

光学学报

光子径向模式:光场调控及量子信息应用进展

阎思瑾^{1,2}, 张冬凯^{1,2*}, 陈理想^{2**}

¹ 华侨大学信息科学与工程学院福建省光传输与变换重点实验室, 福建 厦门 361021;

² 厦门大学物理科学与技术学院, 福建 厦门 361005

摘要 光子横向空间模式包括角向模式和径向模式两个自由度,它们都可以用来构建一个高维的 Hilbert 空间。在过去 20 年里,角向模式如光子轨道角动量已经得到了深入的研究,并被广泛应用于经典光学和量子信息领域。然而,目前关于径向模式的研究还比较缺乏,尚处于探索阶段,因此径向模式量子数一度被称为“被遗忘的量子数”。由于光子径向模式具有独特的光场特性,故近年来科学家们对它的研究兴趣与日俱增。系统介绍了高阶径向模式的制备、探测与调控技术,特别是光子径向模式间的量子纠缠关联特性及其在量子力学基本问题检测和高维量子信息领域处理中的应用研究进展。

关键词 量子光学; 横向空间模式; 径向模式; 高维量子纠缠; 光场调控

中图分类号 O431

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202242.0327002

Photonic Radial Modes: Progress in Light Field Manipulation and Quantum Information Applications

Yan Sijin^{1,2}, Zhang Dongkai^{1,2*}, Chen Lixiang^{2**}

¹ *Fujian Province Key Laboratory of Light Propagation and Transformation, College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen, Fujian 361021, China;*

² *College of Physical Science and Technology, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China*

Abstract Photonic transverse spatial mode includes two degrees of freedom, i. e., azimuthal modes and radial modes, either of which can be exploited to construct a high-dimensional Hilbert space. In the past two decades, azimuthal modes such as photonic orbital angular momentum have been deeply studied, and widely used in the fields of classical optics and quantum information. However, the research on the radial modes is still lacking at present, and it is still in the exploratory stage, so the quantum number of the radial mode is once called “a forgotten quantum number”. Recent years have witnessed a growing research interest in photonic radial modes because of their unique characteristics in light field. The preparation, measurement and manipulation methods of high-order radial modes are introduced systematically, especially the quantum entanglement correlation characteristics of photonic radial modes and the research progresses of their applications in the detection of the fundamental issues in quantum mechanics and the processing of high-dimensional quantum information.

Key words quantum optics; transverse spatial modes; radial modes; high-dimensional quantum entanglement; light field manipulation

收稿日期: 2021-08-31; 修回日期: 2021-11-09; 录用日期: 2021-11-15

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(12034016)、国家自然科学基金面上项目(61975169)、教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-13-0495)、厦门大学校长基金(20720190057, 20720200074)

通信作者: *zhangdk@hqu.edu.cn; **chenlx@xmu.edu.cn

1 引言

1992 年, Allen^[1] 从理论上验证了拉盖尔-高斯 (LG) 光束具有确定的轨道角动量 (OAM), 引起了人们对 LG 光束的广泛关注。LG 光束具有两个重要的量子数, 即角量子数 l 和径向量子数 p 。角量子数 l 理论上是无边界的, 即 $l \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, 表示每个光子具有 $l\hbar$ 的 OAM^[1], 其中 \hbar 为约化普朗克常数。径向量子数 p 可取任意非负整数, 即 $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$, 其可表征每个光子的双曲动量电荷^[2]。在过去 20 年中, LG 光束的角量子数 l 受到了极大的关注, 这主要是因为发现了 OAM 光束的螺旋相位结构以及 OAM 基矢所构成的高维 Hilbert 空间。OAM 已经被广泛应用于光学微操控^[3-6]、螺旋相位成像^[7-10]、旋转物体的探测^[11-12] 以及经典^[13-20] 和量子^[21-26] 的高维光通信中, 相关研究进展可以参阅厦门大学陈理想教授^[27-28] 和华南师范大学郭邦红研究员^[29] 的综述文章。与之相反, 径向量子数在 LG 光束的相关研究中通常被直接忽略, 或仅是作为 LG 光束中的一个量子数被附带提及, 因而也被人们称为“被遗忘的量子数”^[30]。径向模式“不讨喜”的主要原因在于与 OAM 相比, 径向模式在实际研究中存在两个困难: 1) 实验中选取的径向基矢取决于光斑的束腰半径。特定束腰的本征态可变成任何其他束腰的叠加态, 这个问题导致径向模式在实际操控中容易受到原点束腰、传播距离和 OAM 的影响^[2], 如不同的 OAM 光束制备装置将

会产生不同且特定的径向模式分布^[31]。因此, 需要额外考虑这些相关物理量才能满足径向模式的测量需求; 2) 高精度测量高阶径向模式是具有挑战性的。实验中使用的具有强度掩膜的相位型全息图是无法准确测量高阶径向模式的。

近年来随着实验技术的进一步发展和对横向空间模式的进一步探究, 径向模式引起了科学家们越来越浓厚的研究兴趣。一方面, 径向模式的操纵手段愈加完善, 人们已经能够在实验中高精度地产生和测量光子的径向模式。另一方面, 径向模式在一定程度上弥补了 OAM 模式在远距离传播中存在的束腰扩大及易受大气湍流影响的缺陷。因此, 无论是利用径向模式实现远距离的光通信^[32] 或是将径向模式与 OAM 复用^[33] 来进一步提升光通信的信道容量, 都促使人们对径向模式产生了极大的研究热情。基于此, 本综述将系统介绍高阶径向模式的制备、探测与调控技术, 特别是光子径向模式间的量子纠缠关联特性及其在量子力学基本问题检测和高维量子信息处理中的应用研究进展。

2 径向模式光束

在近轴近似下, 横向光场结构都可以分解为 LG 基矢, 在柱坐标下其本征态可形成横向空间模式的完备基矢。LG 光束的模式可由两个独立的参数标记, 即角量子数 l 和径向量子数 p , 可以简称为 LG_{pl} ^[1]。LG 光束的表达式为

$$E_{LG_{pl}} = \sqrt{\frac{(2p)!}{\pi(p+|l|)!}} \frac{1}{w_z} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_z}\right)^{|l|} \exp\left(\frac{-r^2}{w_z^2}\right) \times L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w_z^2}\right) \exp(i\ell\varphi) \exp\left[\frac{ikr^2z}{2(z^2+z_R^2)}\right] \times \exp\left[-i(2p+|l|+1)\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)\right], \quad (1)$$

式中: k 为波矢大小; z 为传播距离; φ 为角坐标; r 为半径; w_z 为光束传播到 z 处的束腰半径; z_R 为瑞利长度; $L_p^{|l|}(\cdot)$ 为拉盖尔多项式; $\arctan(z/z_R)$ 为古伊相位。在 LG 光束中, 径向量子数 p 主要表征光束的强度分布, 角量子数 l 主要表征光束的相位分布。 $l > 0$ 时的 LG 光束可以被描述为中心轴强度为零且具有 $p+1$ 个同心环的环形光束。图 1 展示了 LG_{01} , LG_{11} 和 LG_{21} 模式的相位图和强度图。与 OAM 相比, LG 光束的径向模式具有一些独特的物理特性, 如径向算符服从 $SU(1, 1)$ 代数交换关系^[31, 34]; 具有高阶径向量子数的 LG_{pl} 模式显示出类

