

在光学系统中利用弱值放大模拟搜索算法

刘洧宁¹, 刘军浩¹, 於亚飞^{2*}, 张智明^{1**}¹华南师范大学信息光电子科技学院广东省微纳光子功能材料与器件重点实验室, 广东 广州 510006;²华南师范大学广东省量子调控工程与材料重点实验室, 广东 广州 510006

摘要 提出了一种在光学系统中利用弱值放大和后选择来模拟搜索算法的方案。该方案将数据库编码在入射光束的横向坐标上, 在光束的偏振态上进行预选择与后选择。首先讨论了一般型入射光束并获得一些结果, 然后对高斯型入射光束进行了分析。结果表明通过适当地选择辅助系统的后选择态并且利用弱值放大, 有可能仅用一次迭代就实现对数据库的搜索。

关键词 量子光学; 量子信息处理; 量子搜索算法; 量子计算; 弱值放大

中图分类号 O431.2

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202242.0327020

Simulating Search Algorithm via Weak Value Amplification in Optical System

Liu Weining¹, Liu Junhao¹, Yu Yafei^{2*}, Zhang Zhiming^{1**}

¹Guangdong Provincial Key Laboratory of Nanophotonic Functional Materials and Devices, School of Information and Optoelectronic Science and Engineering, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510006, China;

²Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510006, China

Abstract We propose a new scheme of simulating search algorithm in an optical system via weak value amplification and post-selection. In this scheme, we encode the database on the transverse distribution of the input beam, and then perform pre-selection and post-selection on the polarization state of the input beam. We first discuss a general input beam and obtain some interesting results. Then we analysis a Gaussian input beam. Results show that by choosing the post-selection state of the auxiliary system properly and using the weak value amplification, it is possible that we can achieve a database search in only one iteration.

Key words quantum optics; quantum information processing; quantum search algorithm; quantum computation; weak value amplification

1 引言

量子计算机遵循量子力学原理, 具有量子并行运算能力, 可以加速一些重要的经典算法, 如加速了大数分解的 Shor 算法^[1] 和加速了基于数据库搜索的 Grover 量子搜索算法^[2-3]。其中 Grover 量子搜

索算法已经在核磁共振^[4]、离子阱^[5-6]、腔 QED (quantum electrodynamics)^[7-8] 以及光学系统^[9-10] 等实验平台上得到成功验证。

相较于其他物理系统, 光学系统更易于处理量子计算过程中的纠缠与退相干, 在量子算法的实现中具有一定的优势^[11-13]。目前已有大量的研究讨论

收稿日期: 2021-08-27; 修回日期: 2021-09-26; 录用日期: 2021-10-15

基金项目: 国家自然科学基金(61941501, 61775062, 11574092, 61378012, 91121023)

通信作者: *yuyafei@m.scnu.edu.cn; **zhangzhiming@m.scnu.edu.cn

了如何在光学系统中实现 Grover 量子搜索算法,其中心思想是利用不同的偏振或者空间自由度来表示量子比特^[14-16]。Bhattacharya 等^[9]也在光学系统中模拟了 Grover 量子搜索算法,用实验验证了利用经典光也能像利用量子资源一样高效率地实现对数据库的搜索。他们将数据库编码在入射光束的横向坐标上,使光束在腔中来回反射以模拟 Grover 迭代。该实验利用经典光实现了在有 32 个项的数据库中的迭代搜索。

量子搜索的核心问题是如何尽可能地缩短搜索目标项的时间^[17-19]。Pati^[20]提出了一种能够加速量子算法的模型,该模型利用弱值放大原理^[21-24]和一个可以提供预选择与后选择的辅助量子系统实现了对算法的加速。本文受文献^[20]的启发,提出了一种在光学系统中利用弱值放大来模拟搜索算法的新模型。将数据库编码在入射光束的横向坐标上,通过调节入射光束的参数来实现弱相互作用,分别讨论了当入射光束为一般形式时和入射光束为高斯光束时,输出光束的概率分布。结果表明此方案有可能只需一次迭代就能在输出光束中找到目标项。

