

静电聚焦同心球系统的成像电子光学

A 章:电子轨迹方程

周立伟*

北京理工大学光电学院, 北京 100081

摘要 在成像电子光学中,静电聚焦同心球系统具有一系列宝贵的性质,其电位分布与电子轨迹能以解析形式表示,可以定量地研究系统的电子光学成像特性与横向像差。尽管前人已有不少研究,但都限于零级近似成像的认识,且其中存在着不少谬误。本系列文章将全面研究静电聚焦两电极与多电极同心球系统中电子的运动轨迹、电子光学成像特性与横向像差,探讨电子束在成像段形成的图像弥散,得出一些新的结论和认识,纠正文献中存在的一些谬误,建立自己的理论体系。本系列文章的第一篇主要探讨电子在两电极同心球系统中在静电场作用下的运动轨迹,导出了两电极静电聚焦同心球系统中自阴极面逸出的电子轨迹在极坐标系下的表示式 $\rho = f(\varphi)$ 与圆柱坐标系下新的轨迹方程的表示式 $r = r(z)$,给出了自光阴极逸出的电子在成像段的行进轨迹的交轴位置及其斜率的近似和精确表示式。本文为全面研究静电聚焦同心球系统的电子光学性质及其像差奠定基础。

关键词 成像系统; 像管; 成像电子光学; 静电聚焦阴极透镜; 两电极静电聚焦同心球系统; 电子轨迹方程

中图分类号 O463

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202242.0811001

Imaging Electron Optics of Electrostatic Focusing Concentric Spherical System Part A: Electron Trajectory Equations

Zhou Liwei*

School of Optics and Photonics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract In imaging electron optics, the electrostatic focusing concentric spherical system has a series of valuable properties, its potential distribution and electron trajectory can be represented by analytical form, and the electron optical imaging characteristics and its lateral aberrations can be quantitatively studied. Although there are many literatures on electron optical imaging, they are limited to the understanding of zero-order approximation imaging, and a lot of fallacies exist in it. This series of articles fully study the electron motion trajectory, electron optical imaging characteristics, and lateral aberrations in the electrostatic focusing concentric spherical system composed of two electrodes or multiple electrodes, investigate the image dispersion formed by the electron beam in the imaging segment, put forward some new idea and recognition, correct some fallacies in literatures, and establish my own theoretical system. The first article of this series mainly explores the electron moving trajectory under the electrostatic field in the concentric spherical electrostatic focusing system composed of two electrodes, deduces the new representations for the trajectory of electrons emitted from the photocathodes of the concentric spherical system with electrostatic focus of two electrodes in the polar coordinate system $\rho = f(\varphi)$ and in the cylindrical coordinate system $r = r(z)$, and explores the exact and approximate formulae of axial intersection position and its angle of inclination at the image section for the electrons emitted from the photocathode. This paper lays a foundation in studying the electron optical properties and lateral aberrations of the electrostatic focusing concentric spherical system.

收稿日期: 2021-10-26; 修回日期: 2021-11-11; 录用日期: 2021-11-15

通信作者: *zhoulw@vip.sina.com

Key words imaging systems; image tubes; imaging electron optics; electrostatic focusing cathode lenses; electrostatic focusing concentric spherical systems composed of two electrodes; electron trajectory equation

1 引言

由两个具有共同曲率中心的球面电极所组成的球形电容器静电聚焦系统简称两电极同心球系统。研究同心球系统作为静电聚焦像管的成像系统从电子光学角度来看是颇有意义的,这是因为:系统的电位分布和电子轨迹都可写成解析形式,可以定量地研究系统的电子光学性质和像差;无论是严格精确的还是近似实现的同心球系统,都能得到良好的像质。这类系统本身具有一系列宝贵的性质:对于凹面阴极-凸面栅状阳极系统,如果将接收图像的荧光屏制成球面形状,其曲率半径等于成像位置到系统中心的距离,则除了色差与球差外,场曲与屏面曲率一致,其他类型的像差——彗差、畸变和像散不复存在。因此,不少像管设计都采用接近于同心球系统的结构。20 世纪 60 年代开始发展的第一代级联像增强器的电子光学系统的本质正是两电极静电聚焦同心球系统的一种变型。

按照辩证唯物主义观点,在考察事物时,必须从本质上认识世界上不存在纯粹的普遍性,要使普遍性广泛得到承认,必须有特殊性来加以证实。因之,由静电阴极透镜的理想模型——同心球系统出发,分析和探讨这类系统的聚焦成像所包含的具体矛盾,解剖它作为阴极透镜所具有的矛盾的特殊性,从中找出一些对于阴极透镜具有普遍意义和规律性的线索,这不但对于研究同心球型像管的电子光学提供理论基础;而且,理想模型成像的矛盾的特殊性中包含静电阴极透镜宽电子束成像的矛盾的普遍性,这对于进一步研究轴对称阴极透镜具有实际意义。

本系列文章将着重研究两电极静电聚焦同心球电子光学系统中电子行进的轨迹方程,探讨电子光学成像性质及其像差,研讨影响电子光学成像质量的最小弥散圆,确定最佳像面的位置,并将结果推广到任意多个电极静电聚焦同心球电子光学系统中。