似于贝塞尔光束的自愈特性^[35]; 高阶径向模式光束可以在强聚焦时克服衍射极限^[36]; 携带高阶径向量子数的 LG 光束在进行高精度干涉测量(如引力波测量)时可表现出更强的稳定性^[37]等。相信这些独特的物理特性, 将会使得径向模式光束在光学微操控^[6]、精密测量^[37]等领域中得到进一步的研究并扩展出一些实际的应用。当然, 本综述主要关注径向模式所具备的与 OAM 相似的特性, 即径向模式的本征态可以形成一组正交完备的基矢来构建高维的 Hilbert 空间并可应用于高维量子信息科学。由于相关研究均依赖于高阶径向模式的制备、测量和分

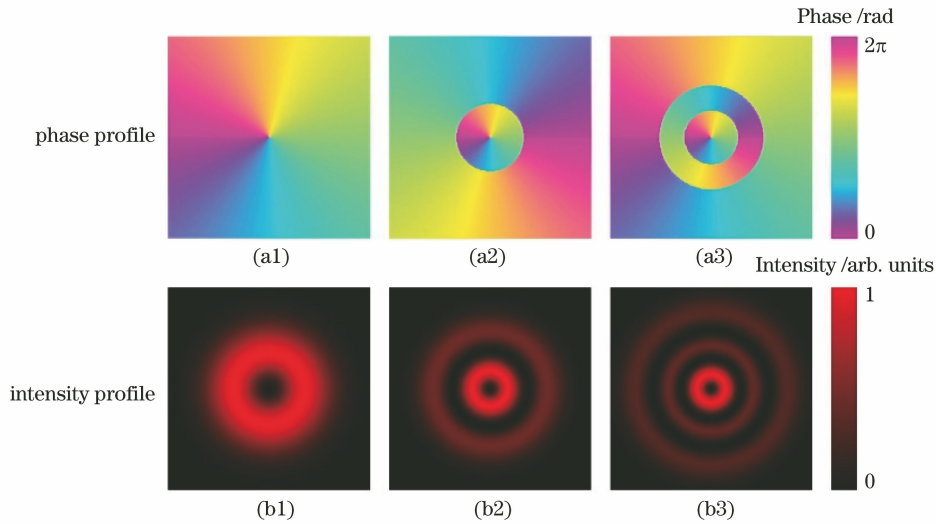


图 1 不同模式的相位图和强度图。(a1)(b1) LG_{01} 模式;(a2)(b2) LG_{11} 模式;(a3)(b3) LG_{21} 模式

Fig. 1 Phase and intensity profiles of different modes. (a1)(b1) LG_{01} mode; (a2)(b2) LG_{11} mode; (a3)(b3) LG_{21} mode

类技术,因此首先介绍径向模式操控技术的研究进展。

3 径向模式的制备、探测及分类

3.1 径向模式的制备

径向模式最普遍的制备方法是全息图制备法^[38-41]。一束基模高斯光束入射到加载 LG_{pl} 模式信息的全息图上产生的一级衍射光便是 LG_{pl} 模式。图 2(a)展示了制备 LG_{23} 和 LG_{35} 模式的全息图^[40]。由于全息图可以通过对空间光调制器(SLM)进行编码来实时地获取,故全息图制备法在实验中具有较强的实用性。然而,由于全息图

制备法需要通过一级衍射光来获得所需的径向模式光束,故制备效率较低。为了提高制备效率,Ruffato 等^[42]设计了一种新型的螺旋相位板,如图 2(b)所示。在扫描电子显微镜(SEM)的表征下,这种新型的螺旋相位板呈现出与图 2(a)相似的高阶 LG 光束的空间结构。当光束透过该螺旋相位板后,便能高效地产生特定的 LG_{pl} 模式。最近,Mao 等^[43]巧妙地设计了一种金属超表面用于高效地制备多个径向模式,如图 2(c)所示。当入射光通过超表面后可以在不同衍射角产生不同的高阶 LG_{pl} 模式,进而同时实现了多个 LG_{pl} 模式的制备与分离。

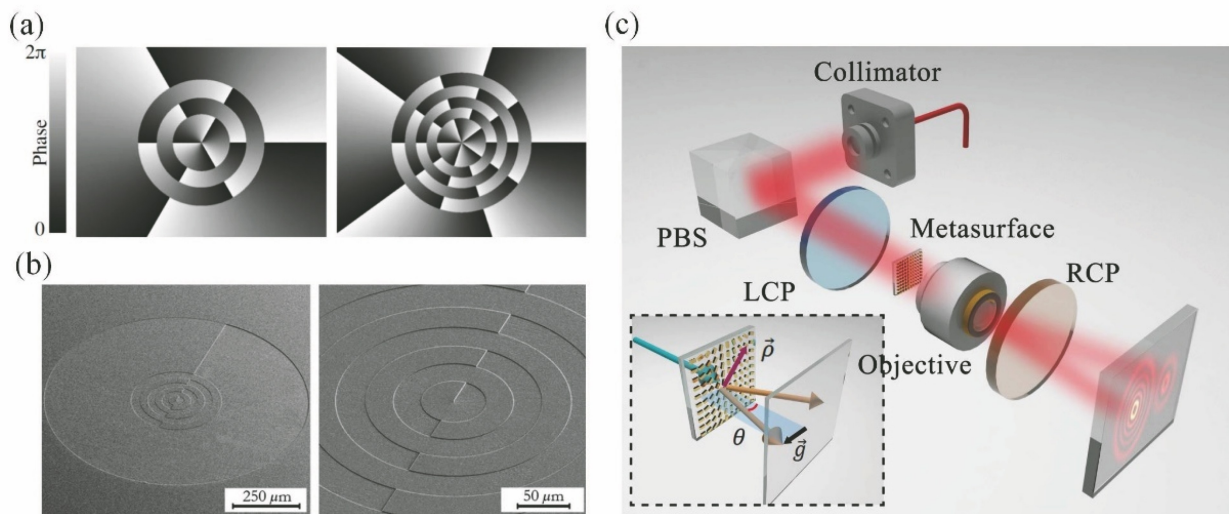


图 2 径向模式光束的制备方法。(a)全息图制备法^[40]; (b)螺旋相位板制备法^[42]; (c)金属超表面制备法^[43]

Fig. 2 Preparation methods of radial mode beam. (a) Holographic preparation method^[40]; (b) spiral phase plate preparation method^[42]; (c) metal metasurface preparation method^[43]

目前全息图制备法已经被广泛地应用于经典光通信的模式编码^[44-47]和量子纠缠装置中泵浦光的调制^[48]。随着人们对制备效率要求的提高,可以预期螺旋相位板制备法和金属超表面制备法也将被引入更多的应用体系中,如结构化泵浦光的高效制备^[48]、光学微操控^[6]中高阶 LG 光束的制备等。