2 在光学系统中模拟搜索算法

假设在一个包含 N 个项的数据库中,有一个项被标记,搜索算法的目的是将这个被标记的项找出来。Grover 量子搜索算法可以在 $O(\sqrt{N})$ 次迭代后搜索到这个目标项,该算法的速度是经典搜索算法速度的平方^[2,25]。Bhattacharya 等^[9]在光学系统中利用经典光模拟了 Grover 量子搜索算法。随着迭代的进行,目标项所在位置的光强会产生周期性的变化,并且在理想情况下,经过 $(\pi/4)\sqrt{N}$ 次迭代

后,目标项所在位置的光强达到最大值。在文献^[9]中,为了确保目标项以较高概率被探测到,要求事先已知目标项的个数。另外,在迭代的过程中光束在腔中来回反射,由此造成的损耗以及逐渐积累的衍射效应可能会影响输出结果。因此接下来介绍一种新的方案,该方案有可能只需一次迭代就完成包含 N 个项的数据库的搜索。

如图 1 所示,数据库被编码在入射光束的横向坐标上,入射光场在不同位置的幅度表示数据库中对应项的量子概率幅。同时将光束的偏振自由度作为辅助系统来提供预选择和后选择。使用一个双折射晶体作为一个 oracle 片^[3]来标记目标项。这个 oracle 片上有一条线形凹陷位于位置 x_T (其中 $T=1,2,\dots,N$, N 为数据库中的总项目数),通过改变入射光束在此位置的偏振方向来标记目标项 $|x_T\rangle$ 。因此定义 $N=D/d$,其中 d 是线形凹陷的宽度, D 是入射光束的直径(也就是强度分布曲线的半峰全宽 FWHM)。

在 oracle 片上产生的相互作用可以用哈密顿量表示为

$$\mathbf{H} = \hbar g \mathbf{\Pi} \otimes \mathbf{A}, \quad (1)$$

式中: g 为耦合系数; \hbar 为普朗克常量; $\mathbf{\Pi} = |x_T\rangle\langle x_T|$ 为数据库系统的投影算符; $\mathbf{A} = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|$ 为辅助系统的偏振算符,其中 $|H\rangle$ 和 $|V\rangle$ 分别代表光束的水平偏振态与垂直偏振态。因此相互作用的演化算符可以表示为

$$\mathbf{U} = \exp(-i\varphi \mathbf{\Pi} \otimes \mathbf{A}) = \overline{\mathbf{\Pi}} \otimes \mathbf{I}_A + \mathbf{\Pi} \otimes \exp(-i\varphi \mathbf{A}), \quad (2)$$

式中: $\overline{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{I} - \mathbf{\Pi}$, \mathbf{I} 为数据库系统的单位矩阵, \mathbf{I}_A 为辅助系统的单位矩阵; $\varphi = g \Delta t$, Δt 是相互作用时间。

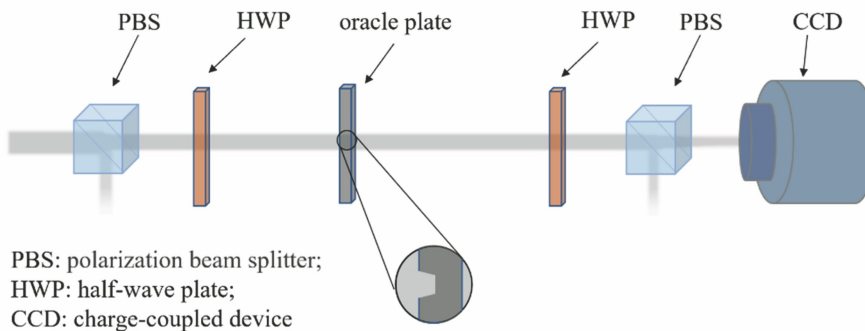


图 1 方案光路图

Fig. 1 Diagram of optical path of proposed scheme

2.1 一般型入射光束

对光束的横向坐标进行离散化处理,每个坐标区间代表数据库中不同的项。当入射光束到达

oracle 片时,光子到达每个区间的概率即每个项在数据库中的概率。因此可将数据库系统的初态表示为

$$|\phi^{(D)}\rangle = \sum_j a_j^{(D)} |x_j\rangle = a_T^{(D)} |x_T\rangle + \sum_{j \neq T} a_j^{(D)} |x_j\rangle, \quad (3)$$