关于两电极静电聚焦同心球系统的电子光学,虽然 Ruska^[1]、Schagen^[2]、Seman^[3] 等曾先后进行了研究,导出了轨迹方程,讨论了系统的成像,但他们的工作主要是研究电子在同心球内部的行进轨迹,对于电子光学成像的考察仅停留在零级近似上^[1-2]。本文将推导两电极静电同心球电子光学系

统中自阴极物面以初速度 v_0 、初角度 α_0 射出的电子轨迹新的表示式,以及逸出电子的交轴位置及其倾角的精确与近轴表示式,为全面分析两电极和多电极同心系统的电子光学成像性质和像差奠定基础^[4-5]。

为了揭示规律性,本文借助几何光学通常采用的符号规则导出同心球系统的轨迹方程普遍形式解,它对于无论是凹面阴极-凸面阳极还是凸面阴极-凹面阳极构成的系统都是适用的。由此可极方便地确定轨迹的交轴位置及其倾角,研讨系统的电子光学成像性质。

2 符号规则

图 1 所示的是两种不同的静电同心球系统:凹面阴极-凸面阳极系统和凸面阴极-凹面阳极系统。设球面阴极 C 和栅状球面阳极 A 的曲率半径分别为 R_c 和 R_a ($n = \frac{R_c}{R_a}$), 系统的共同曲率中心为 O 。

由于系统具有球对称性,故可用极坐标 (ρ, φ) 来描述电子轨迹。令极坐标的原点位于系统的曲率中心 O , 并设阴极 C 的电位 $\Phi_c = 0$ V, 栅状阳极 A 对于阴极 C 的电位为 Φ_{ac} , 电子以初速度 v_0 、初角度 α_0 自阴极上的原点处射出。

为了推导适用于上述两种不同的同心球系统的普遍公式,规定符号规则:

1) 线段。设射线行进方向自左至右,规定线段由左向右为正、由下向上为正,反之为负。为了定出某一线段参量的符号,还需规定线段的计算起点。图 1 中各线段与角度参量的计算起点规定为: R_c , R_a , ρ , R_{i_0} , R_i^* 均以曲率中心 O 算起到相应球面的顶点,其中上标 * 对应于近轴轨迹, R_{i_0} 为曲率中心 O 至交点 I_{a_0} 的距离, R_i^* 为自阴极面上原点以初速度 v_0 、初角度 α_0 逸出的近轴轨迹到达成像位置 I^* 处的距离。纵向像差 Δz 自理想像面位置 I^* 点算起,横向像差 Δr 由 $\varphi = 0^\circ$ 轴线算起。

2) 角度。一律以锐角来度量,规定逆时针转为正,顺时针转为负。与线段参量要规定计算起点一样,角度参量也要规定起始轴。图 1 中各角度参量的起始轴为: $\alpha_0, \varphi, \gamma, \alpha_i$ 均以 $\varphi = 0^\circ$ 轴线为起始轴,其中, γ 为 D 点的角度坐标, α_i 为电子轨迹在交点 I_{a_0} 处与 $\varphi = 0^\circ$ 轴线的交角; ζ, τ 均以过该点与曲率

中心 O 的连线为起始轴,其中, ζ 为极坐标 (ρ, φ) 处轨迹的切线与过该点与曲率中心 O 之间连线的夹角, τ 为电子轨迹在 D 点的切线与矢径 OD 间的