3.2 径向模式的测量

空间模式最常见的测量方法是投影测量法,投影测量法主要是通过全息图将所需的模式转换为高斯模式并耦合进单模光纤(SMF)中。该测量方法可以看作是全息图制备法的逆过程,测量的关键在于 SMF 只允许基模高斯光通过,因而通过全息图后无法转换为高斯模式的其他无关模式将被排除在 SMF 外。投影测量法具备能够直接从 SMF 中提取单光子信号的优势,非常适合光通信的信号收集。因此,为了让径向模式能够更好地应用于高维光通信,人们首先在优化投影测量方法上做了较大的努力。起初,人们使用了与 OAM 测量相同的投影测量法,即通过相位光栅将入射场的相位前沿抚平,并将抚平后的光场耦合进 SMF^[49]中。但是,径向模式主要表征的是 LG 光束的强度结构,此时相位平坦化的测量结果中存在模间串扰,这是因为径向模式光束通过光栅后无法被完全投影到 SMF 所能容纳的高斯模式上^[49]。为了实现高精度的测

量,Bouchard 等^[50]提出了一种强度平坦化技术。这项技术的关键是利用显微物镜来增加反向传播光束的束腰半径,进而消除高斯因子对测量的影响,如图 3(a)所示。在反向传播束腰比测量全息图的束腰大 8.4 倍的情况下,实验测量精度最高可达到 99%,如图 3(b)所示。然而,随着精度的提高,检测效率也会大幅下降,且维度越高,检测效率越低。即便如此,与常用的相位平坦化技术相比,强度平坦化技术对径向高维量子态的量子密钥分发和层析扫描都有明显的改进^[50]。为了同时满足高精度和高效率的测量需求,Choudhary 等^[51]提出了利用两个相位屏来实现无损的酉变换,将高阶径向模式转换为与 SMF 基模相匹配的高斯分布。他们的测量方式是利用相位恢复法迭代得到所需的两个相位屏,并分别放置在物平面和透镜的傅里叶平面上,如图 3(c)所示。他们计算了变换后的模式与 SMF 基模的重叠积分,并得到了高转换效率(大于 80%)和低串扰(小于 2%)的模拟结果,如图 3(d)所示。然而,在实验上由于 SLM 上的像素校准错误及光学系统的不完善,实验结果无法与预期相符。换句话说,相位恢复法虽然能够同时实现高效率和高精度的测量,但是需要额外放置另一个全息图,并且对实验的精准度要求较高。径向模式的投影测量技术日趋成熟,并逐渐推动径向模式在量子信息科学领域中的发

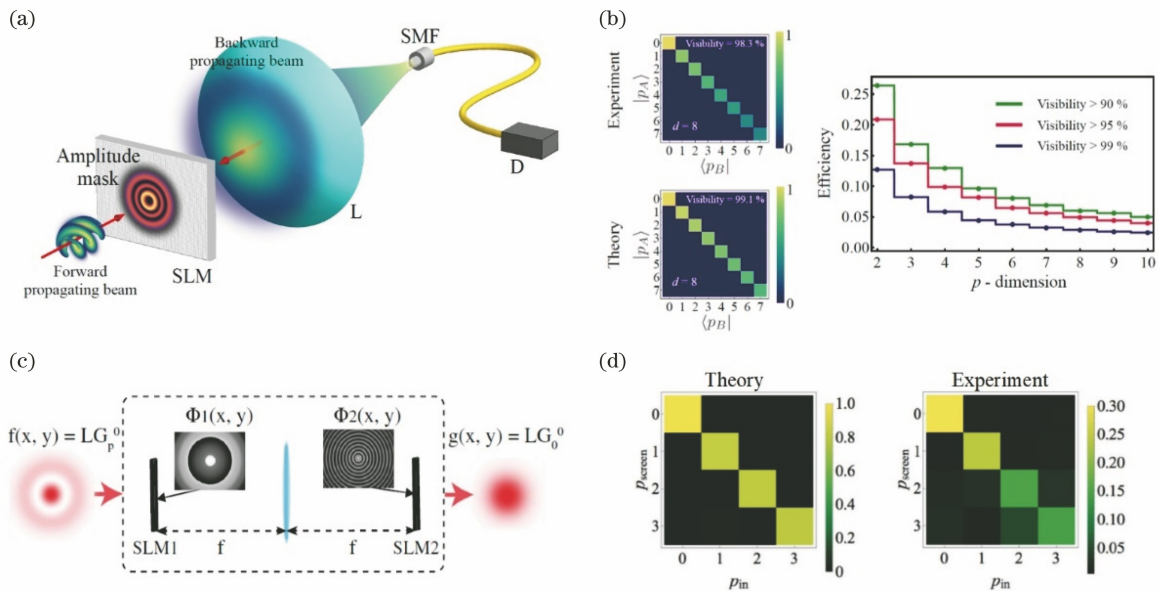


图 3 径向模式的投影测量。(a)强度平坦化法实验装置^[50];(b)径向模式的测量精度^[50];

(c)相位恢复法实验装置^[51];(d)高精度高效率的测量结果^[51]

Fig. 3 Projection measurement of radial modes. (a) Experimental setting of intensity-flattening method^[50]; (b) measurement accuracy of radial modes^[50]; (c) experimental setting of phase-retrieval method^[51]; (d) high-precision and high-efficiency measurement results^[51]

展。目前,相位平坦化技术和强度平坦化技术已经被用于量子关联^[48,52-53]和量子纠缠^[54]特性的相关研究中,相信投影测量技术将成为各个领域对径向模式进行深入研究利剑。

除了对投影测量法的研究外,人们还提出多种新颖的测量方案。Kotlyar 等^[55]分析了椭圆 LG 光束通过衍射光学元件后强度的传播特性,结果表明,入射光束的模式可以通过选择衍射光学元件适当的轴向倾角来确定。Abouraddy 等^[56]结合空间旋转器和分数 Hankel 变换实现了一种新型的干涉仪,该干涉仪能够测量标量光束完备的角向和径向空间模谱。Mazilu 等^[57]将主成分分析方法应用于衍射理论来确定 LG 光束的模式。这种方法的优势在于可以容忍一定程度的光束未对准和光束腰部变化。国内同样也提出了一些开创性的测量方案。北京航空航天大学黎芳课题组^[58]设计了一种新的掩膜图样,可以同时检测出 LG 光束的角向量子数和径向量子数。当一束 LG 光束照射到掩膜图样后,可以在远场强度图案中直接判断出 LG 光束的模式。北京理工大学张向东课题组^[59]通过弱值测量发现 LG 光束的模式与空间位移有关。根据这种关联可以同时识别 LG 光束的两种高阶模式。西安电子科技大学韩一平课题组^[60]提出了一种利用螺旋相位光栅来确定 LG 光束模式的方法。西安交通大学李福利课题组^[61]发现可以利用单像素探测器来测量 LG 光束的径向模光谱。这些测量方案主要是利用 CCD 相机观测近场或远场的强度分布来辨别 LG 光束的径向模式,因此其更适用于经典光通信^[44]的模式识别。

