

基于光线偏折的复杂流动密度重建方法

周润, 唐亮, 李平, 黄叙辉*

中国空气动力研究与发展中心高速空气动力研究所, 四川 绵阳 621000

摘要 由穿过扰动流场的光线偏折角测值重建流场密度, 对深入认识复杂流动现象具有重要的意义。在由风洞视频测量方法得到穿过扰动流场光线偏折角的基础上, 开展了复杂流动密度重建方法的研究。根据密度与折射率、光线偏折角的关系, 运用变分法推导了带有先验信息的密度偏微分方程; 通过神经网络对测量数据进行建模, 有效抑制了由局部峰值丢失带来的误差放大问题。数值仿真和风洞实验结果表明, 本文方法所得的密度重建结果明显优于直接求偏导数方法, 尤其是在峰值处, 本法方法在量值上具有更高的精准度, 为复杂流动结构的定量分析提供了新途径。

关键词 大气光学; 视频测量; 密度; 复杂流动; 重建

中图分类号 V556.5; V211.7

文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS202242.0901001

Density Reconstruction Method for Complex Flow Based on Light Deflection

Zhou Run, Tang Liang, Li Ping, Huang Xuhui*

High Speed Aerodynamics Institute, China Aerodynamics Research and Development Center,
Mianyang 621000, Sichuan, China

Abstract The reconstruction of flow field density from the measured value of light deflection angle passing through the disturbed flow field, it is great significance for the in-depth understanding of complex flow phenomena. Based on the deflection angle of light passing through the disturbed flow field obtained by the wind tunnel video measurement method, the reconstruction method of complex flow density is studied. According to the relationship among density, refractive index, and light deflection angle, the partial differential equation of density with prior information is derived by variational method. The artificial neural network is used to model the measured data, and the error magnification caused by the loss of local peak value is effectively suppressed. The results of numerical simulation and wind tunnel experiments show that the density reconstruction result of this method is obviously better than that of the direct partial derivative method, especially at the peak, this method has higher accuracy in terms of value, which provides a new way for the quantitative analysis of complex flow structure.

Key words atmospheric optics; video measurement; density; complex flow; reconstruction

1 引言

空腔结构在提高飞行器隐身性能、降低气动阻力方面作用显著^[1], 而广泛应用于各类飞行器会带来复杂流动问题, 如空腔绕流会出现流动分离与再附、剪切层不稳定、波/涡/剪切层相互干扰等, 上述问题会导致空腔内压力脉动剧烈、噪声环境恶劣, 不

仅影响飞行品质, 严重时还将危及飞行安全^[1-2]。对空腔复杂流动进行显示或观测有助于认识复杂流动现象, 为研究流动控制方法、探索物理机制提供依据, 也是解决先进飞行器设计工程实际问题的重要手段^[3]。

纹影技术、阴影技术作为传统流动显示技术^[4]在空腔复杂流动显示中得到了广泛应用, 为流动机

收稿日期: 2021-10-11; 修回日期: 2021-11-09; 录用日期: 2021-11-17

基金项目: 国家自然科学基金(11472297)

通信作者: *huangxuhui_cardc@163.com

理模型的研究提供了观测依据^[5-6],但难以提供定量结果。基于示踪物的流动显示方法,如激光诱导荧光(LIF)技术^[7]、粒子图像测速(PIV)技术^[8-9]、粒子轨迹测速技术^[10-11]等也相继被应用到流动显示研究中,并在研究过程中发现了一些有趣的空腔流动现象。但对于大风洞,示踪物难以在短时间内均匀地播撒在待测区域内,尤其在遇到激波、强剪切层、大尺度涡等高速复杂流动结构时,示踪物很难实现完全的流动跟随^[8,12]。

背景纹影(BOS)技术融合了纹影技术和PIV技术,通过测量光线穿过扰动流场的偏折位移来获取扰动流场结构,具有光路简单、可量化的优点^[13-17]。但由于在振动环境中使用图像相关法计算偏折位移,其测量结果包含了相机、背景板的相对位置变化所引起的振动误差。在激波、剪切层等流场变化剧烈区域,由于背景图像畸变严重,图像相关法可能得不到准确结果。

为了克服BOS技术在复杂流动显示方面存在的不足,文献[18-19]将风洞视频测量方法与BOS光路结合,以均匀排列的圆形标记点为背景,利用成熟的摄影测量技术与数字图像技术,可以高精度地测得在有无扰动流场时光线从标记点出发到摄影中心的偏折角,定量显示空腔高速流动所产生的波/涡/剪切层的位置、强弱及相互作用关系,为复杂流动定量显示提供了新思路,但还未将偏折角的测量结果与反映流场状态信息的密度、速度或压强等基本参数进行关联,故不便于开展实验结果分析,为此难以与其他技术手段所得的结果进行对比^[20]。虽然有学者在BOS技术测得偏折位移的基础上,通过求解偏微分方程来获得流场密度的定量结果^[15-17],但未考虑偏折位移离散测量结果的峰值丢失情况及测量误差,而且求解过程中可能会出现误差放大现象,导致求解结果失真。