夹角。

图 1 所标注的数值全部是绝对值。因此,在图中负的角度或线段前加一负号,使它变为正值。

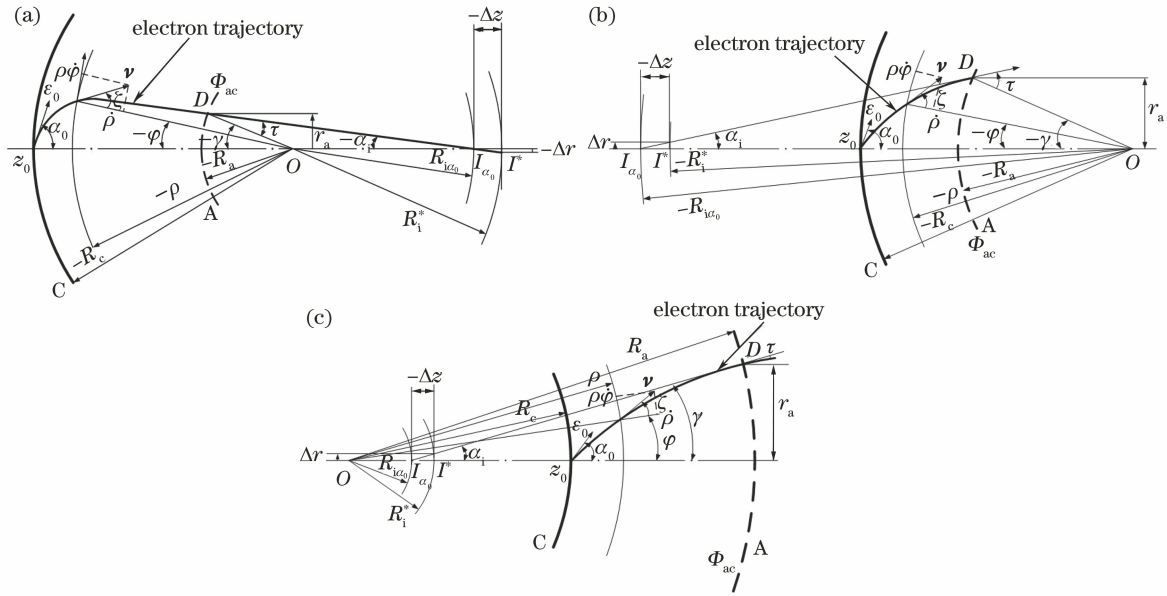


图 1 两电极静电聚焦同心球系统的电子轨迹。(a) $n > 2$; (b) $1 < n < 2$; (c) $n < 1$

Fig. 1 Electron trajectory in electrostatic focusing concentric spherical system composed of two electrodes.

(a) $n > 2$; (b) $1 < n < 2$; (c) $n < 1$

3 极坐标系下的实际轨迹 $\rho = f(\varphi)$

同心球系统两电极间的场等效于集中的球心的点电荷所产生的场。故不难求得矢径坐标 ρ 处相对于阴极 C 的电位 $\Phi_{\rho c}$ 的表达式为

$$\Phi_{\rho c} = E_c R_c \left(\frac{R_c}{\rho} - 1 \right), \quad (1)$$

式中: E_c 为阴极面上的电场强度。当 $\rho = R_a$ 时,则有

$$E_c = \frac{\Phi_{ac}}{R_c(n-1)}. \quad (2)$$

对于凹面阴极-凸面阳极系统, $n > 1$, R_c 为负值;对于凸面阴极-凹面阳极系统, $n < 1$, R_c 为正值。由此可见,无论 $n > 1$ 还是 $n < 1$, E_c 都为负值,指向球面阴极。

在同心球系统中,初速度为 v_0 的电子在初角度为 α_0 的逸出方向与系统轴线所构成的平面内的运动遵循能量守恒定律和有心力场角动量守恒定律:

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 + e\Phi_{\rho c}, \quad (3)$$

$$\rho^2 \dot{\varphi} = R_c^2 \dot{\varphi}_0 = C, \quad (4)$$

式中: m_0, e 分别为电子的质量与电荷, e 取绝对值; v 为电子在极坐标 (ρ, φ) 处的速度; $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$; $\dot{\varphi}_0 =$

$\frac{d\varphi_0}{dt}$, φ_0 为逸出电子转动的初角度; C 为常数。

(4)式中的常数决定于初始条件:

$$R_c \dot{\varphi}_0 = v_0 \sin \alpha_0, \quad (5)$$

于是有

$$\rho^2 \dot{\varphi} = R_c v_0 \sin \alpha_0. \quad (6)$$

在极坐标 (ρ, φ) 中,电子速度 v 可表示为

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\varphi})^2, \quad (7)$$

式中: $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}$ 。令

$$\mu = \frac{R_c}{\rho}, \quad d\mu = -\frac{R_c}{\rho^2} d\rho, \quad (8)$$

利用关系式 $\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}}$, 基于(3)、(5)、(7)式并考虑

(1)、(2)式,得到

$$d\varphi = \frac{-\sin \alpha_0 d\mu}{[1 + p(\mu - 1) - \mu^2 \sin^2 \alpha_0]^{1/2}}, \quad (9)$$

式中: p 虽然仅为一个数学符号,但它与 $n-1$ 的乘积具有明显的物理意义,表示系统的加速电位与初

电位的比值,即 $p(n-1) = \frac{\Phi_{ac}}{\epsilon_0}$, 其中, $\epsilon_0 = \frac{m_0}{2e} v_0^2$, ϵ_0

为静止的光电子为获得其发射能量所要求的加速电位,称为初电位;通常, $p(n-1)$ 的值是很大的。在一的像管中, $p(n-1)$ 为 $10^4 \sim 10^5$ 。

对(9)式进行积分,考虑到初始条件 $\rho=R_c, \mu=1, \varphi=0^\circ$, 便有

$$\rho = f(\varphi) = \frac{R_c}{\left(1 - \frac{p}{2\sin^2\alpha_0}\right)\cos\varphi - \frac{1}{\tan\alpha_0}\sin\varphi + \frac{p}{2\sin^2\alpha_0}}, \quad (10)$$

(10)式是 Ruska^[1]首先推导得到的。

4 极坐标系下实际轨迹的另一种表示

$$\varphi = \psi(\rho)$$

由图 1 可求得极坐标 (ρ, φ) 处轨迹的切线与过该点与曲率中心 O 的连线的夹角 ζ 。因为 $\tan \zeta$ 等于 (ρ, φ) 处垂直于矢径方向的速度 $\rho\dot{\varphi}$ 与沿着矢径方向的速度 $\dot{\rho}$ 的比值, 即

$$\tan \zeta = \frac{\rho\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} = \rho \frac{d\varphi}{d\rho} = -\mu \frac{d\varphi}{d\mu}, \quad (11)$$

因此, 由(9)式可得到

$$\tan \zeta = \frac{\mu \sin \alpha_0}{[1 + p(\mu - 1) - \mu^2 \sin^2 \alpha_0]^{1/2}}, \quad (12)$$

