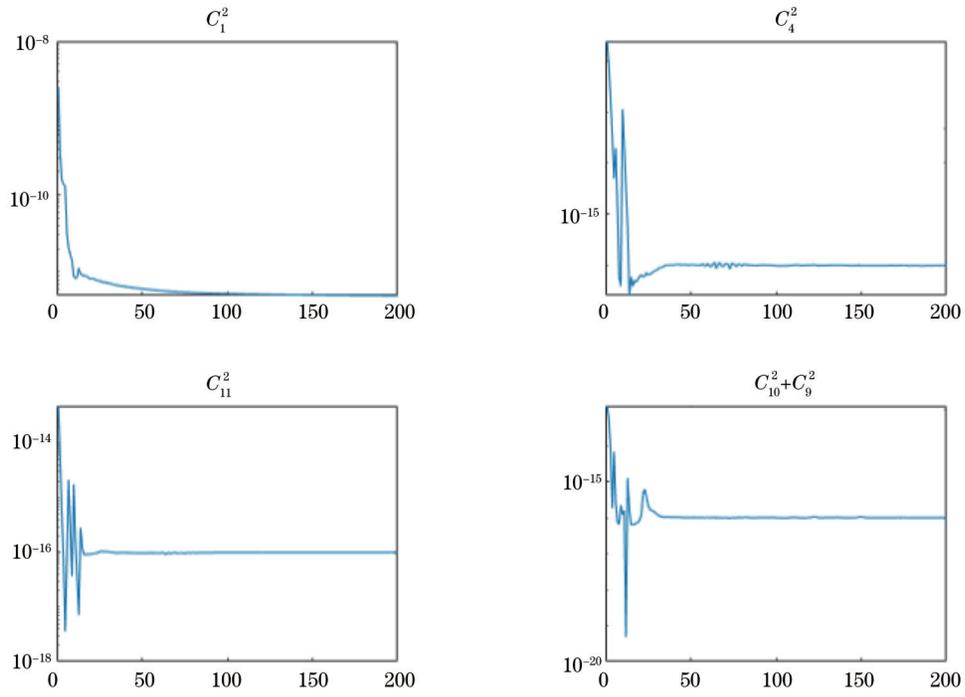


图 11 Zernike 优化稳定性  
Fig. 11 Zernike optimized stability

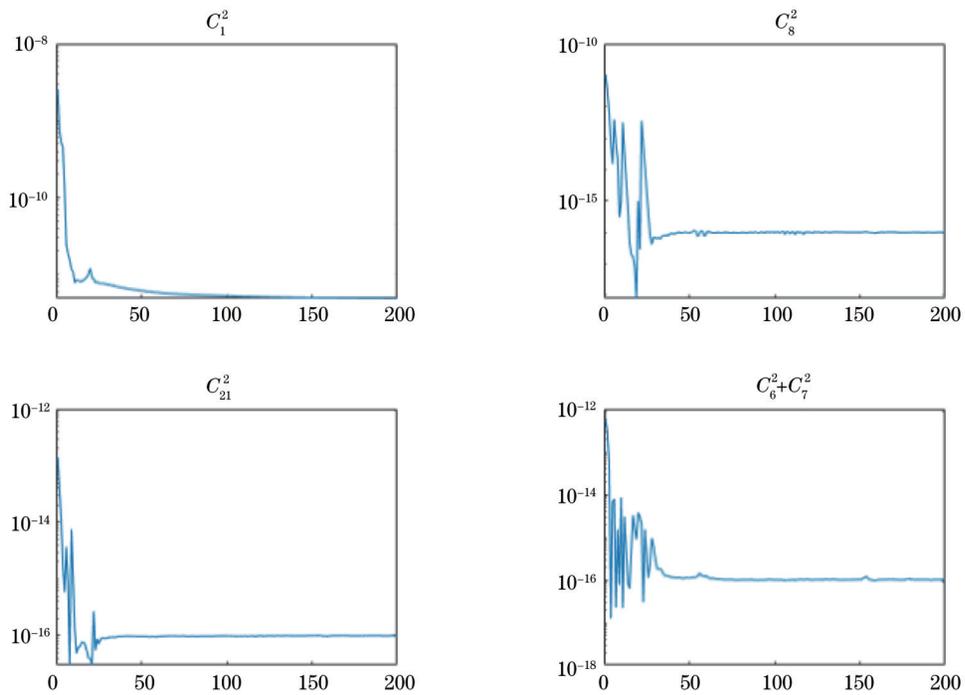


图 12 特征模式优化稳定性  
Fig. 12 Eigenmode optimized stability

$1.133 \times 10^{-6}$ , 为优化前  $2.057 \times 10^{-5}$  的 5.5%; RMS 值为  $2.2724 \times 10^{-7}$ , 为优化前  $1.7309 \times 10^{-6}$  的 13.13%; PV 值为  $7.8682 \times 10^{-7}$ , 为优化前  $4.7921 \times 10^{-6}$  的 16.42%。