为此,本文在文献[19]的基础上,针对光线偏折的离散测量结果,开展了复杂流动密度重建方法的研究。从光线传输理论出发,根据密度与折射率、光线偏折角的关系,推导了关于密度的偏微分方程;通过神经网络^[21-24]建模,避免了在偏导数运算过程中局部峰值丢失所带来的误差放大问题。

2 基本原理

2.1 密度梯度与光线偏折角的关系

将从背景板上标记点发出的光线经摄影中心穿过扰动流场后的偏折角测量值记为 $\hat{\epsilon}_x$ 和 $\hat{\epsilon}_y$ ^[18],根

据光线传输理论,BOS光路所得的光线偏折角为扰动流场折射率梯度沿光线传输路径 z 的积分,表达式为

$$\hat{\epsilon}_i = \frac{1}{n_0} \int_{z_D-L/2}^{z_D+L/2} \frac{\partial n}{\partial i} dz, \quad (1)$$

式中: $i=x,y$; n_0 和 n 分别为在有无扰动流场时空气的折射率; Z_D 为背景板到扰动流场中心平面的距离; L 为光轴方向扰动流场的宽度。

对于空气介质,密度 ρ 与折射率 n 之间的Gladstone-Dale关系可表示为

$$n = 1 + K_{GD}\rho, \quad (2)$$

式中: K_{GD} 为Gladstone-Dale常数。

假设沿光线传输路径的折射率梯度保持不变^[25],将式(2)代入式(1)即可得到扰动流场在光线传输路径上的密度梯度,将其在 x 方向和 y 方向的测值分别记为 \hat{p} 和 \hat{q} ,表达式为

$$\begin{cases} \hat{p} = \frac{1 + K_{GD}\rho_0}{\Delta Z_D K_{GD}} \hat{\epsilon}_x \\ \hat{q} = \frac{1 + K_{GD}\rho_0}{\Delta Z_D K_{GD}} \hat{\epsilon}_y \end{cases}, \quad (3)$$

式中: ρ_0 为未受扰动的空气密度。

2.2 密度重建方程

将待求解区域 D 上的密度分布函数记为 $\rho(x,y)$,以其为自变量建立目标泛函,表达式为

$$J_{\min}(\rho) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} - \hat{p} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} - \hat{q} \right)^2 \right] dx dy + \lambda^2 \iint_D (\rho - \rho'_0)^2 dx dy, \quad (4)$$

式中: ρ'_0 为待求解区域的密度分布先验值; λ 为正则化参数,其取值由Hansen等^[26]提出的L曲线法确定。式(4)等号右端:第一项为待重建密度 $\rho(x,y)$ 的梯度与式(3)间接测量值的误差平方和的积分;第二项为正则化项,用于引导求解结果倾向于先验知识。

运用变分原理可将式(4)的泛函极值问题转化为微分方程求解问题,即当式(4)取极小值时, $\rho(x,y)$ 应满足偏微分方程,即

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial y} + \lambda^2 (\rho - \rho'_0). \quad (5)$$

式(5)为Poisson方程,结合边界条件采用有限差分方法或有限元方法来获取数值解。

2.3 神经网络建模

受到查询窗口大小或标记点尺寸限制,BOS技

术与视频测量方法均仅能得到密度梯度的有限离散测值:一方面该测值不可避免地包含了测量误差,同时存在局部峰值丢失的问题,如果直接进行偏导数运算可能会出现误差放大的情况;另一方面,数值求解方法的网格坐标难以与测量标记点完全重合。

为了提高式(5)数值解的精准度,使用神经网络对式(3)的结果进行建模。神经网络的拓扑结构如图 1 所示,包含输入层、隐含层与输出层三个层次,其中输入层是输入标记点对应待测区域的坐标,输出层是输出密度梯度测值,隐含层为单层。从数据集分出 70% 的数据作为训练集,用于估计模型参数;分出 15% 的数据作为验证集,用于初步评估模型效果,并确定隐含层的神经元数量;剩余 15% 的数据作为测试集,用于评估模型的最终泛化能力。