式中: $j = 1, 2, \dots, N$; $|x_j\rangle$ 为数据库中的某一项; $|x_T\rangle$ 为目标项; $a_j^{(D)}$ 为数据库中第 j 个项的初始概率幅, 并且满足 $\sum_j |a_j^{(D)}|^2 = \sum_j P_j^{(D)} = 1$, 其中 $P_j^{(D)}$ 为第 j 个项的初始概率。

入射光束经过第一个偏振分束器(PBS)和第一个半波片(HWP)后, 制备辅助系统的初态为

$$|\psi^{(D)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle). \quad (4)$$

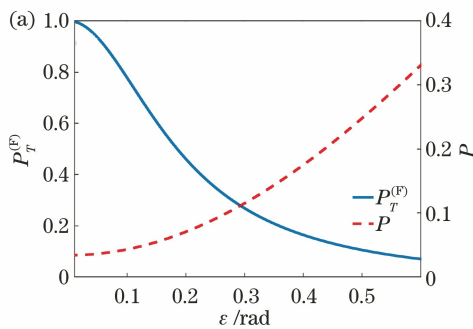
经过相互作用之后, 联合系统态可以被表示为

$$U |\psi^{(D)}\rangle |\phi^{(D)}\rangle = [\mathbf{II} \otimes \exp(-i\varphi\mathbf{A}) + \overline{\mathbf{II}} \otimes \mathbf{I}_A] |\psi^{(D)}\rangle |\phi^{(D)}\rangle. \quad (5)$$

入射光束经过第二个 HWP 和第二个 PBS 制备后选择态为 $|\psi^{(F)}\rangle = \cos(\epsilon + \pi/4)|H\rangle - \sin(\epsilon + \pi/4)|V\rangle$, 其中 ϵ 为后选择角。当后选择成功时, 数据库系统末态可以表示为

$$|\phi^{(F)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{P}} \langle \psi^{(F)} | U | \psi^{(D)} \rangle |\phi^{(D)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{P}} \langle \psi^{(F)} | \psi^{(D)} \rangle \times [\exp(-i\varphi\mathbf{A}) a_T^{(D)} |x_T\rangle + \sum_{j \neq T} a_j^{(D)} |x_j\rangle], \quad (6)$$

式中: $P = |\langle \psi^{(F)} | U | \psi^{(D)} \rangle|^2$ 是后选择成功的概率; $\exp(-i\varphi\mathbf{A}) = \frac{\langle \psi^{(F)} | \exp(-i\varphi\mathbf{A}) | \psi^{(D)} \rangle}{\langle \psi^{(F)} | \psi^{(D)} \rangle} = \cos \varphi - i \sin \varphi A_w$, 其中 $A_w = \frac{\langle \psi^{(F)} | \mathbf{A} | \psi^{(D)} \rangle}{\langle \psi^{(F)} | \psi^{(D)} \rangle} = -\cot \epsilon$ 是 \mathbf{A} 的弱值^[21]。在这里可以将 $\exp(-i\varphi\mathbf{A})$ 看作对目标项 $|x_T\rangle$ 概率幅的放大因子。当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $|\exp(-i\varphi\mathbf{A})|$ 可以取得最大值, 因此在接下来的计算



中令 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 且有 $\exp(-i\varphi\mathbf{A}) = i \cot \epsilon$ 。那么数据库系统的末态可以表示为

$$|\phi^{(F)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{P}} (-\sin \epsilon) [i(\cot \epsilon) a_T |x_T\rangle + \sum_{j \neq T} a_j |x_j\rangle] = \sum_j a_j^{(F)} |x_j\rangle. \quad (7)$$

