

## 集体测量估计量子相干性的性能研究

袁媛<sup>1,2,3</sup>, 钮月萍<sup>1</sup>, 龚尚庆<sup>1</sup>, 项国勇<sup>2,3\*</sup><sup>1</sup>华东理工大学物理学院, 上海 200237;<sup>2</sup>中国科学技术大学量子信息重点实验室, 安徽 合肥 230026;<sup>3</sup>中国科学技术大学量子信息与量子科技前沿协同创新中心, 安徽 合肥 230026

**摘要** 量子相干性作为资源理论提出后,对它的量化和实验测量的研究一直受到大家广泛的关注。目前已有研究证明集体测量可以提高相干性的测量精度,但在具体实验中实验条件对集体测量估计量子相干性的性能影响还尚不清晰。分别数值模拟了在不同探测效率和资源数条件下集体测量估计相干性的误差,并与其他方法进行了比较。分析发现存在一定参数范围使集体测量的方法在探测效率为 60% 的情况下比探测效率为 90% 的态层析的方法更优;此外,随着资源数的增多,集体测量的性能几乎不依赖于量子态和相干性的度量方式,误差均以相同尺度在减小。

**关键词** 量子光学;量子信息与处理;相干性;光子统计;集体测量;分离测量

中图分类号 O436

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202242.0327014

## Performance of Collective Measurement to Estimate Quantum Coherence

Yuan Yuan<sup>1,2,3</sup>, Niu Yueping<sup>1</sup>, Gong Shangqing<sup>1</sup>, Xiang Guoyong<sup>2,3\*</sup><sup>1</sup>School of Physics, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China;<sup>2</sup>Key Laboratory of Quantum Information, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China;<sup>3</sup>Synergetic Innovation Center of Quantum Information & Quantum Physics, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China

**Abstract** Since quantum coherence was proposed as a resource theory, the research on its quantification and experimental measurement has always attracted widespread attention. At present, studies have proved that collective measurement can improve the measurement accuracy of coherence, but in experiments, the impact of experimental conditions on the performance of collective measurement to estimate quantum coherence is still unclear. In this paper, we numerically simulate the error of collective measurement to estimate coherence under different detection efficiency and resource number, and we compare them with the errors caused by other methods. We also notice that there exists a parameter range where collective measurement method with the detection efficiency of 60% outperforms the tomography method with the detection efficiency of 90%. In addition, with the increase of the number of resources, the performance of collective measurement is almost independent of the quantum state and coherence measure, and the errors are decreasing at the same scale.

**Key words** quantum optics; quantum information and processing; coherence; photon statistics; collective measurement; individual measurement

收稿日期: 2021-09-01; 修回日期: 2021-12-12; 录用日期: 2021-12-20

基金项目: 国家自然科学基金(12004113,11774089,11774334,12034007)

通信作者: \*gyxiang@ustc.edu.cn

# 1 引言

量子相干性是量子体系的一个基本特性,描述了量子态的叠加性。量子相干性自从在资源理论框架下被提出后,就引起了大家的广泛关注,也被广泛应用到量子技术中。在量子热力学方面,研究人员研究了相干性在量子制冷机和热机中的作用<sup>[1-2]</sup>,以及量子相干在量子热力学中的演化规律<sup>[3]</sup>;在量子算法方面,研究人员分析了量子算法的精度和成功概率与量子态相干性的紧密关联性<sup>[4-5]</sup>;在量子信道鉴别中,研究人员使用相干态与非相干态进行识别,得到其成功概率的提高与探针态的相干性鲁棒性有直接关系的结论<sup>[6-7]</sup>;在量子计算<sup>[5]</sup>、量子密钥分发<sup>[8]</sup>、量子度量学<sup>[9-11]</sup>等方面,量子相干性都得到研究与应用。量子相干性作为一种资源,与其他量子资源也密切相关,如不对称性<sup>[12-13]</sup>、通过探测相干性来目击多体纠缠<sup>[14]</sup>,以及其他量子关联<sup>[15]</sup>;相干性的操作以及在两体和多体系统中相干性与量子关联的转化在理论上<sup>[16-20]</sup>和实验上<sup>[21-23]</sup>都被广泛研究。此外,量子相干性作为量子体系的重要特性,在其他领域也有应用<sup>[24]</sup>,如在生物系统<sup>[25-27]</sup>、纳米物理<sup>[28]</sup>、传输理论<sup>[29-30]</sup>,以及波粒二象性的研究<sup>[31-33]</sup>中扮演了重要的角色。