以期望输出值和模型实际输出值的均方误差为目标函数,使用Levenberg-Marquardy优化算法来

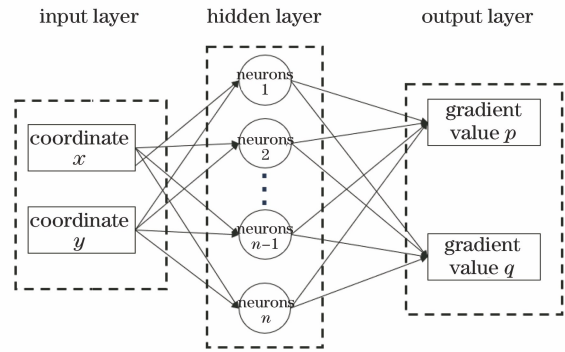


图 1 神经网络的拓扑结构

Fig. 1 Topological structure of neural network

求解神经网络模型,再根据输出误差来调整相应的权值和阈值参数,直到达到最大训练次数或测试集的均方误差满足收敛条件,从而得到输入与输出之间的非线性映射关系。对于任意给定位置 (x_0, y_0) ,使用理查德外推公式来计算偏导数,表达式为

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \approx \frac{4[P(x_0 + 0.5h, y_0) - P(x_0 - 0.5h, y_0)]}{3h} - \frac{P(x_0 + h, y_0) - P(x_0 - h, y_0)}{6h} \\ \left. \frac{\partial \hat{q}}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \approx \frac{4[Q(x_0, y_0 + 0.5h) - Q(x_0, y_0 - 0.5h)]}{3h} - \frac{Q(x_0, y_0 + h) - Q(x_0, y_0 - h)}{6h} \end{cases}, \quad (6)$$

式中: $\left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$ 和 $\left. \frac{\partial \hat{q}}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}$ 分别为密度梯度测值 \hat{p}

和 \hat{q} 在 (x_0, y_0) 处的偏导数; h 为微分步长; $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 为以 (x, y) 为输入,神经网络模型的输出。

2.4 先验值估计

根据有限差分思想,采用正方形网格来离散待求解区域,并建立关于密度先验值矩阵 ρ_0 的目标函数,即

$$E_{\min}(\rho_0) = \left\| \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix} \text{vec}(\rho_0) - \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{p}) \\ \text{vec}(\hat{q}) \end{bmatrix} \right\|_2^2, \quad (7)$$

式中: $\text{vec}(\rho_0)$ 、 $\text{vec}(\hat{p})$ 和 $\text{vec}(\hat{q})$ 分别为将矩阵 ρ_0 、 \hat{p} 和 \hat{q} 中的每列元素依次排列而成的列向量; D_x 和 D_y 分别为 x 方向和 y 方向的有限差分矩阵,其每行元素由三点中心导数或单边导数公式确定。将式(7)的最小二乘解作为式(4)的先验值。

3 仿真分析

为了验证基于神经网络的离散梯度数据建模方法的有效性,本文进行了仿真,步骤如下:

- 1) 根据已知的待重建密度函数来产生梯度分布场并叠加高斯白噪声;
- 2) 分别使用本文的神经网络建模方法(NNMM)和直接求偏导数(DCPD)方法来估计 Poisson 方程等号右端的有源项;
- 3) 根据有源项的估计值,使用有限差分方法求解式(5)。

仿真选用图 2 的函数分布,其定义域 $D_s = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 10, -1 \leq y \leq 10\}$,具有光滑多峰的特点。该函数由 Harker 等^[27]提出,多用于由梯度数据重建三维面形算法的精准度评估和性能测试。

将 D_s 等间距划分成正方形网格,根据待重建密度函数的解析表达式来计算网格点处的梯度值,并添加高斯白噪声,其量值为极差的 5%。分别使用 NNMM 和 DCPD 方法来估计 Poisson 方程等号

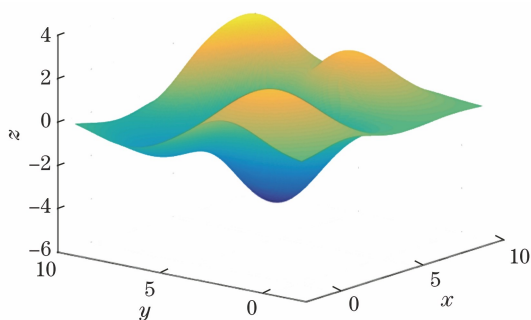


图 2 待重建密度函数的分布示意图
Fig. 2 Distribution diagram of density function to be reconstructed

右端的有源项在网格点处的取值,再使用有限差分方法来求解方程。在使用有限差分法迭代求解时,边界值按第一类边值条件来确定,先验值和初始值均为 0。当迭代误差满足收敛条件或达到最大迭代次数时,终止迭代。