## 6 结 论

使用 Laplace 特征模式拟合面形, 并将其用到光机结构的拓扑优化设计中。从解析和数值上说明了 Laplace 特征模式不仅在圆域上具有完备性, 而且在其

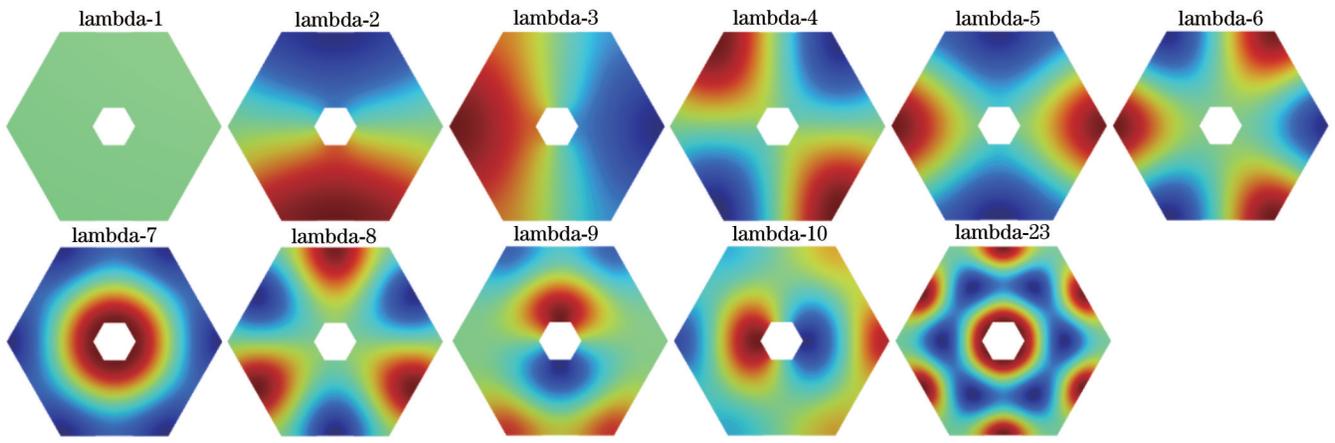


图 13 六边形抛物面特征模态  
Fig. 13 Eigenmodes on a hexagon paraboloid

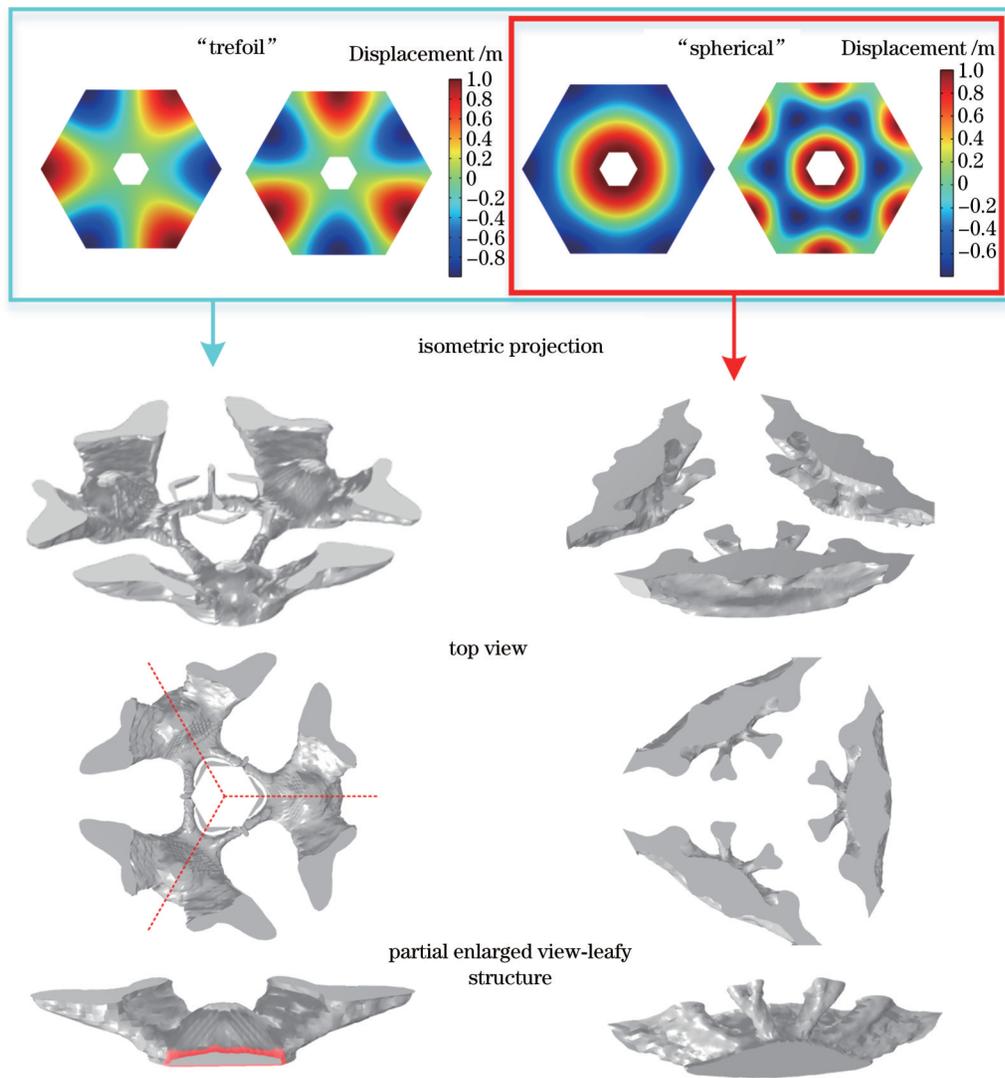


图 14 六边形镜子优化结果  
Fig. 14 Hexagonal mirror optimization results

他非规则形状上也具有完备性。曲面特征模态可以用于对光滑镜面变形的拟合逼近。有限元位移场通过待求系数与特征模态基函数的乘积来降维表述,实现了直接以特定模态系数为目标的光学单镜支撑结构的拓

扑优化。优化算例表明了所提优化方法的有效性。Laplace 方程的有限元求解保证了特征模态的离散正交性,灵活的求解域体现了其共形的性质,即求得的解为法向上的信息对变形拟合更为契合。但相比像

Zernike 那样的多项式, 本研究的 Laplace 特征模态仅存在分片离散数值解, 这使得特征模态没有像 Zernike 那样的解析表述, 在求解变形镜面的法线时需关注其在单元边界的连续性, 这是一个值得深入研究的内容。