后选择成功的概率为

$$P = \sin^2 \epsilon (\cot^2 \epsilon |a_T^{(D)}|^2 + \sum_{j \neq T} |a_j^{(D)}|^2) = \cos^2 \epsilon |a_T^{(D)}|^2 + \sin^2 \epsilon (1 - |a_T^{(D)}|^2) = \cos^2 \epsilon P_T^{(D)} + \sin^2 \epsilon (1 - P_T^{(D)}) = \cos(2\epsilon) P_T^{(D)} + \sin^2 \epsilon, \quad (8)$$

式中: $P_T^{(D)} = |a_T^{(D)}|^2$ 是目标项 $|x_T\rangle$ 在数据库系统初态 $|\phi^{(D)}\rangle$ 中可被探测到的概率。那么目标项 $|x_T\rangle$ 在末态 $|\phi^{(F)}\rangle$ 中被探测到的概率为

$$P_T^{(F)} = |\langle x_T | \phi^{(F)} \rangle|^2 = \frac{\cot^2 \epsilon P_T^{(D)}}{(\cot^2 \epsilon - 1) P_T^{(D)} + 1}. \quad (9)$$

从(8)式和(9)式可以发现 P 和 $P_T^{(F)}$ 是 $P_T^{(D)}$ 和 ϵ 的函数。图 2(a)展示了当 $P_T^{(D)}$ 固定时 $P_T^{(F)}$ 和 P 分别随 ϵ 的变化。可以看到随着 ϵ 的减小, $P_T^{(F)}$ 不断增大而 P 不断减小, 这是由于当 ϵ 趋于 0 时, 辅助系统的后选择态 $|\psi^{(F)}\rangle$ 与预选态 $|\psi^{(D)}\rangle$ 趋于正交, 放大因子 $\exp(-i\varphi\mathbf{A})$ 随着 ϵ 的减小而增大。因此可以通过减小 ϵ 来获得更大的 $P_T^{(F)}$, 但同时也要在 $P_T^{(F)}$ 和 P 之间进行权衡。图 2(b)展示了当 ϵ 固定时 $P_T^{(F)}$ 和 P 分别随 $P_T^{(D)}$ 的变化, 可以看到 $P_T^{(F)}$ 和 P 都随着 $P_T^{(D)}$ 的增大而增大。所以当放大因子 $\exp(-i\varphi\mathbf{A})$ 一定的情况下, 目标项初始概率越大, 其在数据库系统末态被探测到的概率也越大。

为了说明此方案对目标项概率的放大效果, 给

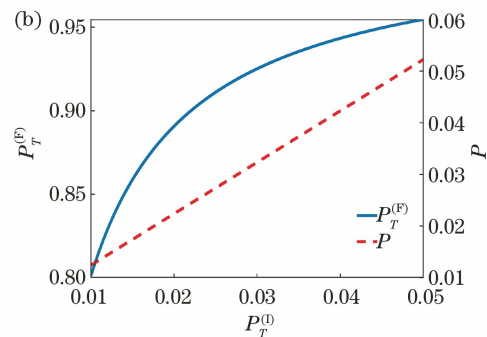


图 2 $P_T^{(F)}$ 和 P 随 ϵ 的变化。(a) 当 $P_T^{(D)} = 0.033$ 时, $P_T^{(F)}$ 和 P 随 ϵ 的变化; (b) 当 $\epsilon = 0.05$ rad 时, $P_T^{(F)}$ 和 P 随 $P_T^{(D)}$ 的变化

Fig. 2 $P_T^{(F)}$ and P as functions of ϵ . (a) $P_T^{(F)}$ and P as functions of ϵ for $P_T^{(D)} = 0.033$;

(b) $P_T^{(F)}$ and P as functions of $P_T^{(D)}$ for $\epsilon = 0.05$ rad

出目标项概率的放大系数:

$$M = \frac{P_T^{(F)}}{P_T^{(D)}} = \frac{\cot^2 \epsilon}{(\cot^2 \epsilon - 1)P_T^{(D)} + 1} \quad (10)$$