图 3 给出了由 NNMM 和 DCPD 方法估计的有源项与理论值的残差直方图,实线是由残差拟合的正态分布曲线,图中横坐标表示残差取值,纵坐标表示残差在取值区间内出现的次数。从图 3 可以看出;NNMM 所得的残差主要集中分布于 $(-1, 1)$,残差绝对值的平均值为 0.2275;DCPD 方法所得的残差则分布于 $(-10, 10)$,残差绝对值的平均值为 3.0592,其是本文方法的 10 倍还多。

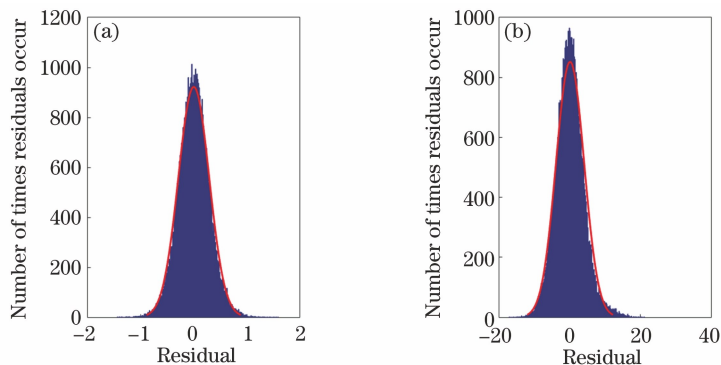


图 3 不同方法估计的有源项与理论值的残差直方图。(a) NNMM;(b) DCPD 方法
Fig. 3 Residual histograms of theoretical values and active terms estimated by different methods.
(a) NNMM; (b) DCPD method

图 4 给出了在 y 坐标值为 8 时,由两种方法估计的有源项与理论值随 x 坐标变化的曲线。从图 4 可以看出,DCPD 方法所得的有源项围绕理论值的波动幅度较大,而且出现了误差被放大的现象,而 NNMM 的估计结果与理论值吻合较好,变化趋势也基本一致,与理论值在量值上的偏差比 DCPD 方法小很多。综上所述,通过神经网络的学习训练可以较好地识别出密度梯度间接测值与位置之间的非线性特征。

根据上述两种方法得到的有源项,使用五点中心差分公式对式(5)进行求解,图 5 给出了两种方法所得的结果与理论值的残差分布图。从图 5 可以看出,NNMM 所得的结果与理论值的残差约在 $(0, 0.3)$ 以内,而 DCPD 方法在 $(-5, 3)$ 以内。

图 6 给出了在 $y = 8$ 时,两种方法所得的结果与理论值的残差随 x 坐标变化的曲线。从图 6 可以看出:DCPD 方法的结果与理论值偏差很大,出现了严重失真,这正是由有源项的估计值在该坐标值

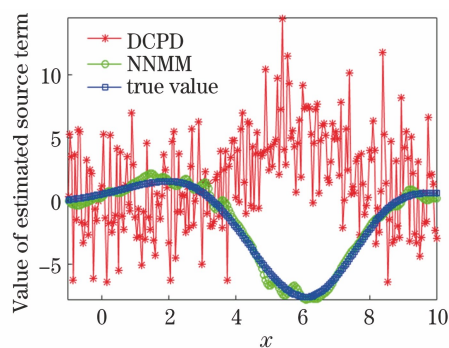


图 4 有源项估计值与理论值随 x 坐标变化的曲线
Fig. 4 Curve of estimated and theoretical values of active terms varying with x coordinates

处出现较大偏差导致的;NNMM 所得的结果与理论值吻合较好,虽然在量值上有差异,但其峰值特征、变化规律一致。

对于图 2 的多峰函数,NNMM 所得的结果明显优于 DCPD 方法,与理论值的残差在量值上比 DCPD 方法小一个数量级。

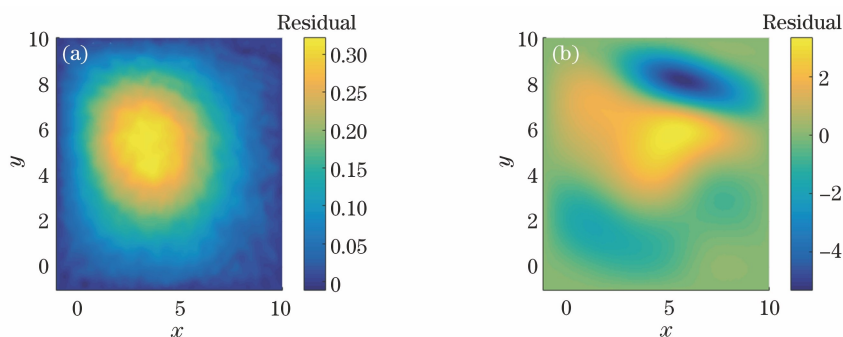


图 5 密度重建结果与理论值的残差分布图。(a) NNMM; (b) DCPD 方法

Fig. 5 Residual distribution of density reconstruction results and theoretical values. (a) NNMM; (b) DCPD method