3.3 径向模式的分类测量

对于 LG_{*p*_l} 模式的分类,人们最常用的方法便是在马赫-曾德尔干涉仪的其中一臂中引入额外的与模式相关的相位^[62-64]。对于 OAM,主要关注 LG 光束中的螺旋相位项 $\exp(i\ell\varphi)$ 。OAM 分类的实验装置^[62]如图 4(a)所示,干涉仪的其中一臂放置转角为 $\alpha/2$ 的 Dove 棱镜使相位项增加至 $\exp[i\ell(\varphi + \alpha)]$,使得两臂存在 $\exp(i\ell\alpha)$ 的相位差。当 Dove 棱镜转角为 $\pi/2$ 时,两臂之间将会有 $\ell\pi$ 的相位差,则携带偶数 OAM 的光束在 A1 输出端相干加强,携带奇数 OAM 的光束在 B1 输出端相干加强,如图 4(b)所示。这种干涉方法只能将 OAM 光束分为特定的两类,若要进一步扩展则需要级联多个干涉仪,这显然会大幅降低系统的稳定性。为了让分类更高效,人们采用坐标变换的思想将直角坐标变换到对数极坐

标^[65-68],将携带不同 OAM 的光束转换为具有不同相位梯度的条形光斑。光斑在被透镜聚焦后,会在不同位置处呈现为携带不同 OAM 的光束。

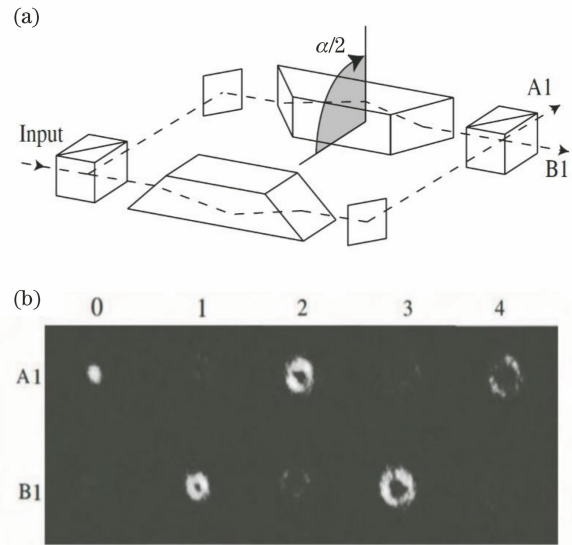


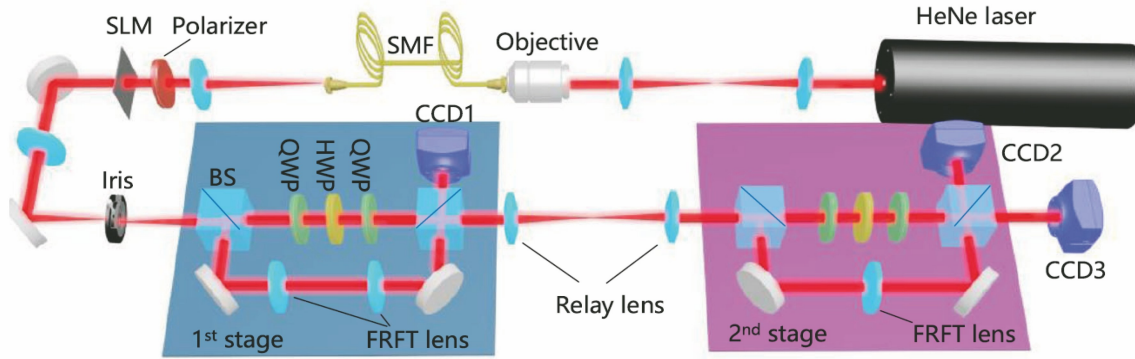
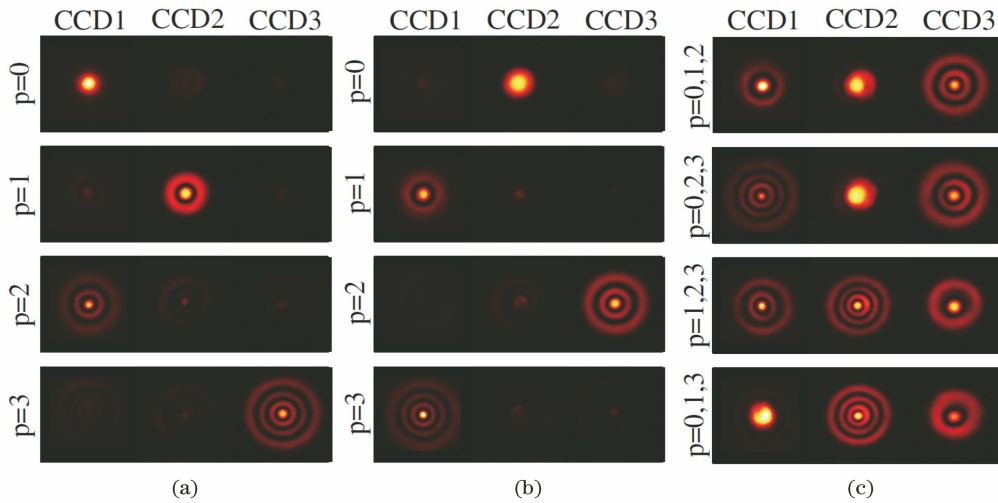
图 4 OAM 模式分类器^[62]。(a)实验装置;(b)实验结果

Fig. 4 OAM mode sorter^[62]. (a) Experimental setting; (b) experimental result

对于径向模式的干涉分类,人们主要关注与径向量子数相关的古伊相位 $\varphi_g = \arctan(z/z_R)$ 。与 OAM 分类相似,只要在干涉仪的其中一臂改变光束的古伊相位,使两臂存在与径向量子数相关的恒定相位差便能实现径向模式的分类。在同一时间内加拿大渥太华大学 Boyd 团队^[69]以及奥地利科学院 Zeilinger 团队^[70]分别通过分数古伊相位法和累积古伊相位法实现了径向模式的干涉分类,这里主要介绍分数古伊相位法^[69],实验装置如图 5 所示。通过级联两个干涉仪实现了三种径向模式的分类。他们在第一个干涉仪的其中一臂放置透镜组以实现分数傅里叶变换(FRFT)

$$\mathcal{F}^a [E_{\text{LG}_{p\ell}}(r_0, \varphi_0)] = \exp[-i(2p + \ell)a] E_{\text{LG}_{p\ell}}(r, \varphi), \quad (2)$$