随着量子相干性广泛的研究以及各种量化方式被提出<sup>[24,34]</sup>,如何在实验上估计相干性引起了大家的广泛关注。目前最常使用的方法就是量子态层析<sup>[35]</sup>,该方法通过测量和算法重构得到量子态的密度矩阵,再代入相干性度量的数学表达式进行计算。这种方法虽然有效,但相干性度量不一定与这个量子态的全部信息有关,因此量子态层析的方法会包含冗余信息,并不是很高效。事实上,还有一些估计未知量子态相干性的方法和策略相继被提出<sup>[36-40]</sup>,比如:实验上利用干涉条纹的方法来测量相干性以及搜索相干性最优目击算符<sup>[37]</sup>,利用测量的少量实验数据并通过数学优化算法估计目标态的相干性<sup>[38]</sup>。但这些方法都需要繁杂的数学优化算法或实验上反馈搜索的步骤。为了更高效地估计量子相干性,Yuan 等<sup>[41]</sup>提出了集体测量方法<sup>[41]</sup>,从实验上演示了用该方法估计单比特态  $l_1$  norm 和相对熵度量的相干性,证明了不需要任何搜索反馈或优化算法、仅通过单次测量就可以得到相干性的值;在量子态一定的参数范围内,集体测量方法比其他可选择的测量单比特态相干性的方法的测量精度都高。然而,考虑实际情况,实验条件及装置总有不完美

性,如不完美的探测器、有限的资源样本数,这些因素对测量相干性方法所带来的误差影响有多大还尚未被讨论。本文主要研究集体测量的方法在估计量子相干性中的性能,讨论探测效率及资源数对集体测量量子相干性的误差影响,并与其他方法进行比较。

## 2 理论模拟

### 2.1 探测效率对集体测量量子相干性的误差影响

一般测量是作用在分离的量子系统上,对分离系统一个接一个进行测量,这是常用的分离测量,也可以选择完全相同的量子系统上进行集体测量,这些完全相同的体系之间不存在经典关联或者量子纠缠,集体测量仅对它们的整体作用进行测量。集体测量是非局域测量,可以获取更多信息,测量精度更高<sup>[42-43]</sup>。如果采用由最大纠缠态测量基构成的集体测量作用在两个单比特拷贝  $\rho \otimes \rho$  ( $\rho$  为量子矩阵,即量子态)上,就可以估计出单比特在任意相干性度量下的值<sup>[41]</sup>。相干性的度量方式有很多种类型,这里主要考虑常用的两种相干性度量方式: $l_1$  norm 相干性  $C_{l_1}$  和相对熵相干性  $C_r$ 。对于任意的量子态,以上两种相干性度量分别定义为<sup>[44]</sup>

$$C_{l_1}(\rho) = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}|, \quad (1)$$

$$C_r(\rho) = S(\rho_{\text{diag}}) - S(\rho), \quad (2)$$

式中: $\rho_{ij}$  表示量子矩阵  $\rho$  的元素; $S(\rho) = -\text{Tr}[\rho \log_2 |\rho|]$  代表冯诺依曼熵,其中  $\text{Tr}$  是求迹函数。相干性的参考基矢为  $\{|i\rangle\}$ ,因此  $\rho_{\text{diag}} = \sum_i |i\rangle\langle i| \rho |i\rangle\langle i|$ 。

首先考虑单比特情形,任意的一个单比特态可以用 Bloch 矢量  $r = (r_x, r_y, r_z)$  来表示为  $\rho = (\mathbf{I} + r \cdot \boldsymbol{\sigma})/2$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  为泡利矩阵,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,因此(1)和(2)式<sup>[45]</sup>可以写成

$$C_{l_1}(\rho) = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}, \quad (3)$$

$$C_r(\rho) = h\left(\frac{1+|r_z|}{2}\right) - h\left(\frac{1+r}{2}\right), \quad (4)$$