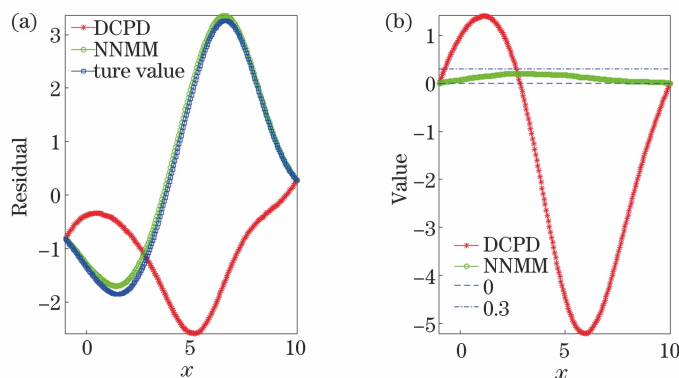


图 6 重建结果的变化曲线。(a) 残差随 x 坐标变化的曲线; (b) 残差的变化曲线

Fig. 6 Variation curve of reconstruction result. (a) Variation curve of residual with x coordinate; (b) variation curve of residual

4 风洞实验结果与讨论

在 CARDIC 的 FL-21 风洞 (试验段尺寸为 $0.6 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$) 搭建了基于 BOS 的视频测量光路, 如图 7 所示。将摄影中心到背景板的距离记为 Z_B , 背景板上均匀分布了行列间隔相等、直径为 3 mm 的白色圆形标记点, 相邻标记点的圆心间隔为 6 mm , 背景板尺寸为 $1.2 \text{ m} \times 1.2 \text{ m}$, 底色为黑色。相机分辨率为 $5120 \text{ pixel} \times 5120 \text{ pixel}$, 像元尺寸为 $4.5 \mu\text{m}$, 镜头焦距为 35 mm , 曝光时间为 $1 \mu\text{s}$ 。

实验模型如图 8 所示, 测量区域为阴影部分, 空

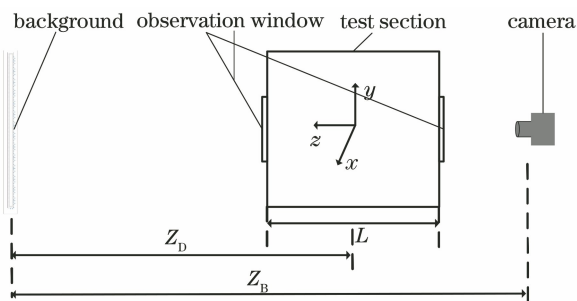


图 7 视频测量光路

Fig. 7 Video measurement optical path

腔的长深比为 6, 宽为 90 mm , 两侧均安装厚度为 5 mm 的光学玻璃, 实验马赫数为 1.5。

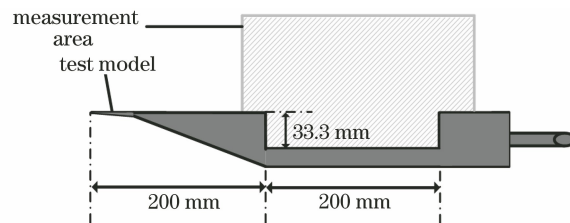


图 8 实验模型与测量区域

Fig. 8 Experimental model and measurement area

在无风的状态下, 使用相机记录一幅背景图像, 将其称为参考图像。风洞启动, 流场稳定后再次拍摄叠加模型绕流的背景图像, 使用视频测量方法^[19]来解算在有扰动流场时, 从背景板圆形标记点出发经过摄影中心的光线偏折角, 测量结果如图 9 所示。从图 9 可以看出该空腔模型绕流的激波、剪切层等流动结构, 以及位置与强弱关系。为了将偏折角测量结果与流场密度关联起来, 以便更加直观地分析实验结果, 同时与其他技术手段进行比较, 使用 NNMM 对测量区域密度进行重建。

首先通过神经网络对由偏折角测量结果计算出

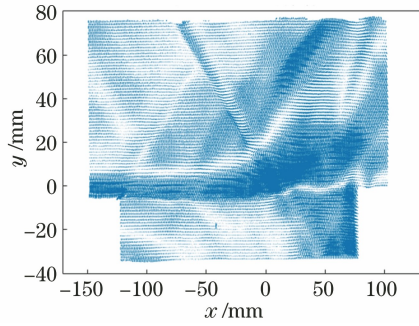


图 9 偏折角的测量结果

Fig. 9 Measurement result of deflection angle

来的密度梯度值进行建模,可以识别出密度梯度间接测值与标记点坐标值间的非线性特征关系;接着使用正方形网格剖分测量区域,使用最小二乘法估计密度先验值;然后利用式(6)计算有源项的偏导数;最后使用有限差分方法获取式(5)密度方程的数值解。