式中: a 为 FRFT 的阶数。取 $a = \pi/2$,使两路的古伊相位差 $\Delta\varphi_g = \pi/2$ 。根据(2)式,两路存在 $(p + |\ell|/2)\pi$ 的恒定相位差,若忽略角向量子数 ℓ ,则该装置能够实现径向模式奇偶分类。第二个干涉仪其中一臂放置的透镜则用于实现 $a = \pi/4$ 的 FRFT,使得奇数或偶数径向量子数的 LG 光束得到进一步分类,实验结果如图 6 所示。通过调整 FRFT 的阶数 a ,可以使径向量子数为奇数或偶数的 LG 光束分类到 CCD1,并使径向量子数为偶数或奇数的 LG 光束在 CCD2 和 CCD3 中实现进一步分类。不过,无论是 OAM 分类

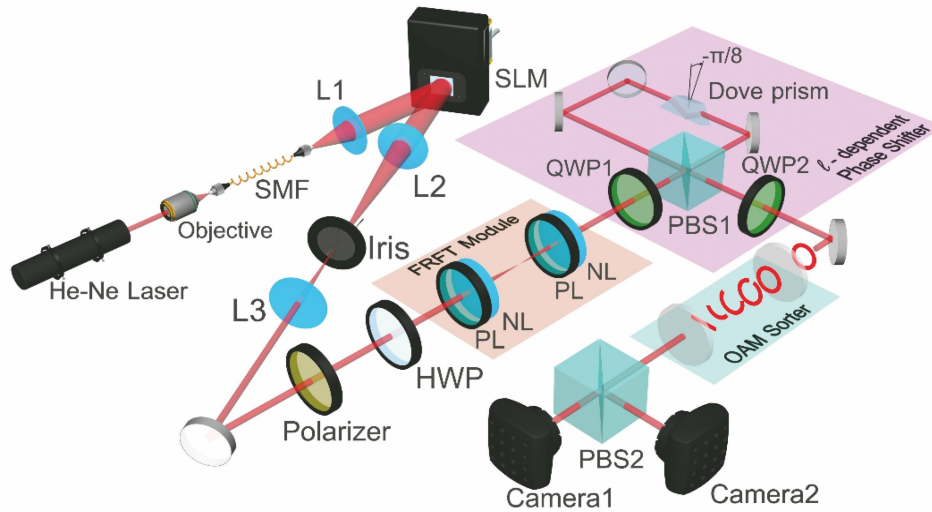
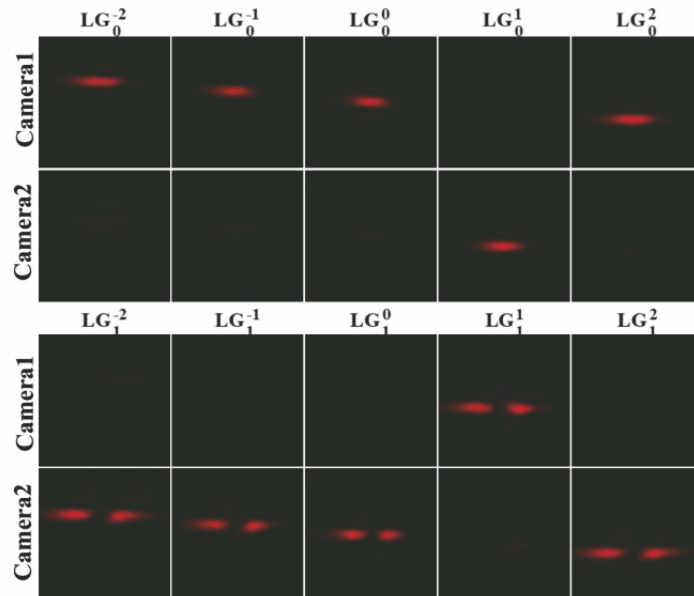
图 5 基于分数古伊相位分类法的径向模式分类器的实验装置^[69]Fig. 5 Experimental setting of radial mode sorter based on fractional Gouy phase classification method^[69]图 6 径向模式分类器的实验结果^[69]Fig. 6 Experimental results of radial mode sorter^[69]

器还是径向量子数分类器,都仅能对 LG 光束的其中一项量子数进行分类。为了能够实现径向量子数和 OAM 的同时分类,Boyd 团队将 OAM 的坐标变换分类法与径向量子数分数古伊相位分类法进行巧妙结合,并在实验中实现两个量子数的同时分类^[71],如图 7 所示。他们首先使用 FRFT 模块来实现径向模式的分类,并通过相位移相器来移除古伊相位相关项($p + |\ell|/2$)中角量子数 ℓ 对径向模式 p 的影响。在这两个操作下, $LG_{p\ell}$ 模式的演化过程^[71]为 $E_{LG_{p\ell}} \otimes (|L\rangle + |R\rangle)$ 经过 FRFT 后变换为 $E_{LG'_p} \otimes \left\{ |L\rangle + \exp\left[i\pi\left(p + \frac{|\ell|}{2}\right)\right] |R\rangle \right\}$, $E_{LG'_p} \otimes \left\{ |L\rangle + \exp\left[i\pi\left(p + \frac{|\ell|}{2}\right)\right] |R\rangle \right\}$ 经过移相器后变为

$$E_{LG_{p\ell}} \otimes \left\{ |L\rangle + \exp\left[i\pi\left(p + \frac{|\ell|}{2} + \frac{\ell}{2}\right)\right] |R\rangle \right\} = \begin{cases} E_{LG_{p\ell}} \otimes \left\{ |L\rangle + \exp[i\pi(p + |\ell|)] |R\rangle \right\}, & \ell > 0 \\ E_{LG_{p\ell}} \otimes \left[|L\rangle + \exp(i\pi p) |R\rangle \right], & \ell \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中: $|L\rangle$ 为左旋圆偏振态; $|R\rangle$ 为右旋圆偏振态; \otimes 为直积符号。经过径向模式分类器后,他们又进一步利用坐标变换法来实现 OAM 模式的分类,实验结果如图 8 所示。不同 OAM 模式的光束将在不同的垂直位置排序。当 $\ell \leq 0$ 时, $p=0$ 和 $p=1$ 模式分别被排序到 Camera1 和 Camera2 中; 当 $\ell > 0$ 时, $p + \ell$ 的值为奇数(偶数)的 $LG_{p\ell}$ 模式被排序到 Camera2(Camera1)中。2019 年,该团队又在横向空间模式的基础上扩展了偏振自由度,实现了光子三个自由度(偏振、OAM 和径向量子数)的通用分类器^[72]。此外, Morizur 等^[73-75]利用多平面光转换装置实现了在空间上对 LG 光束的前 210 个模式进行有序排列。Boyd 团队^[76]通过控制强散射过程实现了与多平面光转换装置类似的分类方案。Volyar 等^[77]通过分析 LG 光束经过柱面透镜后的强度分布实现了对径向模式的分类。

值得注意的是,干涉分类法虽然仅能将 LG 光束的其中一个模式量子数固定地分为两类,但是在分类过程中模式的空间结构得到了较好的保留。相

图 7 高阶 LG_{pl} 模式分类器^[71]Fig. 7 High-order LG_{pl} mode sorter^[71]图 8 高阶 LG_{pl} 模式分类器的实验结果^[71]Fig. 8 Experimental results of high-order LG_{pl} mode sorter^[71]