图 3(a) 和 (b) 分别展示了放大系数 M 随 ϵ 和

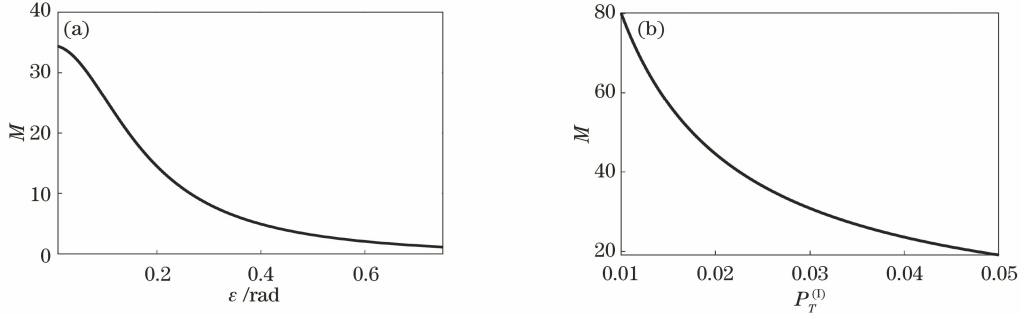


图 3 M 随 ϵ 和 $P_T^{(D)}$ 的变化。(a) 当 $P_T^{(D)}=0.033$ 时, M 随 ϵ 的变化; (b) 当 $\epsilon=0.05$ rad 时, M 随 $P_T^{(D)}$ 的变化

Fig. 3 M as a function of ϵ and $P_T^{(D)}$. (a) M as a function of ϵ for $P_T^{(D)}=0.033$; (b) M as a function of $P_T^{(D)}$ for $\epsilon=0.05$ rad

图 3(b) 的结果显示了当 ϵ 确定时, M 随 $P_T^{(D)}$ 的增大而减小, 这说明当后选择态被选定时, 此方案对不同的目标项有着不同的放大效果。结合图 3 和图 2, 可以得出结论: 为了得到合适的 P 、 $P_T^{(F)}$ 和 M , 需要根据实际情况选择合适的辅助系统后选择态。

2.2 高斯型入射光束

当入射光场的空间模不同时, 数据库中各个项目的初始概率分布也不同。当入射光束为单模高斯态时, 数据库中各项目的初始概率幅 $a_j^{(D)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x_j^2}{4\sigma^2}\right)$, 其中 σ 为高斯光束的方差, 初

$P_T^{(D)}$ 的变化。从图 3(a) 可以看到当 $P_T^{(D)}$ 确定时, M 随 ϵ 的增大而减小, 这表明在辅助系统中选择与预选态 $|\psi^{(D)}\rangle$ 近乎正交的后选择态 $|\psi^{(F)}\rangle$, 可以对目标项的概率产生显著的放大。

始概率为 $P_j^{(D)} = |a_j^{(D)}|^2$, 并且通过(7)式可得最终概率为 $P_j^{(F)} = |a_j^{(F)}|^2$ 。模拟结果如图 4 所示。图 4 (b)~(d) 分别模拟了当选取的后选择角 ϵ 不同时, 的最终概率分布。为了便于比较, 模拟了 $P_9^{(D)}$, 如图 4 (a) 所示。选用的高斯光束方差 $\sigma=560 \mu\text{m}$, oracle 宽度为 $42 \mu\text{m}$, 这对应数据库项目的个数 $N=32$ 。理论上, oracle 线可以位于入射高斯光束横向坐标的任意位置 x_j , 这里令目标项的位置 $x_T=x_9$, 计算可得目标项 $|x_9\rangle$ 的初始概率 $P_9^{(D)} = |a_9^{(D)}|^2 = 0.033$ 。