图 10 给出了该空腔模型绕流密度的重建结果与自由来流密度 ρ_∞ 的比值,其中自由来流密度按等熵的关系获取。从图 10 可以看出:该空腔模型绕流属于开式流动类型^[28-29],自由来流在腔体前缘开始分离而形成剪切层并与空腔后壁碰撞,致使空腔

后壁附近的密度值增大;在空腔前缘上方清晰可见斜激波,其倾斜角为 42.1° ,而马赫数为 1.5 所对应的来流马赫角为 41.8° ,这与空腔前缘激波倾斜角约等于来流马赫角的规律一致。在空腔内部,由于流动连通,所以密度分布较为均匀。在此基础上,可结合气体动力学相关理论开展绕流密度与压强、速度等基本流动参数对应关系的研究。

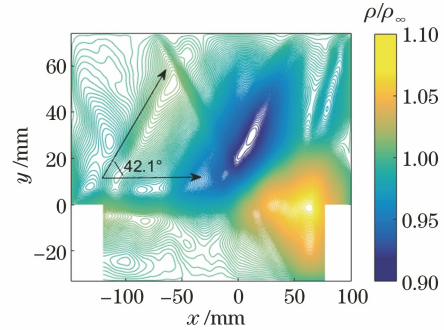


图 10 NNMM 的密度重建结果

Fig. 10 Density reconstruction result of NNMM

为了验证 NNMM 所得的结果,分别使用 DCPD、有限元方法(FEM)对式(5)进行数值求解,所得结果如图 11 和图 12 所示。图 13 给出了三种方法所得的结果在纵坐标为 -10 mm 和 35 mm 处的曲线。

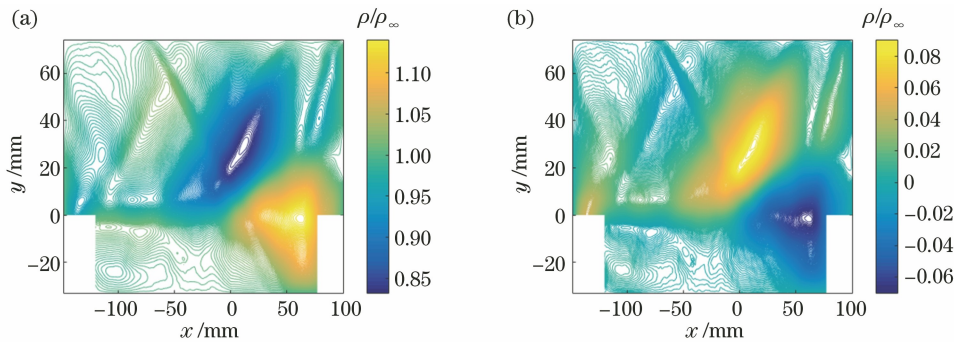


图 11 DCPD 方法的密度重建结果。(a)结果;(b)结果与 NNMM 所得结果的偏差

Fig. 11 Density reconstruction result of DCPD method. (a) Result; (b) deviation of result from NNMM results

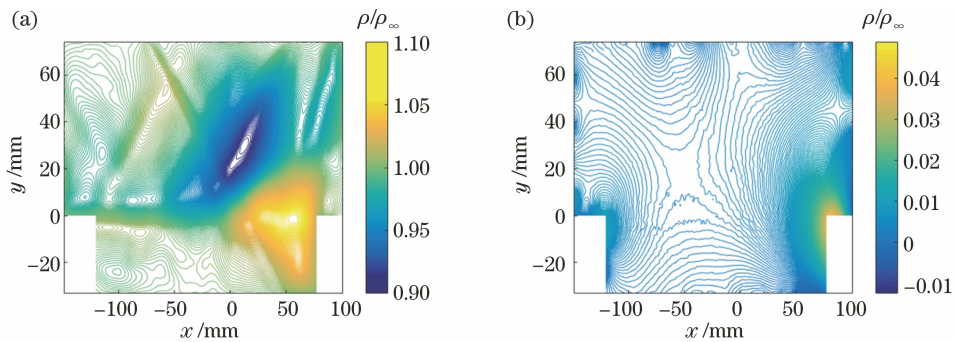


图 12 FEM 的密度重建结果。(a)结果;(b)结果与 NNMM 所得结果的偏差

Fig. 12 Density reconstruction result by FEM. (a) Result; (b) deviation of result from NNMM results