反,坐标变换分类法虽然能够实现更为高效的分类,但是在分类过程中模式的空间结构却会遭到破坏。因此,在保留模式空间结构的同时,实现模式的高效分类仍然是径向模式分类的研究难点。目前可能的方法是利用多平面光转换装置^[73-74]来实现无损的酉变换^[78],但是该方法需要光束通过多个相位屏,故仍需进一步完善算法和实验操作技术。本章所介绍的径向模式的制备、探测和分类技术已经逐渐被人们引入到多个相关领域的研究中,下面主要介绍径向模式在高维光通信,量子纠缠关联及量子力学基本问题检测方面的研究进展。

4 径向模式在光通信及量子信息科学领域中的研究

4.1 基于径向模式的光信息编码

与二维偏振态相比,横向空间模式可以自然地构建无穷多维的 Hilbert 空间,从而可有效提升光通信的信道容量。在过去 20 年里,人们主要以光子的 OAM 作为载体来实现高维光通信。在这些实验中,主要通过 SLM 来实现信息的编码和解码^[13-15],或是使用特殊的光纤进行通信^[16-18]。目前以光子的 OAM 为载体的经典通信已经能够达到 Tbit^[15]甚至 Pbit^[17]量级的信道容量。在量子领域中,高维

OAM 的量子密钥分发^[22-25]和量子纠缠交换^[26]已经在实验上得到了实现,这证明了 OAM 在高维量子通信中应用的可行性。即便如此,同样不可忽视 OAM 在远距离通信上存在的缺陷:1)携带 OAM 的光束随着传播距离的增大,束腰半径也会不断增大,这就要求接收端必须使用大透镜才能够对信号进行收集^[12];2)当 OAM 光束在自由空间中传播时,光场的螺旋相位结构受大气湍流的影响较大,此时接收端会出现明显的模间串扰^[79-86],从而导致信息提取的准确率下降。利用径向模式进行远距离光通信能够明显改善这两个缺点,这是因为径向量子数主要表征横向光场的径向振幅分布,其在经过长距离的传播过程后仍然可以保持较高的准确率。相关研究表明光束的强度图样在 1.6 km 的自由空间链路上仍然可被识别^[87],在 3 km 的空间链路上可以达到 98% 的识别准确率^[88],在 143 km 的空间链路上可以达到 80% 的识别准确率^[31],这说明高阶径向量子数光束的振幅结构可能有助于降低大气湍流的影响^[89]。此外,人们还发现在接收器孔径有限的情况下,径向模式可以降低功率损耗^[90];非零径向折射率光束对光强和旋转多普勒频率信号幅度都具有增强效果^[91]。这些研究均证明了径向模式在远距离光通信中的重要应用价值。

另一方面,自由空间通信中能够使用的 OAM 模式数量(维度)同样受限于 OAM 远距离传输的缺点,因此复用 LG_{p_l} 模式的径向自由度来进一步突破

信道容量的极限是非常有必要的。近几年,人们在两者复用的经典光通信上做了较大的努力。Trichili 等^[44]将径向和角向自由度模分复用,仅用单个 SLM 便能够实现 100 多种模式的编码和解码。他们利用 5 个径向量子数 $p(0,1,2,3,4)$ 和 7 个角向量子数 $l(-3,-2,-1,1,2,3,4)$ 构建了 35 个 LG_{p_l} 模式,并选取 3 种不同波长来实现 105 个编码模式的复用与解复用,如图 9(a)所示。实验装置如图 9(b)所示。利用光栅将 3 个不同波长的光束分别入射到 SLM-1 中的 3 个独立屏上进行模式编码,如图 9(c)所示,并利用 SLM-2 中的 3 个独立屏和 CCD 相机组成模态滤波器来实现全模式的解码,如图 9(d)所示。SLM-2 的每个独立屏都加载了由 35 种 LG_{p_l} 模式的复共轭组成的全息图,并且每个模式都乘上了不同的空间载波频率。由于载波频率在傅里叶平面中表现为单独的空间坐标,因此在 CCD 相机上能够识别出空间分离的 105 种模式,如图 9(e)所示。利用这套模分复用系统,他们实现了彩色图像的传输,如图 10 所示。彩色图像的每个像素可分解为三基色(红色、绿色和蓝色),其中 3 个颜色由 3 种不同的波长进行编码,每个颜色的饱和度水平由 35 种空间模式进行编码。最终,他们以非常高的保真度(传输错误率低于 2%)在自由空间中传输了魔方图像。Xie 等^[45]将径向模式扩展到 OAM 通信中,使用两类具有不同径向量子数的 LG 光束设计了一个传输速率为 200 Gbit/s 的空分复用系统。

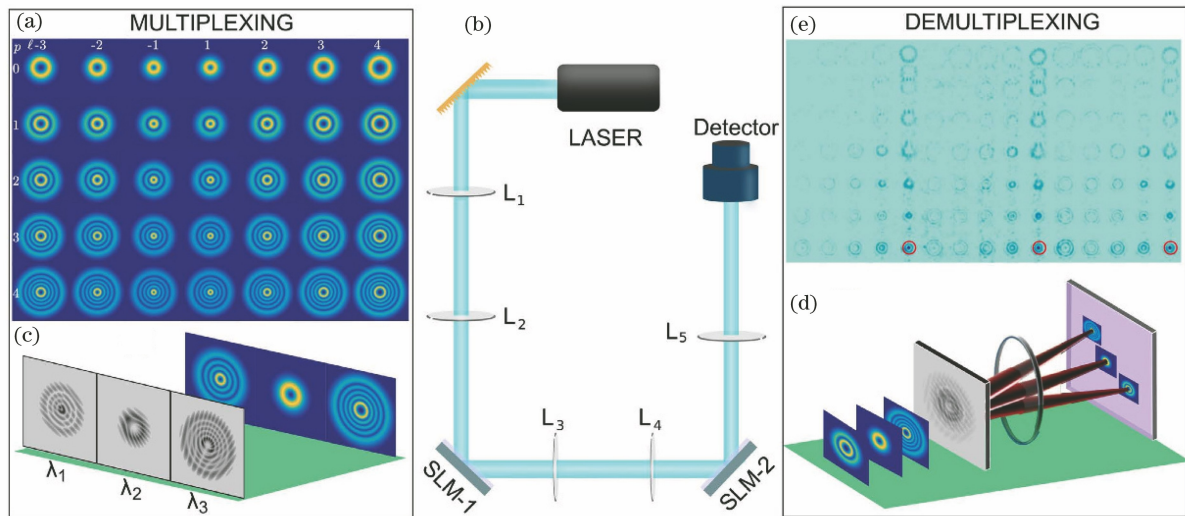


图 9 利用径向和角向模式实现模分复用^[44]。(a) 35 个 LG_{p_l} 模式的强度图;(b) 实验装置;(c) SLM-1 上的 LG_{p_l} 模式编码;(d) SLM-2 和 CCD 相机组成的模态滤波器;(e) CCD 相机在远场实现 105 个模式的识别