由(10)式可得到

$$\tan \zeta = \frac{\mu}{\left(1 - \frac{p}{2\sin^2\alpha_0}\right)\sin\varphi + \frac{1}{\tan\alpha_0}\cos\varphi}. \quad (13)$$

联立(10)、(12)、(13)式, 则可解出 $\sin \varphi, \cos \varphi$ 和 $\tan \zeta$ 的表达式分别为

$$\sin \varphi = -\frac{(\mu - 1)(c + d_0)}{bd_0 + b_0c} \sin \alpha_0, \quad (14)$$

$$\cos \varphi = \frac{bc + b_0d_0}{bd_0 + b_0c}, \quad (15)$$

$$\tan \zeta = \frac{\mu}{b} \sin \alpha_0, \quad (16)$$

其中

$$\begin{cases} b_0 = \cos \alpha_0 \\ d_0 = 1 - 2(n - 1) \frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}} \sin^2 \alpha_0 \\ b = \left[1 + \frac{\Phi_{ac}}{\epsilon_0} \frac{(\mu - 1)}{(n - 1)} - \mu^2 \sin^2 \alpha_0 \right]^{1/2} \\ c = 1 - 2\mu(n - 1) \frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}} \sin^2 \alpha_0 \end{cases} \quad (17)$$

(14)~(16)式表示电子在两电极同心球系统中的行进轨迹 $\varphi = \psi(\rho)$, 是本文作者在俄罗斯留学期间导出的。它的优点是对于多电极同心球系统的电

子追迹具有类推性。

5 极坐标下实际轨迹以半角的正切

$$\text{表示 } \tan \frac{\varphi}{2} = f(\rho)$$

如果将三角公式

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \quad (18)$$

代入(14)、(15)式, 则不难得到轨迹以半角的正切的表示^[4]的形式为

$$\tan \frac{\varphi}{2} = -\frac{(\mu - 1)(c + d_0)}{b(c + d_0) + b_0(c + d_0)} \sin \alpha_0. \quad (19)$$

顺便指出, 1951 年, 对于两电极同心球系统的电子轨迹, Schagen 由

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (20)$$

出发, 首先导得的以正切的半角表示的轨迹表达式^[2]为

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{-\cos \alpha_0 + [1 + p(\mu - 1) - \mu^2 \sin^2 \alpha_0]^{1/2}}{-\frac{p}{\sin \alpha_0} + (\mu + 1) \sin \alpha_0}. \quad (21)$$

可以看出, 本文导出的两电极同心球系统的轨迹表达式[(14)~(16)式]与 Ruska 的公式[(10)式]、Schagen 的公式[(21)式]和作者曾给出的(19)式相比, 对于确定系统的电子光学成像性质与像差更为简捷方便。而且, 无论对于 $n > 1$ 还是 $n < 1$ 的系统, 它们都是普遍适用的。此外, 对于多电极静电同心球系统, (14)~(16)式具有类推性。必须强调的是, 在使用以上公式时, 线段和角度都必须遵循上述的符号规则。

6 圆柱坐标系下的实际轨迹 $r = r(z)$

对于轴对称电子光学系统, 用极坐标 $\rho = f(\varphi)$ 或 $\varphi = \psi(\rho)$ 等形式表示的电子轨迹在使用上颇为不便。因此, 研究以圆柱坐标 $r = r(z)$ 的形式描述自两电极同心球系统的阴极面原点以初速度 v_0 、初角度 α_0 逸出的电子轨迹。图 2 为圆柱坐标系下静电聚焦两电极同心球系统的实际电子轨迹。

令圆柱坐标系的原点在阴极面上逸出电子的起始点上, z 轴与极坐标 (ρ, φ) 的起始轴线相重合, 坐标 (r, z) 的符号规则同前。显然, 此两坐标系之间存在着以下关系:

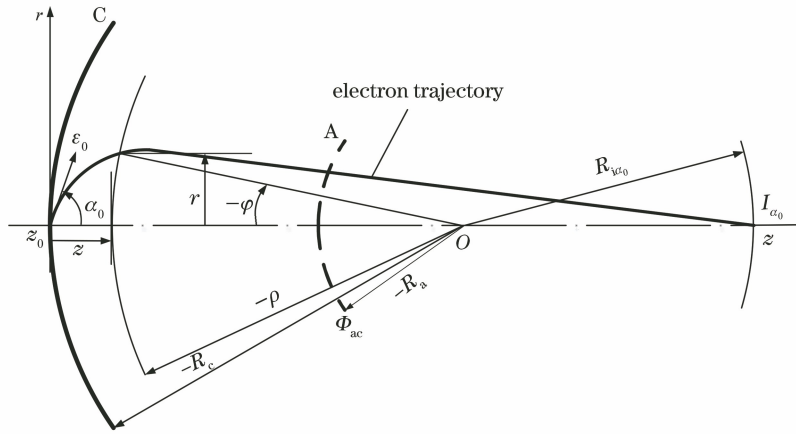


图 2 圆柱坐标系下静电聚焦两电极同心球系统的实际电子轨迹 $r=r(z)$

Fig. 2 Practical electron trajectory $r=r(z)$ under cylindrical coordinate system in electrostatic focusing concentric spherical system composed of two electrodes

$$\begin{cases} r = \rho \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi - R_c \end{cases}, \quad (22)$$