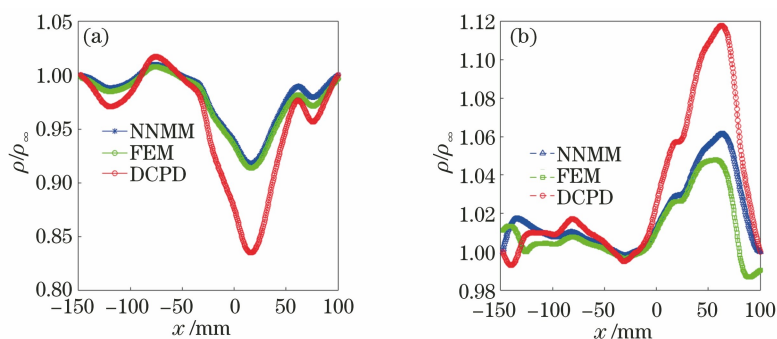


图 13 密度重建结果在不同 y 值下的曲线比较。(a) $y=35$ mm;(b) $y=-10$ mm

Fig. 13 Curve comparison of density reconstruction results under different y values. (a) $y=35$ mm; (b) $y=-10$ mm

从图 11~13 可以看出:三种方法的流动结构基本一致,NNMM 所得的结果与 FEM 吻合更好,量值差异更小;在密度分布峰值处,DCPD 方法与 NNMM 和 FEM 的偏差较大,这是由于直接对离散测值进行偏导数运算会导致有源项包含较大误差,同时也说明了通过神经网络对有限离散测值进行建模,能够有效抑制因局部峰值丢失带来的误差放大问题。

5 结 论

本文在视频测量方法得到光线偏折角的基础上,开展了复杂流动密度重建方法的研究。数值仿真和风洞实验结果表明,本文方法能够定量重建复杂的流动密度分布,重建结果明显优于直接求偏导数方法,尤其是在密度分布峰值处的量值具有更高的精度。

本文方法为高速空腔复杂流动的定量分析提供了新的途径和手段,应用前景广阔。下一步可结合气体动力学的相关理论,研究复杂流动中压强、速度等基本参数与密度的对应关系。

参 考 文 献

- [1] 艾邦成, 宋威, 董垒, 等. 内埋武器机弹分离相容性研究进展综述 [J]. 航空学报, 2020, 41(10): 023809.
Ai B C, Song W, Dong L, et al. Review of aircraft-store separation compatibility of internal weapons[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2020, 41(10): 023809.
- [2] 薛飞, 金鑫, 王誉超, 等. 内埋武器高速投放风洞试验技术 [J]. 航空学报, 2017, 38(1): 120114.
Xue F, Jin X, Wang Y C, et al. Wind tunnel test technique on high speed weapon delivery from internal weapons bay [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2017, 38(1): 120114.
- [3] 范洁川. 近代流动显示技术 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2002: 1-2.
Fan J C. Modern flow visualization [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2002: 1-2.
- [4] Settles G S. Schlieren and shadowgraph techniques [M]. New York: Springer, 2001: 28-34.
- [5] Stallings R, Wilcox F. Experimental cavity pressure distributions at supersonic speeds [EB/OL]. (1987-06-01) [2021-02-05]. <https://ntrs.nasa.gov/citations/19870013193>.
- [6] Zhang X, Rona A, Edwards J A. An observation of pressure waves around a shallow cavity [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 214(4): 771-778.
- [7] Unalmis O, Clemens N T, Dolling D S. Planar laser imaging of high-speed cavity flow dynamics [C]//36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 12-15, 1998, Reno, NV, USA. Virginia: AIAA, 1998.
- [8] Ritchie S, Lawson N, Knowles K. Application of particle image velocimetry to transonic cavity flows [C]//43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 10-13, 2005, Reno, NV, USA. Virginia: AIAA, 2005.
- [9] Beresh S, Wagner J, Pruett B. Particle image velocimetry of a three-dimensional supersonic cavity flow [C]//50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, January 9-12, 2012, Nashville, Tennessee. Virginia: AIAA, 2012.
- [10] 周骛, 王芳婷, 王宵宵, 等. 基于双目视觉多曝光的粒子轨迹测速方法研究 [J]. 光学学报, 2021, 41(12): 1215001.
Zhou W, Wang F T, Wang X X, et al. Particle streak velocimetry method based on binocular vision and multiple exposure [J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(12): 1215001.
- [11] 王宵宵, 周骛, 王芳婷, 等. 基于离焦成像的粒子轨迹测速 [J]. 光学学报, 2021, 41(19): 1912004.
Wang X X, Zhou W, Wang F T, et al. Particle