从图 4(b)~(d) 可以看到, $P_9^{(F)}$ 随着 ϵ 的减小

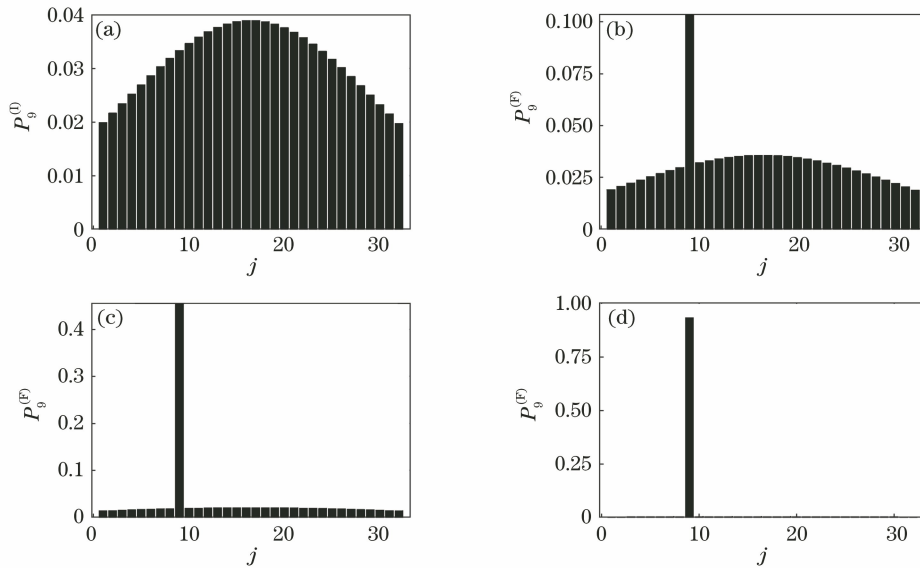


图 4 初始概率 $P_9^{(D)}$ 和最终概率 $P_9^{(F)}$ 的模拟结果。(a) 初始概率 $P_9^{(D)}$ 的模拟结果;

(b) $\epsilon=0.5$ rad、(c) $\epsilon=0.2$ rad 和 (d) $\epsilon=0.05$ rad 时的最终概率 $P_9^{(F)}$ 模拟结果

Fig. 4 Simulated results of initial probability $P_9^{(D)}$ and final probability $P_9^{(F)}$. (a) Simulation result of initial probability $P_9^{(D)}$; simulation results of final probability $P_9^{(F)}$ for (b) $\epsilon=0.5$ rad, (c) $\epsilon=0.2$ rad, and (d) $\epsilon=0.05$ rad

而快速增大,这与图 2(a)所示的一般情况的变化一致。在图 4(d)中可以看到,当 $\epsilon = 0.05$ rad 时 $P_9^{(F)} = 0.93$,这表明通过适当地选择辅助系统的后选择态且后选择成功后,就能以很大的概率在输出光束中找到目标项。

3 结 论

提出了一种在光学系统中利用弱值放大和后选择来模拟搜索算法的新方案。在可以执行预选择和后选择的辅助系统的帮助下,有可能仅用一次迭代就可以找到目标项。文献[9]中已经通过实验验证了在光学系统中模拟量子搜索算法的可行性,与之相比,本文使用实验上较易实现的方案,即光学偏振态的预选择与后选择^[26-27],来替代原方案中的迭代部分。与没有弱值放大的方案相比,本文方案有效地缩短了搜索时间并减小了多次迭代所引起的损耗。