由此解出 $\sin \varphi$ 和 $\cos \varphi$, 代入(10)式, 便有

$$\rho = z + R_c + \frac{-2z \sin^2 \alpha_0 + 2r \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{p}. \quad (23)$$

将(23)式代入关系式 $r^2 = \rho^2 - (z + R_c)^2$, 并利用 $p(n-1) = \Phi_{ac}/\epsilon_0$, 得到两电极静电同心球系统中圆柱坐标系下由阴极面原点逸出的实际电子轨迹的解析表示式^[6]为

$$r(z) = \frac{2(n-1)}{1-4(n-1)^2 \frac{\epsilon_r \epsilon_z}{\Phi_{ac}^2}} \left(\frac{\epsilon_r}{\Phi_{ac}} \right)^{1/2} \left\{ (z + R_c) \left(\frac{\epsilon_z}{\Phi_{ac}} \right)^{1/2} - \frac{2z(n-1)\epsilon_z^{1/2}\epsilon_r}{\Phi_{ac}^{3/2}} - (z + R_c) \left[\frac{-z}{(n-1)(z + R_c)} + \frac{(z + R_c)^2 \epsilon_z + z^2 \epsilon_r}{(z + R_c)^2 \Phi_{ac}} \right]^{1/2} \right\}, \quad (24)$$

式中: ϵ_r 为电子径向初电位; ϵ_z 为电子轴向初电位。

(24)式是两电极静电同心球系统中实际轨迹在圆柱坐标系下的精确解, 没有进行任何简化, 这是作者自俄罗斯留学回国后导得的, 公开发表在本人 1993 年出版的专著《宽束电子光学》^[6]中。

为了与国外研究作一个对比, 这里列出了俄罗斯科学家在 1983 年对同一问题的研究所推导的圆柱坐标系下两电极同心球系统中自阴极面逸出的电子轨迹表达式^[7-8]为

$$r = \frac{2R_k^3 n_1 \exp(i\beta_0) (\cos \omega + i \sin \omega \cos \gamma)}{\Phi_c^2 R_k^2 \cos^2 \omega (1 + \tan^2 \omega \cos^2 \gamma) - \Theta^2} \cdot \frac{1}{R_k} \left\{ (\Phi_c - 2\epsilon_t n_1) \left[r_0 \epsilon_t \cos \omega - R_k \epsilon_n^{1/2} \epsilon_t^{1/2} \omega - \frac{\epsilon_t r_0 \omega \cos \omega}{\cos \gamma} \right] + \frac{\Phi_c}{2n_1} \{ 4\epsilon_t n_1^2 (R_k \epsilon_n^{1/2} \omega + \epsilon_t^{1/2} r_0 \cos \omega)^2 + R_k^2 [(\Phi_c - 2\epsilon_t n_1) \omega + 2\epsilon_t n_1 \cos \gamma]^2 - R_k^2 \Phi_c^2 \omega^2 \}^{1/2} - 2\epsilon_n^{1/2} \epsilon_t^{3/2} R_k n_1 \cos \gamma - \frac{\epsilon_t r_0 \omega \Phi_c}{\cos \gamma} \cos \omega \right\} + R_k \omega \tan \gamma \exp(i\beta_0), \quad (25)$$

式中: β_0 为自阴极面逸出电子的方位角; r_0 为电子逸出的初高度; $n_1 = \frac{R_k}{R_c} - 1$; $\Theta = 2R_k \epsilon_n^{1/2} \epsilon_t^{1/2} n_1 \cos \gamma +$

$$r_0 \cos [\omega (2\epsilon_t n_1 - \Phi_c)]; \tan \gamma = \frac{r_0}{R_k - z}; \omega = 1 - \frac{z}{R_k}.$$

应该指出, 俄罗斯科学家提出的(25)式中符号

的意义与本文有一些不同。在他们的表示式中, R_k, R_c 分别为球面阴极和球面阳极的曲率半径, Φ_c 为阳极对于阴极的电位, ϵ_t, ϵ_n 分别为逸出电子的切向初电位和法向初电位, 其他均为电子自球面阴极逸出时所对应的角度坐标。但是, 与(24)式所示的圆柱坐标系下两电极静电同心球系统中电子轨迹表

示式相比较,以矢量形式表示的(25)式是如此繁复,所有的参量都混杂在一起,读者根本看不出,哪些参量和因素在起主要作用,哪些是根本不重要的。因而难于总结其中存在的规律,更谈不上探讨理想成像和横向像差了。

作者认为,这原本是一个很简单的几何问题,也就是将球坐标系下表示的轨迹换成圆柱坐标系下表示的轨迹而已。问题在于:俄罗斯的研究者们不是由同心球的球面的顶点出发,求逸出电子在子午面内的行进轨迹,而是想寻找一个由球面阴极上的任一点向任意方向逸出的电子在圆柱坐标系下的解,从而把一个十分简单的问题复杂化了。本来,对于静电同心球电子光学系统,任何过系统中心的直线都可以视为系统的轴线。这样,研究人员完全可以简单地选择圆柱坐标系的系统的中心轴(它也是球对称系统的对称轴)作为研究的出发点,来寻找逸出电子在子午面内的行进轨迹。这样处理的话,问题很容易解决,无非是将球坐标系换成圆柱坐标系而已,所得到的表示式是很简单而清晰的,物理意义是清晰的,可以给予精确的表述。