式中: $h$  为二元熵,  $h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$ ; Bloch 矢量的长度为  $r = (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{1/2}$ 。由最大纠缠态测量基构成的一组集体测量  $\{M_i\}$  作用在两个单比特拷贝  $\rho \otimes \rho$  上,每个测量输出的概率可以表示为  $P_i = \text{Tr}[M_i \rho \otimes \rho]$ ,  $M_i$  是由 4 个最大纠缠态  $|\psi^\pm\rangle = (|01\rangle \pm |10\rangle)/\sqrt{2}$  和  $|\varphi^\pm\rangle = (|00\rangle \pm |11\rangle)/\sqrt{2}$  构成的投影测量,记为  $M_1 = |\psi^+\rangle\langle\psi^+|$ ,  $M_2 = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|$ ,  $M_3 = |\varphi^+\rangle\langle\varphi^+|$ ,

$M_4 = |\varphi^-\rangle\langle\varphi^-|$ 。通过简单地计算,可得输出概率  $P_i$  和 Bloch 矢量元素满足

$$\begin{cases} r_x^2 + r_y^2 = 2(P_1 - P_2) \\ |r_z| = \sqrt{2(P_3 + P_4) - 1} \\ r = \sqrt{1 - 4P_2} \end{cases} \quad (5)$$

因此通过集体测量输出的概率分布并结合(3)、(4)和(5)式,即可估计出单比特态  $l_1$  norm 相干性和相对熵相干性。该方法在实际操作中只需利用单次测量得到的概率分布,即可估计出相干性的值,并且文献[41]中已通过实验验证了该方法与其他可选择的策略方法相比可以提高测量精度。

在光子实验体系中,探测器效率对测量相干性方法所带来的误差影响有多大还尚未被讨论,接下来主要模拟探测器效率为 90% 和 60% 时的集体测量方法所产生的误差,并与其他几种分离测量的方法作比较。除了上述集体测量的方法,估计单比特  $l_1$  norm 相干性的方法还有可选择的分离测量的方法。方法一通过测量泡利矩阵  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$ , 得到  $r_x$  和  $r_y$  的值,再代入(3)式得到相干性  $C_{l_1}$  的值。方法二采用两步自适应测量策略:1) 通过测量  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$ , 得到  $r_x$  和  $r_y$  的值;2) 利用步骤 1) 反馈的结果选择最优的可观测量  $r_x\sigma_x + r_y\sigma_y$ , 得到  $r_x^2 + r_y^2$ , 再代入(3)式得到相干性  $C_{l_1}$  的值。方法三为量子态层析的方法,通过在可观测量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  的基矢下进行测量,重构出密度矩阵,再代入相干性表达式进行计算。基于采用态层析的方法得到的密度矩阵也可以计算出相对熵下的相干性  $C_r$ , 并与用集体测量得到的相对熵下的相干性的结果进行对比。为了分析探测效率对每种方法测量精度的影响,定义估计误差  $\epsilon$  为评价指标,即  $\epsilon = |C_{\text{est}} - C|$ , 其中  $C_{\text{est}}$  是相干性估计

值,  $C$  是理想值。

### 2.1.1 单比特的模拟结果

在数值模拟中,选择以下单比特态:

$$|\eta\rangle = \sin\theta |0\rangle + \cos\theta |1\rangle, \quad (6)$$

式中:  $\theta \in [0, \pi/2]$ , 每隔  $5^\circ$  取一个值。在使用相同资源数时对比误差精度才是公平合理的,因此在将集体测量方法与其他估计相干性方法进行比较时,选择态  $|\eta\rangle$  的拷贝数目  $N = 1200$ , 探测效率分别设为 90% 和 60%。在 MATLAB 软件中利用蒙特卡罗方法模拟各个方法的误差,用命令 `mnrnd` 产生的满足样本数和服从测量概率分布的随机数来代表实际光路中探测到的光子数,然后按照文中所述的方法进行计算,每给定一个量子态,估计相干性的模拟过程重复  $T = 1000$  次,然后将 1000 次模拟得到的误差进行平均。不同探测效率对  $l_1$  norm 相干性  $C_{l_1}$  估计误差影响的模拟结果如图 1(a)~(c) 所示,不同探测效率对相对熵相干性  $C_r$  估计误差影响的模拟结果如图 1(d) 所示。图中标注的“Tomo”代表态层析的方法;“ $\sigma_x, \sigma_y$ ”代表直接测量  $\sigma_x, \sigma_y$  的方法;“adaptive”代表自适应的方法;“CMS”代表集体测量的方法;每种方法的后缀 90% 和 60% 分别代表探测效率;“difference”代表不同探测效率下的误差差值。