参 考 文 献

- [1] Shor P W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer[J]. *SIAM Journal on Computing*, 1997, 26(5): 1484-1509.
- [2] Grover L K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack [J]. *Physical Review Letters*, 1997, 79(2): 325-328.
- [3] Grover L K. Quantum computers can search arbitrarily large databases by a single query [J]. *Physical Review Letters*, 1997, 79(23): 4709-4712.
- [4] Xiao L, Jones J A. Error tolerance in an NMR implementation of Grover's fixed-point quantum search algorithm [J]. *Physical Review A*, 2005, 72(3): 032326.
- [5] Mang F. Grover search with pairs of trapped ions [J]. *Physical Review A*, 2001, 63(5): 052308.
- [6] Jiang X X. Scheme for implementing Grover quantum search algorithm with hot ions [J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2013, 52(10): 3457-3461.
- [7] Deng Z J, Feng M, Gao K L. Simple scheme for the two-qubit Grover search in cavity QED [J]. *Physical Review A*, 2005, 72(3): 034306.
- [8] Yang W L, Chen C Y, Feng M. Implementation of three-qubit Grover search in cavity quantum electrodynamics [J]. *Physical Review A*, 2007, 76(5): 054301.
- [9] Bhattacharya N, van den Heuvel H B V, Spreeuw R C J. Implementation of quantum search algorithm using classical Fourier optics [J]. *Physical Review Letters*, 2002, 88(13): 137901.
- [10] Hijmans T W, Huussen T N, Spreeuw R J. Time- and frequency-domain solutions in an optical analogue of Grover's search algorithm [J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2007, 24(2): 214-220.
- [11] Konrad T, Forbes A. Quantum mechanics and classical light [J]. *Contemporary Physics*, 2019, 60(1): 1-22.
- [12] Chen X F, Zheng Y L, Liu H G, et al. New principle, platform, and application of nonlinear frequency conversion [J]. *Acta Optica Sinica*, 2021, 41(1): 0119001.
陈险峰, 郑远林, 刘海港, 等. 非线性频率转换新原理新平台与新应用研究 [J]. *光学学报*, 2021, 41(1): 0119001.
- [13] Li B H, Xia Z G, Xiang X, et al. Experimental method for fast measuring the phase-matched wavelengths of entangled photons by wavelength-to-time mapping [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2021, 48(3): 0312001.
李百宏, 夏志广, 项晓, 等. 基于波长到时间映射快速测量纠缠光子相位匹配波长的实验方法 [J]. *中国激光*, 2021, 48(3): 0312001.
- [14] Cerf N J, Adami C, Kwiat P G. Optical simulation of quantum logic [J]. *Physical Review A*, 1998, 57(3): R1477-R1480.
- [15] Dodd J L, Ralph T C, Milburn G J. Experimental requirements for Grover's algorithm in optical quantum computation [J]. *Physical Review A*, 2003, 68(4): 042328.
- [16] Kwiat P G, Mitchell J R, Schwandt P D D, et al. Grover's search algorithm: an optical approach [J]. *Journal of Modern Optics*, 2000, 47(2/3): 257-266.
- [17] Chen Q M, Wu R B, Zhang T M, et al. Near-time-optimal control for quantum systems [J]. *Physical Review A*, 2015, 92(6): 063415.
- [18] Hirose M, Cappellaro P. Time-optimal control with finite bandwidth [J]. *Quantum Information Processing*, 2018, 17(4): 1-17.
- [19] Gassner S, Cafaro C, Capozziello S. Transition probabilities in generalized quantum search Hamiltonian evolutions [J]. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2020, 17(1): 2050006.
- [20] Pati A K. Super quantum search algorithm with weak value amplification and postselection [EB/OL]. (2019-10-25) [2021-08-20]. <https://arxiv.org/abs/1910.12390>.
- [21] Aharonov Y, Albert D Z, Vaidman L. How the

- result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100 [J]. Physical Review Letters, 1988, 60(14): 1351-1354.
- [22] Kunjwal R, Lostaglio M, Pusey M F. Anomalous weak values and contextuality: robustness, tightness, and imaginary parts [J]. Physical Review A, 2019, 100(4): 042116.
- [23] Xu L, Zhang L J. Progress in weak-value-based quantum metrology and tomography [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(10): 1011004. 胥亮, 张利剑. 基于弱值的量子精密测量与量子层析研究进展 [J]. 激光与光电子学进展, 2021, 58(10): 1011004.
- [24] Xu X Y, Kedem Y, Sun K, et al. Phase estimation with weak measurement using a white light source [J]. Physical Review Letters, 2013, 111 (3): 033604.
- [25] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum search algorithms [M] // Quantum computation and quantum information. Cambridge: Cambridge University Press, 2010: 248-276.
- [26] Qiu X D, Xie L G, Liu X, et al. Precision phase estimation based on weak-value amplification [J]. Applied Physics Letters, 2017, 110(7): 071105.
- [27] Zhang Z H, Chen G, Xu X Y, et al. Ultrasensitive biased weak measurement for longitudinal phase estimation [J]. Physical Review A, 2016, 94 (5): 053843.