在这里,绝对无意嘲笑我的俄罗斯同行。因为,作为一个科学家,在思考科学问题时常会想:是直扑主题?还是追求更普遍形式的解?把一个简单的科学问题复杂化也常是我进行科学研究时的一个误区,以为自己是在追求这一科学问题的更为广泛的普适解。

(24)式是本文作者首先导得的,它较现有的电子光学文献[9]给出的表达式更为简洁。下面,作者将进一步考察(24)式,抛弃一些更微小的量,进一步考察电子轨迹的性状,从中归纳出具有普遍意义的结果。

7 圆柱坐标系下的近轴轨迹 $r^* = r^*(z)$

如果在(24)式中引入近轴条件,略去分母中和

大括弧内较 1 小得多的 ϵ_r/Φ_{ac} 及更高的阶次项,便得到以圆柱坐标表示的自原点以初条件参量(ϵ_0, α_0)射出的近轴轨迹,其可用 $r^*(z)$ 表示:

$$r^*(z) = 2(n-1) \left(\frac{\epsilon_r}{\Phi_{ac}} \right)^{1/2} (z + R_c) \left\{ \left(\frac{\epsilon_z}{\Phi_{ac}} \right)^{1/2} - \left[\frac{-z}{(n-1)(z + R_c)} + \frac{\epsilon_z}{\Phi_{ac}} \right]^{1/2} \right\}. \quad (26)$$

若在(26)式中引入两电极同心球系统的轴上电位分布表示式:

$$\Phi(z) = \Phi_{ac} \frac{-z}{(n-1)(z + R_c)}, \quad (27)$$

则可将(26)式表示成如下极为简明的形式:

$$r^*(z) = 2z \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\Phi(z)}} \left[\sqrt{1 + \frac{\epsilon_z}{\Phi(z)}} - \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\Phi(z)}} \right]. \quad (28)$$

(28)式乃是实际轨迹[(24)式]的抽象与简化, $r^*(z)$ 之所以被称为近轴轨迹,是因为它的轨迹即(26)式正是圆柱坐标系下静电阴极透镜的近轴轨迹方程:

$$r''(z) + \frac{\Phi'(z)}{2[\Phi(z) + \epsilon_z]} r'(z) + \frac{\Phi''(z)}{4[\Phi(z) + \epsilon_z]} r(z) = 0, \quad (29)$$

在同心球系统的轴上电位分布[(27)式]下的解称为近轴解。这样首次证实了:若在一个具体的电子光学系统的实际轨迹表示式[(24)式]中舍弃高于电子径向初电位与加速电位的比值 ϵ_r/Φ_{ac} 及其相关的高阶幂次项,即满足近轴条件时,此轨迹[(28)式]便可称为近轴轨迹,而它确实是近轴轨迹方程的解析解。这可以说是静电聚焦成像电子光学难得的一例,是由本文作者首先发现证实的。

根据(28)式,不难求得行进中的近轴轨迹的斜率以及近轴电子的径向和轴向速度的表达式:

$$(r')^* = \frac{2}{R_c + z} \left[\frac{\epsilon_r}{\Phi(z)} \right]^{1/2} \left\{ z \left\{ \left[1 + \frac{\epsilon_z}{\Phi(z)} \right]^{1/2} - \left[\frac{\epsilon_z}{\Phi(z)} \right]^{1/2} \right\} + \frac{R_c}{2} \left[1 + \frac{\epsilon_z}{\Phi(z)} \right]^{-1/2} \right\}, \quad (30)$$

$$\dot{r}^* = \frac{1}{R_c + z} \left(\frac{2e}{m_0} \epsilon_r \right)^{1/2} \left\{ R_c + 2z \left[1 + \frac{\epsilon_z}{\Phi(z)} \right]^{1/2} \left\{ \left[1 + \frac{\epsilon_z}{\Phi(z)} \right]^{1/2} - \left[\frac{\epsilon_z}{\Phi(z)} \right]^{1/2} \right\} \right\}, \quad (31)$$

$$\dot{z}^* = \left\{ \frac{2e}{m_0} [\Phi(z) + \epsilon_z] \right\}^{1/2}. \quad (32)$$

由此可见,当电子自轴上原点离开阴极后,其轴向速度 \dot{z}^* 迅速增大,斜率 $(r')^*$ 急剧下降;在离阴极不远的某一位置处,轨迹便能处处满足条件

$(r')^2 \ll 1$, 近轴轨迹实际变为傍轴轨迹。在 $z = -\frac{1}{2}R_c$ 处, \dot{r}^* 和 $(r')^*$ 都趋于零。近轴电子的径向