Fig. 9 Mode division multiplexing using radial and azimuthal modes^[44]. (a) Intensity profiles of 35 LG_{p_l} modes; (b) experimental setting; (c) encoding of LG_{p_l} modes in SLM-1; (d) modal filter composed of SLM-2 and CCD camera; (e) identification of 105 modes in far field by using CCD camera

该团队还发现 4 个 LG_{pl} 模式 (LG_{00} , LG_{01} , LG_{10} , LG_{11}) 复用的信道串扰较低, 因此两个量子数的复用通信有望实现 400 Gbit/s 的数据传输。在国内, 合肥工业大学郭凯课题组^[46]通过对光通信系统的仿真, 建立了一种基于高阶径向量子数的新型编码系统。淮阴工学院王晓晖等^[47]使用了 16 种 OAM 模式和 4 种径向模式在实验上进行了 64 进制的编码和解码, 并根据这套系统分析了大气湍流对信息传输的影响。在量子通信方面, Zeilinger 教授团

队^[92]在高维量子系统中研究了径向量子数和 OAM 的多路复用, 制备了 100×100 维纠缠的双光子量子态, 并展现了径向模式在量子信息技术中的潜在用途。Valencia 等^[93]在电信体系中进行了类似的工作, 他们在实验中制备并测量了 43 维的 LG 模式纠缠。Boyd 团队^[72]利用偏振、OAM 和径向量子数 3 个横向自由度实现了 8 维量子密钥分发。Brandt 等^[78]利用波前匹配技术实现了 LG 光场模式的高维幺正变换, 为扩展高维量子计算提供了依据。

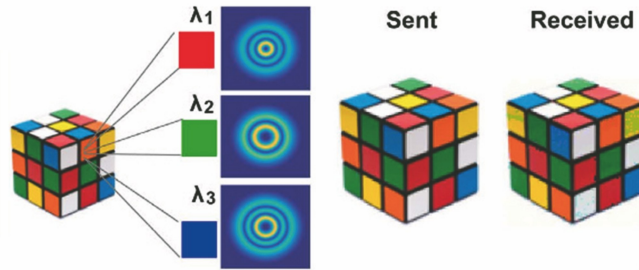


图 10 RGB 编码彩色图像^[44]

Fig. 10 RGB encoding colour images^[44]

在 OAM 模式通信的基础上进一步引入径向模式来实现更加高效的光通信已经逐渐成为科学家们关注的焦点, 相信两者复用的信息传输会将光通信的信道容量提升到另一个高度。需要注意的是, 目前能够操控的维度仍然受到操控技术及仪器精度的限制, 如全息图的像素精细度, 故高阶 LG 光束制备与测量技术有待进一步研究。

4.2 径向模式在量子纠缠关联特性及量子力学基本问题检测中的研究进展

在量子基础研究领域中, 人们主要关注径向自由度的量子纠缠关联特性及其在量子力学基本问题检测中的应用。径向模式纠缠的实验方案与 OAM

的相关实验方案类似, 主要依靠自发参量下转换产生方法和 3.2 节介绍的投影测量技术。实验装置如图 11 所示^[54]。一束泵浦光入射到非线性晶体 (BBO) 中, 经过自发参量下转换过程产生径向模式纠缠的光子对。纠缠双光子通过非偏振分束器 (BS) 后被分别投影到两个 SLM 上。SLM 与 SMF 组合的模块可用于实现径向模式的投影测量。最终, 利用符合测量模块可得到两路单光子信号的符合计数。根据该实验模型, 人们从不同的角度研究了径向量子数的量子纠缠属性。Karimi 等^[94]通过 HOM (Hong-Ou-Mandel) 效应来研究径向量子数的量子特性。他们在实验中操作径向量子数的横向

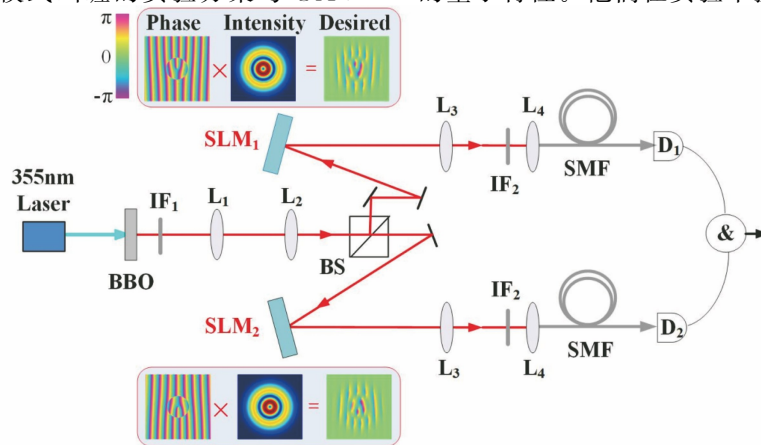


图 11 双光子径向模式纠缠实验装置^[54]

Fig. 11 Experimental setting for radial mode entanglement of two photons^[54]

模态轮廓来观测双光子的 HOM 干涉,并证明了单个光子的径向自由度可以在量子范围内被单独操纵。Miatto 等^[52]和 Salakhutdinov 等^[53]分别在理论和实验上研究了自发参量下转换过程中产生的双光子在径向量子数空间的量子相关性。实验研究^[53]表明,双光子的径向量子数并不像 OAM 一样具有完美的量子关联。相反,双光子的径向量子数谱具有明显的交叉项。这些交叉项需要通过调整下转换光与泵浦光的束腰比例来进一步消除,最终可实现双光子径向量子数的完美关联。当泵浦光束腰保持不变时,下转换光的束腰大小(即全息图的束腰大小)从 $1000\ \mu\text{m}$ 调整到 $500\ \mu\text{m}$ 后,双光子的径向

量子数便能够呈现出较为完美的量子关联,如图 12 所示。实验结果也同时证明了考虑纠缠光子对的完整横向模式(角向和径向自由度)会大大提高双光子的纠缠强度。在上述的量子纠缠关联实验研究中,人们主要使用相位平坦化的投影测量法。最近,D'Errico 等^[48]利用强度平坦化的投影测量法^[50]研究了具有不同空间模式的结构化泵浦光束对双光子径向量子数空间相关性的影响。研究发现,对于低径向泵浦模式,双光子径向量子数的对角线相关性在不同 OAM 子空间的变化很小,如图 13 所示。对于携带 OAM 的高阶 LG_{pl} 泵浦模式,径向模式的相关性将会呈现明显的不对称性,如图 14 所示。