- streak velocimetry based on defocused imaging [J]. *Acta Optica Sinica*, 2021, 41(19): 1912004.
- [12] 刘洪, 陈方, 励孝杰, 等. 高速复杂流动 PIV 技术研究实践与挑战 [J]. *实验流体力学*, 2016, 30(1): 28-42.
- Liu H, Chen F, Li X J, et al. Practices and challenges on PIV technology in high speed complex flows [J]. *Journal of Experiments in Fluid Mechanics*, 2016, 30(1): 28-42.
- [13] Venkatakrisnan L, Meier G E A. Density measurements using the background oriented schlieren technique [J]. *Experiments in Fluids*, 2004, 37(2): 237-247.
- [14] Moumen A, Grosse J, Ndindabahizi I, et al. Visualization and analysis of muzzle flow fields using the background-oriented schlieren technique [J]. *Journal of Visualization*, 2020, 23(3): 409-423.
- [15] 张俊, 胥嶂, 张龙. 基于 BOS 技术的密度场测量研究 [J]. *实验流体力学*, 2015, 29(1): 77-82.
- Zhang J, Xu D, Zhang L. Research on density measurement based on background oriented schlieren method [J]. *Journal of Experiments in Fluid Mechanics*, 2015, 29(1): 77-82.
- [16] Tipnis T J, Finnis M V, Knowles K, et al. Density measurements for rectangular free jets using background-oriented schlieren [J]. *The Aeronautical Journal*, 2013, 117(1194): 771-784.
- [17] Amjad S, Karami S, Soria J, et al. Assessment of three-dimensional density measurements from tomographic background-oriented schlieren (BOS) [J]. *Measurement Science and Technology*, 2020, 31(11): 114002.
- [18] 赵涛, 张征宇, 王水亮, 等. 大幅面气动光学波前畸变场测量与重构 [J]. *光学学报*, 2013, 33(10): 1012003.
- Zhao T, Zhang Z Y, Wang S L, et al. Measurement and reconstruction for large aero-optics wavefront distortion field [J]. *Acta Optica Sinica*, 2013, 33(10): 1012003.
- [19] 张征宇, 王显圣, 黄叙辉, 等. 高速复杂流动结构的视频测量 [J]. *航空学报*, 2017, 38(8): 120989.
- Zhang Z Y, Wang X S, Huang X H, et al. Videogrammetry measurement for high-speed complex flow structures [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2017, 38(8): 120989.
- [20] 赵鑫海, 易仕和, 丁浩林, 等. 超声速半自由射流的光程差实验 [J]. *光学学报*, 2020, 40(7): 0701001.
- Zhao X H, Yi S H, Ding H L, et al. Experiment on optical path difference of supersonic semi-free jet [J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(7): 0701001.
- [21] 高涵, 白照广, 范东栋. 基于 BP 神经网络的 GNSS-R 海面风速反演 [J]. *航空学报*, 2019, 40(12): 323261.
- Gao H, Bai Z G, Fan D D. GNSS-R sea surface wind speed inversion based on BP neural network [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2019, 40(12): 323261.
- [22] 王正魁, 靳旭红, 朱志斌, 等. 超声速湍流密度脉动预测的神经网络方法 [J]. *航空学报*, 2018, 39(10): 122244.
- Wang Z K, Jin X H, Zhu Z B, et al. Neural network method for predicting density fluctuations in supersonic turbulence [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2018, 39(10): 122244.
- [23] 徐歌, 董立泉, 孔令琴, 等. 基于神经网络模型的组织生物组织参数反演算法 [J]. *光学学报*, 2021, 41(11): 1117001.
- Xu G, Dong L Q, Kong L Q, et al. Parameters inversion algorithm of biological tissues based on a neural network model [J]. *Acta Optica Sinica*, 2021, 41(11): 1117001.
- [24] Chen J B, Wang M, Xia W. Neural-network-assisted femtosecond laser pulse duration measurement using two-photon absorption [J]. *Chinese Optics Letters*, 2020, 18(12): 121901.
- [25] Cozzi F, Göttlich E, Angelucci L, et al. Development of a background-oriented schlieren technique with telecentric lenses for supersonic flow [J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, 778: 012006.
- [26] Hansen P C, O'Leary D P. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1993, 14(6): 1487-1503.
- [27] Harker M, O'Leary P. Regularized reconstruction of a surface from its measured gradient field [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2015, 51(1): 46-70.
- [28] Sridhar V, Gai S, Kleins H. Some numerical studies of rectangular open cavities at Mach 2 [C] // 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, May 27-29, 2013, Berlin, Germany. Virginia: AIAA, 2013.
- [29] 刘俊, 蔡晋生, 杨党国, 等. 超声速空腔流动波系演化及噪声控制研究进展 [J]. *航空学报*, 2018, 39(11): 022366.
- Liu J, Cai J S, Yang D G, et al. Research progress in wave evolution and noise control for supersonic cavity flows [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2018, 39(11): 022366.