速度 \dot{r}^* 在径向初速 v_{0r} 为正值的情况下满足

$$\frac{v_{0r}}{M} < \dot{r}^* < v_{0r}, \quad (33)$$

式中: M 为线放大率。由此可见, 自光阴极逸出的电子, 其径向初速的变化是极其微小的。

这里再一次强调, 所谓“近轴解”, 是指由近轴轨迹方程或近轴运动方程解得的解。计算结果表明, “近轴解”是足够精确代表所谓的“精确解”或“实际

解”。因此, 自轴上点逸出的近轴电子轨迹与实际电子轨迹几乎完全重合在一起, 是难以区分的。

表 1 给出了 $R_c = -25 \text{ mm}$, $R_a = -5 \text{ mm}$ 的两电极同心球系统在 $\Phi_{ac} = 10000 \text{ V}$ 下以 $\epsilon_0 = 1 \text{ V}$, $\alpha_0 = 90^\circ$ 逸出的实际电子轨迹与近轴电子轨迹的计算结果。由表 1 可见, 实际轨迹与近轴轨迹的解是何等接近, 基本重合在一起, 以致误差难于通过作图表示。

表 1 两电极静电聚焦同心球系统中的实际电子轨迹与近轴电子轨迹

Table 1 Practical electron trajectory and paraxial electron trajectory in electrostatic focusing concentric spherical system composed of two electrodes

Distance from the cathode z / mm	Axial potential distribution Φ / V	Practical trajectory		Paraxial trajectory	
		$r(z) / \text{mm}$	$r'(z)$	$\dot{r}^*(z) / \text{mm}$	$[r'(z)]^*$
4	476.1705	0.3666200	0.0371337	0.3666056	0.0371470
8	1176.4705	0.4665200	0.0154706	0.4664752	0.0154348
12	2307.6923	0.4996921	0.0016205	0.4995984	0.0016013
16	4444.4444	0.4801206	-0.0116827	0.4800000	-0.0116666
20	10000.0000	0.4003198	-0.0300886	0.4000000	-0.0300000

8 实际轨迹交轴位置及其斜率的确定

以上关于轨迹方程的推导是为研究电子光学成像及像差服务的。现确定由轴上点逸出的电子通过阳极后轨迹的性状。由(14)~(17)式不难求得自阴极上原点以初电位 ϵ_0 、初角度 α_0 射出并到达阳极 A 上 D 点的电子轨迹, 由此可以确定电子轨迹在 D 点的切线与矢径 OD 之间夹角 τ 和 D 点的角度坐标 γ 。

假定阳极是对于电子透明的带电的理想网——等电位的栅状电极, 在栅状阳极后面的空间为无场空间。当电子经过带电的等电位理想网时, 假定电子速度的大小和方向都不变, 轨迹的解及其斜率都是连续的。因此, 通过栅状阳极后的电子轨迹将是一条与过 D 点轨迹相切的直线。下面将证明, 对于凹面阴极-阳极系统, 当 $n > 2$ 时, 轨迹是会聚的, 它交于 $\varphi = 0^\circ$ 的轴线于 I_{α_0} 点, 形成阴极面的实像[图 1(a)]。对于 $1 < n \leq 2$ 的凹面阴极-阳极系统或 $n < 1$ 的凸面阴极-阳极系统, 轨迹是发散的, 则切于 D 点的轨迹向后延长线亦交于 I_{α_0} 点, 形成阴极面的虚像[图 1(b)和图 1(c)]。

按照图 1 所给出的三角形 $\triangle ODI_{\alpha_0}$, 不难求得交点 I_{α_0} 位置的表达式为

$$R_{i_{\alpha_0}} = R_a \frac{\sin \tau}{\sin \alpha_i} = R_a \frac{\tan \tau}{\sin \gamma + \tan \tau \cos \gamma}, \quad (34)$$

式中: α_i 表示电子轨迹在交点 I_{α_0} 处与 $\varphi = 0^\circ$ 轴线的交角。

显然, 若令 $\rho = R_a$, 则 $\mu = n, \varphi = \gamma, \zeta = \tau, b = b_1, c = c_0$, 此时(14)~(16)式可写成如下形式:

$$\sin \gamma = -\frac{(n-1)(c_0 + d_0)}{b_1 d_0 + b_0 c_0} \sin \alpha_0, \quad (35)$$

$$\cos \gamma = \frac{b_1 c_0 + b_0 d_0}{b_1 d_0 + b_0 c_0}, \quad (36)$$

$$\tan \tau = \frac{n}{b_1} \sin \alpha_0, \quad (37)$$

其中

$$\begin{cases} b_0 = \cos \alpha_0 \\ c_0 = 1 - 2n(n-1) \frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}} \sin^2 \alpha_0 \\ d_0 = 1 - 2(n-1) \frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}} \sin^2 \alpha_0 \\ b_1 = \left[1 + \frac{\Phi_{ac}}{\epsilon_0} - n^2 \sin^2 \alpha_0 \right]^{1/2} \end{cases}, \quad (38)$$

将(35)~(37)式代入(34)式, 便得到两电极同心球系统中以初角度 α_0 、初电位 ϵ_0 自阴极物点射出的电子轨迹交轴位置的精确表达式:

$$R_{i_{\alpha_0}} = -R_a \frac{n(b_1 d_0 + b_0 c_0)}{b_1(n-1)(c_0 + d_0) - n(b_1 c_0 + b_0 d_0)} \quad (39)$$