### 2.1.2 高维量子态的模拟结果

集体测量同样也可以估计高维体系量子态的  $l_1$  norm 相干性,接下来模拟探测效率对高维体系相干性估计误差的影响。为简便起见,选择以下 qutrit 态:

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha |0\rangle + \cos\alpha |1\rangle + |2\rangle), \quad (7)$$

式中:  $\alpha \in [0, \pi/2]$ , 每隔  $5^\circ$  取一个值。根据集体测量估计高维体系相干性的公式<sup>[41]</sup>为

$$C_{l_1}(\rho) = 2 \sum_{j>i} \sqrt{[\text{Tr}(\rho^{\otimes 2} |\psi_{ij}^+\rangle\langle\psi_{ij}^+|) - \text{Tr}(\rho^{\otimes 2} |\psi_{ij}^-\rangle\langle\psi_{ij}^-|)]/2}, \quad (8)$$

式中:  $|\psi_{ij}^\pm\rangle$  为测量基,  $|\psi_{ij}^\pm\rangle = (|ij\rangle \pm |ji\rangle)/\sqrt{2}$ ,  $i$  和  $j$  分别取 0, 1, 2;  $\rho = |\xi\rangle\langle\xi|$ , 用于估计该三维量子态的相干性的值。详细地说,就是利用测量基  $|\psi_{01}^\pm\rangle = (|01\rangle \pm |10\rangle)/\sqrt{2}$ 、 $|\psi_{02}^\pm\rangle = (|02\rangle \pm |20\rangle)/\sqrt{2}$  和  $|\psi_{12}^\pm\rangle = (|12\rangle \pm |21\rangle)/\sqrt{2}$  作用在  $\rho \otimes \rho$  上,估计出 qutrit 密度矩阵的非对角元素的绝对值,即  $|\rho_{01}|$ 、 $|\rho_{02}|$  和  $|\rho_{12}|$ 。最后根据  $l_1$  norm 相干性的表达式得到  $C_{l_1}(\rho) = 2(|\rho_{01}| + |\rho_{02}| +$

$|\rho_{12}|)$ 。为了体现集体测量的性能,将其与三维量子态层析的方法进行对比,与之前讨论单比特态相干性一样,这两种方法测量所消耗的态  $|\xi\rangle$  拷贝数目都是  $N = 1200$ , 探测效率分别设为 90% 和 60%。每次  $\alpha$  遍历一个值,这个量子态估计相干性的模拟过程重复 1000 次,然后取误差的平均值。不同的探测效率对两种方法的估计误差影响如图 2 所示。