## 参 考 文 献

- [1] Doyle K B, Genberg V L, Michels G J. Integrated optomechanical analysis[M]. Bellingham: SPIE, 2002.
- [2] Zernike F. Diffraction theory of the cut procedure and its improved form, the phase contrast method[J]. *Physica*, 1934, 1: 56.
- [3] Genberg V L. Optical surface evaluation[J]. *Proceedings of SPIE*, 1984, 0450: 81-87.
- [4] 单宝忠, 王淑岩, 牛憨笨, 等. Zernike 多项式拟合方法及应用[J]. *光学精密工程*, 2002, 10(3): 318-323.  
Shan B Z, Wang S Y, Niu H B, et al. Zernike polynomial fitting method and its application[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2002, 10(3): 318-323.
- [5] 施胤成. 基于光线追迹的反射镜支撑结构拓扑优化设计方法[D]. 长春: 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 2020.  
Shi Y C. Topology optimization of support structure of reflective mirror based on ray tracing method[D]. Changchun: Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, 2020.
- [6] Shi Z G, Sui Y X, Liu Z Y, et al. Mathematical construction and perturbation analysis of Zernike discrete orthogonal points[J]. *Applied Optics*, 2012, 51(18): 4210-4214.
- [7] Mahajan V N, Dai G M. Orthonormal polynomials for hexagonal pupils[J]. *Optics Letters*, 2006, 31(16): 2462-2464.
- [8] Zheng Y, Wei K, Liang B, et al. Zernike like functions on spherical cap: principle and applications in optical surface fitting and graphics rendering[J]. *Optics Express*, 2019, 27(26): 37180-37195.
- [9] Noethe L. Use of minimum-energy modes for modal-active optics corrections of thin meniscus mirrors[J]. *Journal of Modern Optics*, 1991, 38(6): 1043-1066.
- [10] Trevino J P, Gómez-Correa J E, Iskander D R, et al. Zernike vs. Bessel circular functions in visual optics[J]. *Ophthalmic & Physiological Optics*, 2013, 33(4): 394-402.
- [11] Boyd S P, Vandenberghe L. Introduction to applied linear algebra: vectors, matrices, and least squares[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
- [12] 徐国良. 计算几何中的几何偏微分方程方法[M]. 北京: 科学出版社, 2008.  
Xu G L. Geometric partial differential equation method in computational geometry[M]. Beijing: Science Press, 2008.
- [13] Crane K. Discrete differential geometry: an applied introduction [EB/OL]. (2023-02-09)[2023-3-12]. <https://www.cs.cmu.edu/~kmc Crane/Projects/DDG/paper.pdf>.
- [14] Canzani Y. Analysis on manifolds via the Laplacian[EB/OL]. [2022-10-09]. <https://docslib.org/doc/3566970/analysis-on-manifolds-via-the-laplacian>.
- [15] 萧树铁. 大学数学-流形上的微积分[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2003.  
Xiao S. College mathematics-calculus on manifolds[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2003.
- [16] do Carmo M P. Differential geometry of curves and surfaces[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976.
- [17] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 4版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006.  
Li Q Y, Wang N C, Yi D Y. Numerical analysis[M]. 4th ed. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2006.
- [18] Choi K K, Kim N H. Structural sensitivity analysis and optimization 1: linear systems[M]. New York: Springer, 2004.
- [19] Svanberg K. The method of moving asymptotes: a new method for structural optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359-373.
- [20] Kook J, Chang J H. A high-level programming language implementation of topology optimization applied to the acoustic-structure interaction problem[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, 64(6): 4387-4408.

## Conformal Orthogonal Basis for Topology Optimization of Mirror Support Structures

Tang Yufeng<sup>1,2</sup>, Shi Yincheng<sup>3</sup>, Li Wenli<sup>1,2</sup>, Chen Yisheng<sup>1,2</sup>, Wang Chong<sup>2</sup>, Liu Zhenyu<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>College of Materials Science and Opto-Electronic Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100039, China;

<sup>2</sup>Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, Jilin, China;