同样地, 根据

$$\tan \alpha_i = \tan(\gamma + \tau) = \frac{\tan \gamma + \tan \tau}{1 - \tan \gamma \tan \tau}, \quad (40)$$

不难求得轨迹在 I_{α_0} 处的斜率的精确表达式为

$$\tan \alpha_i =$$

$$\frac{b_1(n-1)(c_0+d_0) - n(b_1c_0 + b_0d_0)}{b_1(b_1c_0 + b_0d_0) + n(n-1)(c_0+d_0)\sin^2\alpha_0} \sin \alpha_0. \quad (41)$$

由(39)、(41)式可见,如果给出系统的结构参量 R_a, R_c 和电参量 Φ_{ac} ,则不难求得电子自阴极面以初条件参量 (ϵ_0, α_0) 射出时电子轨迹的交轴位置

$$R_{i\alpha_0} = -R_a \frac{n}{n-2} \left[1 + \frac{2(n-1)}{n-2} \left(\frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}} \right)^{1/2} \cos \alpha_0 + \frac{2n(n-1)}{(n-2)^2} \frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}} \cos^2 \alpha_0 - \frac{2(n-1)^2}{n-2} \frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}} \sin^2 \alpha_0 \right], \quad (42)$$

$$\tan \alpha_i = -(n-2) \left(\frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}} \right)^{1/2} \sin \alpha_0 \left[1 - \frac{2(n-1)}{n-2} \left(\frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}} \right)^{1/2} \cos \alpha_0 + \frac{3n-2}{2(n-2)} \left(\frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}} \right) \cos^2 \alpha_0 + \frac{(n-1)(n^2-n+2)}{2(n-2)} \left(\frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}} \right) \sin^2 \alpha_0 \right]. \quad (43)$$

由此出发,可以研究静电聚焦同心球系统的电子光学性质及其像差。

9 结束语

研究了两电极静电聚焦同心球系统的逸出电子在极坐标系与圆柱坐标系下的运动轨迹,导出了新的轨迹表示式,它能方便地确定自阴极面逸出的电子轨迹的实际交轴位置及其倾角。导出了该系统在圆柱坐标系下由阴极面原点逸出的实际电子轨迹的解析表示式[(24)式];纠正了一些文献中相关表示式的谬误,证明了若实际轨迹满足近轴条件,其电子轨迹的解可以由近轴轨迹方程求得。给出了两电极静电聚焦同心球系统自阴极面逸出的电子轨迹落点的精确解,这为研究电子光学系统的理想成像与横向像差奠定了基础。

参 考 文 献

- [1] Ruska E. Zur Fokussierbarkeit von Kathodenstrahlbündeln großer Ausgangsquerschnitte [J]. Zeitschrift für Physik, 1933, 83(9): 684-697.
- [2] Schagen P, Bruining H, Francken J C. A simple electrostatic electron-optical system with only one voltage[J]. Philips Research Reports, 1952, 7(2): 119-132.
- [3] Seman O E. Theoretical basis of electron optics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1958.
谢曼. 电子光学理论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1958.

$R_{i\alpha_0}$ 及其斜率 $\tan \alpha_i$ 的精确值。

现简化 $R_{i\alpha_0}$ 和 $\tan \alpha_i$ 的表达式。为此,用二项式定理按 $\left(\frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}}\right)^{1/2}$ 乘幂展开(39)式和(41)式中各项,略去较 1 小得多的 $\left(\frac{\epsilon_0}{\Phi_{ac}}\right)^{3/2}$ 等以上高阶乘幂项,便得到轨迹交轴位置 $R_{i\alpha_0}$ 及其斜率 $\tan \alpha_i$ 的表达式分别为

- [4] Чожу Ли-Вэи. Исследование электростатических фокусирующих систем электронно-оптических преобразователей изображения с шаровой и осевой симметрией[D]. Ленинград: ЛЭТИ, 1966.
周立伟. 球对称与轴对称电子光学变像管静电聚焦系统的研究[D]. 列宁格勒: 列宁格勒电工学院, 1966.

- [5] Чожу Ли-Вэи. Об абберации в электронной оптической системе с шаровой и осевой симметрией [C] // Тезисы докладов XXI Научно-Технической Конференции. Ленинград: ЛЭТИ. 1966: 137-138.
周立伟. 论球对称与轴对称电子光学系统的像差[C] // 纪念波波夫第 21 届科技学术会议报告文集. 列宁格勒: 列宁格勒电工学院. 1966: 137-138.

- [6] Zhou L W. Electron optics with wide beam focusing [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1993.
周立伟. 宽束电子光学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1993.

- [7] Игнатъев А Н, Куликов Ю В. Математическая модель катодной линзы типа сферический конденсатор. Новые методы расчета электронно-оптических систем[J]. М. Наука, 1983: 131-133.
- [8] Ильин В П, Катешов В А, Куликов Ю В, и так далее. Численные методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем [M]. Новосибирск: Издательство, 1987.
- [9] Кельман В М, Сапаргалиев А А, Якушев Е М. Теория катодных линз. II. Электростатическая линза с вращательной симметрией поля [J]. Журнал технической физики, 1973, 43(1): 52-56.