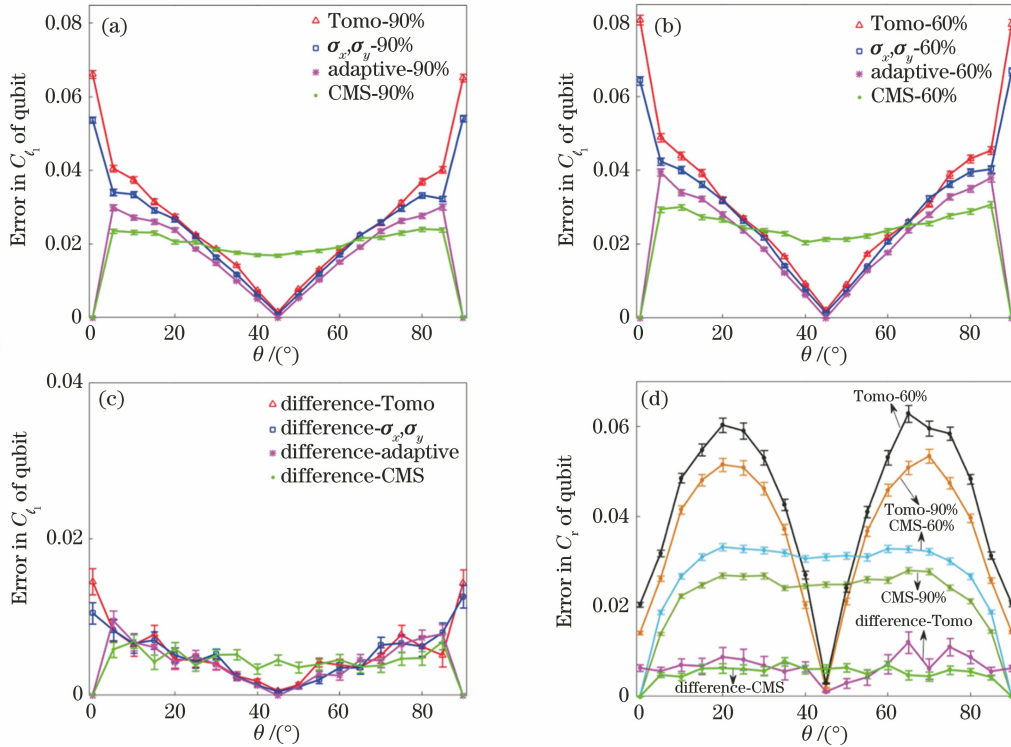


图 1 探测效率对单比特相干性估计误差影响的模拟结果。(a)探测效率为 90% 的  $l_1$  norm 相干性估计误差;(b)探测效率为 60% 的  $l_1$  norm 相干性估计误差;(c)不同探测效率下各个方法估计  $l_1$  norm 相干性的误差差值;(d)探测效率对相对熵相干性估计误差的影响

Fig. 1 Simulation results of effect of detection efficiency on coherence estimation error of qubit. (a) Error in  $l_1$  norm coherence estimation with detection efficiency of 90%; (b) error in  $l_1$  norm coherence estimation with detection efficiency of 60%; (c) difference of  $l_1$  norm coherence estimation error for different detection efficiency; (d) effect of detection efficiency on relative entropy coherence estimation error

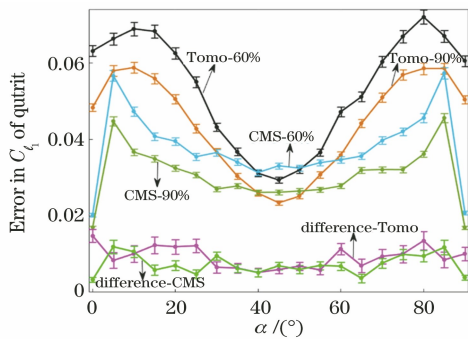


图 2 探测效率对 qutrit 相干性估计误差影响的模拟结果  
Fig. 2 Simulation results of effect of detection efficiency on coherence estimation error of qutrit

## 2.2 资源数对集体测量估计量子相干性的误差影响

在光子体系中,除了上述讨论的探测效率的影响外,测量所消耗的资源数即消耗的光子数必然也会影响估计误差。本节数值模拟了由资源数引起的估计相干性误差的变化。给定一个量子态,模拟集体测量以及其他方法估计误差随消耗资源数(态拷贝数目) $N$  的增加发生的变化。为了定量地描述资

源数对不同测量方法引起的误差变化趋势,将数值模拟的数据用  $\epsilon = \beta N^{-p}$  进行拟合,取对数坐标,拟合图线的斜率就是  $p$  的值,这样就可以得到误差的变化。针对单比特态进行数值模拟的结果如图 3 所示。

同样地,模拟了 qutrit 态的情况下  $\alpha = 60^\circ$  时,随着  $N$  的增大,集体测量估计的  $l_1$  norm 相干性误差的变化趋势,并与 qutrit 态层析的方法进行对比,模拟结果如图 4 所示。

## 3 分析与讨论

探测效率对几种估计相干性方法的测量精度的影响由图 1 和图 2 所示,图 1 展示了不同探测效率对单比特态相干性估计的误差影响,针对每个数据点重复模拟 1000 次,然后对 1000 次模拟得到的估计误差进行平均,得到  $\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \epsilon_i$ ,  $\epsilon_i$  是第  $i$  次模拟的误差,图 1 中的误差棒代表  $\epsilon_i$  的标准偏差。从图 1 (a)和(b)中可以看到,当探测效率从 90% 降为 60%