<sup>3</sup>Technical University of Denmark, Lyngby 2800, Denmark

### Abstract

**Objective** In the optimization design of optomechanical systems, polynomials can not only retain a significant amount of information but also provide a more compact representation of structural deformation and facilitate integration between mechanical structures and optical models. Zernike polynomials have been widely employed due to their orthogonality properties on a unit circle. However, the orthogonality of Zernike polynomials only applies to continuous data on a circular aperture, and it degrades for discrete interpolation and non-circular apertures. Non-orthogonality means that coupling exists among different terms of polynomials, and the number of polynomials cannot be arbitrarily increased or decreased, which can lead to accuracy and stability problems in surface approximation and optimization design. This study aims to

propose a conformal orthogonal basis generated by the eigenmodes of the Laplace equation for utilization in the topology optimization of support structures for reflective mirrors, thus avoiding Zernike orthogonality loss. Additionally, due to the conformal properties of the Laplace eigenmodes in the domain, the obtained basis represents the deformed information along the surface normal. As the principal direction of deformation, the surface normal makes the eigenmodes a better fit for surface deformations.

**Methods** The Laplace characteristic equation and Zernike polynomials both originate from the Sturm-Liouville problem. The solutions on the planar circular domain exhibit similarities with Zernike polynomials, and Trevino *et. al.*<sup>[10]</sup> have compared the characteristic modal functions (Bessel circle polynomials) and Zernike polynomials in eye surface fitting, which indicates that the former provides better fitting. This paper extends the planar domain to surfaces. The finite element solution of the Laplace equation and properties of the eigenvalue problem ensure the discrete orthogonality of the characteristic modal functions. The mathematical properties of this equation guarantee the completeness of analytical solutions of the characteristic modal functions, and the completeness is verified by combining function approximation theory and numerical experiments. In addition, a specific topology optimization example demonstrates that the characteristic modal functions not only yield similar results to Zernike polynomials on circular domains but also can be applied to non-circular apertures where Zernike polynomials are not suitable.

**Results and Discussions** First, based on the Sturm-Liouville decomposition on compact Riemannian manifolds, the completeness of the eigenmodes under analytic conditions is demonstrated. Then, the feasibility of adopting eigenmodes to fit surface deformations is numerically validated by adopting function approximation theory as the basis (Figs. 4 and 5). Additionally, this paper applies the method of surface approximation using eigenmodes to topology optimization of circular mirror support structures and compares it with Zernike polynomial approximation. The comparative results indicate that the objective functions optimized through characteristic modal functions and Zernike polynomials are 4.40% and 4.43% of the original structure respectively. The root mean square (RMS) values are 4.40% and 2.55% of the original structure respectively, and the peak to valley (PV) values are 10.51% and 8.73% of the original structure respectively. Both methods prove comparable optimization effectiveness (Table 1). The curves of the objective and constraint values during the iteration show that both methods have consistent stability and can converge (Figs. 11 and 12). However, there are slight differences in the resulting structures (Figs. 9 and 10). After comparative experiments, this study applies the modal fitting method to a hexagonal mirror, thereby completing the topology optimization design of a hexagonal mirror support structure (Fig. 14) and extending its applicability to non-circular apertures.

**Conclusions** This paper proposes to adopt a conformal orthogonal basis, which is the Laplace eigenmodes, for approximating surface deformations, and applies it to topology optimization of optical structures. It also demonstrates analytically and numerically that the Laplace eigenmodes are not only completed on circular domains but also on other irregular shapes. Surface eigenmodes can be employed to approximate smooth mirror surface deformations and achieve topology optimization of optical single mirror support structures with specific modal coefficients being the optimization objectives. Two optimization examples show the applicability of the proposed basis on circular domains and its extensibility on non-circular domains. However, compared to Zernike polynomials, the Laplace eigenmodes studied in this paper only exist in piecewise discrete numerical solutions, which means that the eigenmodes do not have an analytical representation like Zernike polynomials. When solving for the normal of a deformed mirror surface, it is necessary to pay attention to the continuity of the normal vector at the element boundary, which is a field that deserves further exploration in future work.

**Key words** conformal; orthogonal eigenmode; surface deformation approximation; noncircular reflector; topological optimization