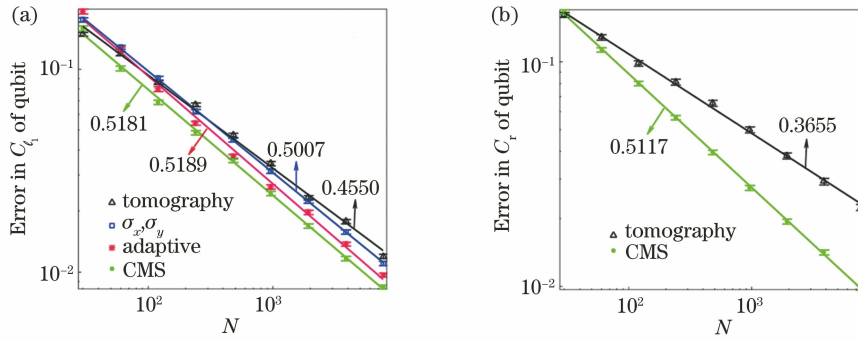


图 3 不同方法估计的单比特相干性的误差随资源数变化的模拟结果。(a)  $\theta=15^\circ$  的单比特态  $l_1$  norm 相干性的估计误差;(b)  $\theta=30^\circ$  的单比特态相对熵相干性的估计误差

Fig. 3 Simulation results of coherence estimation error varying with resource number obtained by different measurement schemes. (a) Estimation error of  $l_1$  norm coherence of qubit state with  $\theta=15^\circ$ ; (b) estimation error of relative entropy coherence of qubit state with  $\theta=30^\circ$

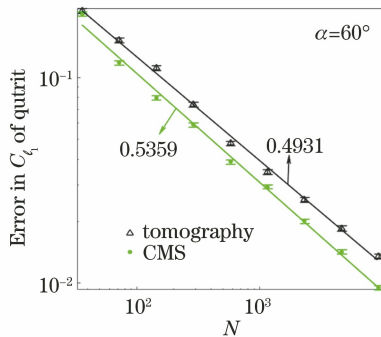


图 4 资源数的变化对 qutrit  $l_1$  norm 相干性估计误差影响的模拟结果

Fig. 4 Simulation results of effect of change in resource number on  $l_1$  norm coherence estimation error of qutrit

时,每种测量方法的估计误差都是一起增大的,并且每种方法由不同探测效率引起的误差差值几乎是相同的,如图 1(c)所示。这说明在实验中,探测效率对每种方法的误差影响是一致的。此外, $l_1$  norm 相干性的估计误差和相对熵相干性的估计误差都表征了量子态的  $\theta$  在一定的参数范围内,集体测量方法在探测效率为 60% 时的估计误差小于态层析方法在探测效率为 90% 时的估计误差,这一点在相对熵相干性的估计误差图[图 1(d)]中很容易看到。另外,在图 2 展示的不同探测效率下 qutrit 态  $l_1$  norm 相干性的估计误差中,依然可以看到探测效率对集体测量方法和态层析方法的误差影响效果是一样的。对于一些参数范围内的量子态,集体测量方法在探测效率为 60% 的情况下依然比探测效率为 90% 的态层析的方法误差更小,表现更优。

每种方法在测量时所消耗的资源数对误差的影响见图 3 和图 4,误差变化的斜率都在图中已标出。从图 3(a)和(b)可以看出不管量子态取  $\theta=15^\circ$  还是

$\theta=30^\circ$ ,随着  $N$  的增大,集体测量方法得到的估计  $l_1$  norm 相干性误差和相对熵相干性误差减小得更快,且斜率近似都为 0.5。这说明集体测量方法的性能几乎不依赖于量子态和相干性的度量方式,误差变化尺度都约为  $O(1/\sqrt{N})$ 。相反地,态层析的方法估计相干性的误差对量子态以及相干性度量方式比较敏感,在估计单比特  $l_1$  norm 相干性时误差斜率为 0.45,估计相对熵相干性时误差斜率为 0.36,而在图 4 中态层析的方法估计 qutrit  $l_1$  norm 相干性时的误差变化尺度与集体测量又是一样的,近似为  $O(1/\sqrt{N})$ 。

## 4 结 论

详细模拟了在不同探测效率和资源数情况下集体测量法估计量子相干性的表现性能,并将模拟结果与其他方法的结果进行比较。根据模拟结果,发现探测效率对集体测量和量子态层析等其他几种估计相干性方法的误差影响效果是一样的。随着探测效率的变化,误差几乎是同幅度减小或者增大。此外,在一定参数范围内,集体测量方法在探测效率为 60% 的情况下比探测效率为 90% 时的态层析方法的误差更小。随着资源数  $N$  的增大,集体测量的性能几乎不依赖于量子态和相干性的度量方式,误差近似地均以 0.5 的斜率在减小,误差变化为  $O(1/\sqrt{N})$ 。这些结果显示了集体测量法估计量子相干性的新性能及优势,并且这些模拟分析是在考虑实验中不完美的情况下展开的,因此该结果对实验上估计量子相干性具有指导借鉴意义。

## 参 考 文 献

- [1] Rahav S, Harbola U, Mukamel S. Heat fluctuations

- and coherences in a quantum heat engine[J]. *Physical Review A*, 2012, 86(4): 043843.
- [2] Scully M O, Chapin K R, Dorfman K E, et al. Quantum heat engine power can be increased by noise-induced coherence [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2011, 108(37): 15097-15100.
- [3] Ding F, Ding Y Q, Han S, et al. Coherence evolution in quantum thermodynamics [J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2021, 48(12): 1212003.  
丁峰, 丁玉强, 韩森, 等. 量子相干在量子热力学中演化规律的研究 [J]. *中国激光*, 2021, 48(12): 1212003.
- [4] Anand N, Pati A K. Coherence and entanglement monogamy in the discrete analogue of analog Grover search [EB/OL]. (2016-11-14) [2021-05-06]. <https://arxiv.org/abs/1611.04542>.
- [5] Matera J M, Egloff D, Killoran N, et al. Coherent control of quantum systems as a resource theory [J]. *Quantum Science and Technology*, 2016, 1(1): 01LT01.
- [6] Napoli C, Bromley T R, Cianciaruso M, et al. Robustness of coherence: an operational and observable measure of quantum coherence [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(15): 150502.
- [7] Piani M, Cianciaruso M, Bromley T R, et al. Robustness of asymmetry and coherence of quantum states [J]. *Physical Review A*, 2016, 93(4): 042107.
- [8] Gisin N, Ribordy G, Tittel W, et al. Quantum cryptography [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2002, 74(1): 145.
- [9] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Quantum-enhanced measurements: beating the standard quantum limit [J]. *Science*, 2004, 306(5700): 1330-1336.
- [10] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Advances in quantum metrology [J]. *Nature Photonics*, 2011, 5(4): 222-229.
- [11] Giorda P, Allegra M. Coherence in quantum estimation [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2018, 51(2): 025302.
- [12] Marvian I, Spekkens R W. How to quantify coherence: distinguishing speakable and unspeakable notions [J]. *Physical Review A*, 2016, 94(5): 052324.
- [13] Gour G, Spekkens R W. The resource theory of quantum reference frames: manipulations and monotones [J]. *New Journal of Physics*, 2008, 10(3): 033023.
- [14] Girolami D, Yadin B. Witnessing multipartite entanglement by detecting asymmetry [J]. *Entropy*, 2017, 19(3): 124.
- [15] Tan K C, Kwon H, Park C Y, et al. Unified view of quantum correlations and quantum coherence [J]. *Physical Review A*, 2016, 94(2): 022329.
- [16] Ma J J, Yadin B, Girolami D, et al. Converting coherence to quantum correlations [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(16): 160407.
- [17] Chitambar E, Streltsov A, Rana S, et al. Assisted distillation of quantum coherence [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(7): 070402.
- [18] Streltsov A, Rana S, Bera M N, et al. Towards resource theory of coherence in distributed scenarios [J]. *Physical Review X*, 2017, 7: 011024.
- [19] Streltsov A, Chitambar E, Rana S, et al. Entanglement and coherence in quantum state merging [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(24): 240405.
- [20] Gao D Y, Li N. Dynamics and conservation of quantum coherence in a two-body system [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2021, 38(4): 444-453.  
高德营, 李宁. 两体系统量子相干性的动力学和守恒 [J]. *量子电子学报*, 2021, 38(4): 444-453.
- [21] Wu K D, Hou Z B, Zhong H S, et al. Experimentally obtaining maximal coherence via assisted distillation process [J]. *Optica*, 2017, 4(4): 454-459.
- [22] Wu K D, Hou Z B, Zhao Y Y, et al. Experimental cyclic interconversion between coherence and quantum correlations [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(5): 050401.
- [23] Wu K D, Theurer T, Xiang G Y, et al. Quantum coherence and state conversion: theory and experiment [J]. *Npj Quantum Information*, 2020, 6: 22.
- [24] Streltsov A, Adesso G, Plenio M B. Colloquium: quantum coherence as a resource [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2017, 89(4): 041003.
- [25] Plenio M B, Huelga S F. Dephasing-assisted transport: quantum networks and biomolecules [J]. *New Journal of Physics*, 2008, 10(11): 113019.
- [26] Lambert N, Chen Y N, Cheng Y C, et al. Quantum biology [J]. *Nature Physics*, 2013, 9(1): 10-18.
- [27] Romero E, Augulis R, Novoderezhkin V I, et al. Quantum coherence in photosynthesis for efficient solar-energy conversion [J]. *Nature Physics*, 2014, 10(9): 676-682.
- [28] Karlström O, Linke H, Karlström G, et al. Increasing thermoelectric performance using coherent transport [J]. *Physical Review B*, 2011, 84(11):

- 113415.
- [29] Herranen M, Kainulainen K, Rahkila P M. Kinetic transport theory with quantum coherence[J]. Nuclear Physics A, 2009, 820(1/2/3/4): 203C-206C.
- [30] Rebentrost P, Mohseni M, Aspuru-Guzik A. Role of quantum coherence and environmental fluctuations in chromophoric energy transport [J]. The Journal of Physical Chemistry. B, 2009, 113(29): 9942-9947.
- [31] Bera M N, Qureshi T, Siddiqui M A, et al. Duality of quantum coherence and path distinguishability[J]. Physical Review A, 2015, 92: 012118.
- [32] Bagan E, Bergou J A, Cottrell S S, et al. Relations between coherence and path information[J]. Physical Review Letters, 2016, 116(16): 160406.
- [33] Yuan Y, Hou Z B, Zhao Y Y, et al. Experimental demonstration of wave-particle duality relation based on coherence measure[J]. Optics Express, 2018, 26(4): 4470-4478.
- [34] Zhang M, Kang H J, Wang M H, et al. Quantifying quantum coherence of optical cat states[J]. Photonics Research, 2021, 9(5): 887-892.
- [35] James D F V, Kwiat P G, Munro W J, et al. Measurement of qubits [J]. Physical Review A, 2001, 64(5): 052312.
- [36] Girolami D. Observable measure of quantum coherence in finite dimensional systems[J]. Physical Review Letters, 2014, 113(17): 170401.
- [37] Wang Y T, Tang J S, Wei Z Y, et al. Directly measuring the degree of quantum coherence using interference fringes [J]. Physical Review Letters, 2017, 118(2): 020403.
- [38] Zhang D J, Liu C L, Yu X D, et al. Estimating coherence measures from limited experimental data available [J]. Physical Review Letters, 2018, 120(17): 170501.
- [39] Carmeli C, Heinosaari T, Maniscalco S, et al. Determining quantum coherence with minimal resources[J]. New Journal of Physics, 2018, 20(6): 063038.
- [40] Wu K D, Streltsov A, Regula B, et al. Experimental progress on quantum coherence: detection, quantification, and manipulation [J]. Advanced Quantum Technologies, 2021, 4(9): 2100040.
- [41] Yuan Y, Hou Z B, Tang J F, et al. Direct estimation of quantum coherence by collective measurements [J]. Npj Quantum Information, 2020, 6: 46.
- [42] Tarrach R, Vidal G. Universality of optimal measurements[J]. Physical Review A, 1999, 60(5): R3339.
- [43] Bagan E, Ballester M A, Gill R D, et al. Separable measurement estimation of density matrices and its fidelity gap with collective protocols [J]. Physical Review Letters, 2006, 97(13): 130501.
- [44] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B. Quantifying coherence[J]. Physical Review Letters, 2014, 113(14): 140401.
- [45] Ren H Z, Lin A N, He S Y, et al. Quantitative coherence witness for finite dimensional states [J]. Annals of Physics, 2017, 387: 281-289.