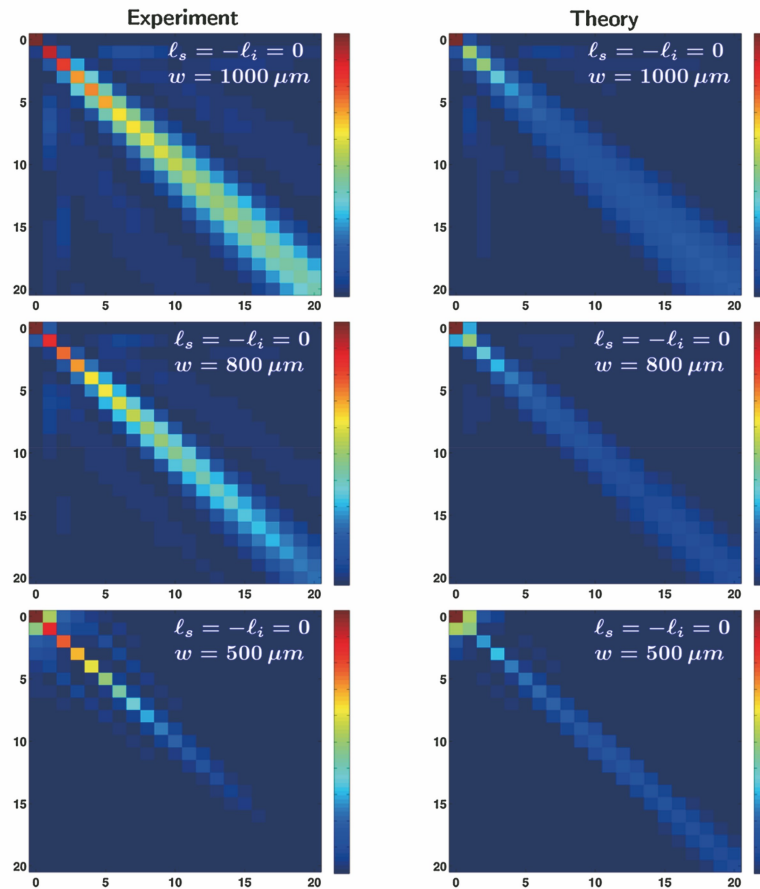


图 12 径向模式的量子相关性^[53]

Fig. 12 Quantum correlation of radial modes^[53]

本团队主要通过量子纠缠判据来研究双光子径向自由度的量子纠缠特性。首先,利用 Bell 不等式判据量化了径向量子数的纠缠特性^[54]。在实验中,根据调整束腰比例的方法^[53]找到了合适的径向量子数二维子空间,并发现 LG 光束的径向量子数违背了 Clauser-Horne-Shimony-Holt-Bell 不等式,证明了双光子波函数径向结构中量子纠缠特性的存在。随后,跳出了离散径向量子数的研究框架,从连

续变量的角度研究径向自由度的 EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) 关联^[95]。与 Bell 不等式相比,EPR 关联同时适用于离散变量和连续变量,目前已经被应用于证明位置-动量^[96]、角度-OAM^[97]两对共轭变量的量子关联特性。与之相似,在理论和实验上证明了径向位置和径向动量也具有 EPR 关联,从而扩展了一组可应用于量子领域的新光学工具箱。为了测量径向自由度的 EPR 关联,需要找到径

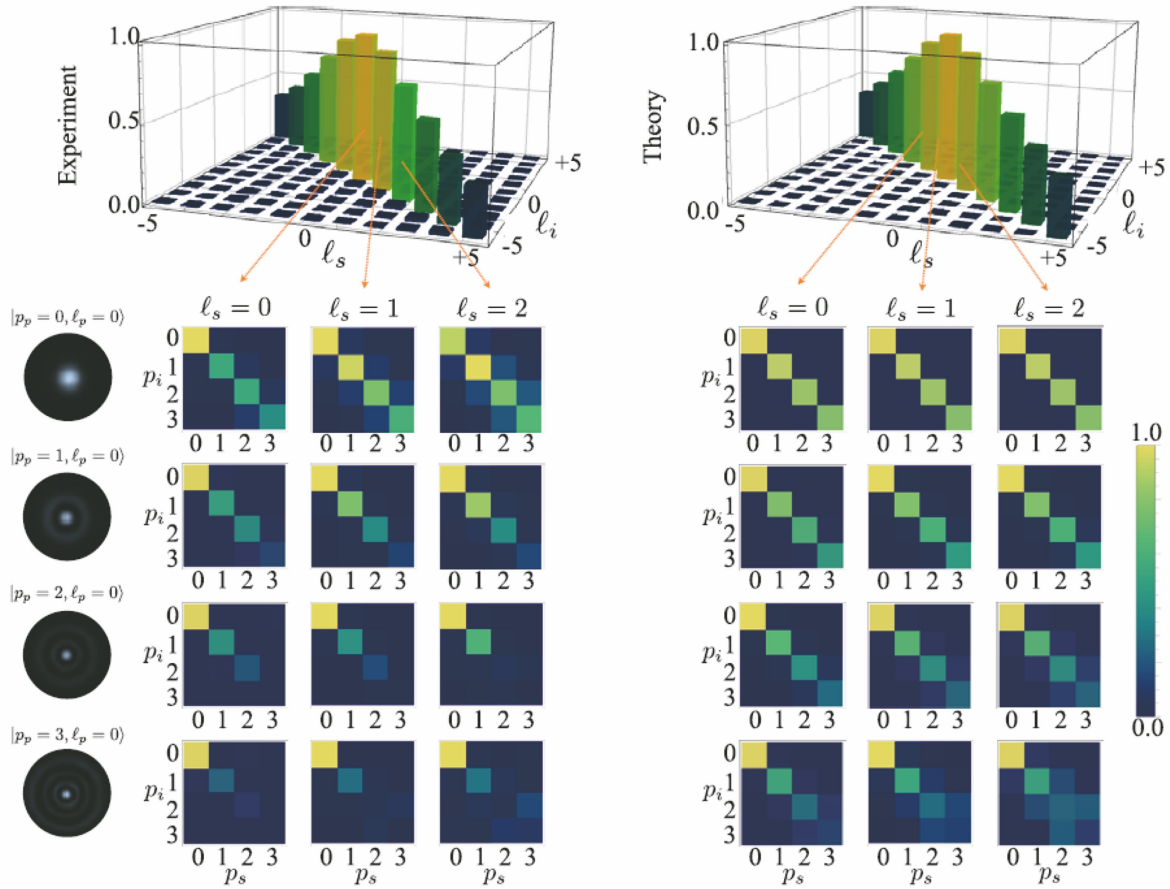


图 13 基于径向泵浦模式的径向模式量子相关性^[48]

Fig. 13 Quantum correlation of radial modes based on radial pump modes^[48]

向位置和径向动量的表示形式。其中, 径向位置可以用具有不同半径(r)的环形狭缝表示。径向动量可以用径向动量算符本征态表示, 其表达式为

$$\psi_{p^r}(r) = \langle r | p^r \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \cdot \frac{\exp(ip^r r/\hbar)}{\sqrt{r}}, \quad (4)$$

式中: p^r 为 \hat{p}^r 算子的本征值, 即 $\hat{p}^r \langle r | p^r \rangle = p^r \langle r | p^r \rangle$; \hat{p}^r 是柱坐标系下的径向动量算子 $\hat{P}_r = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r}$ 的 Dirac 对称形式, 即

$$\hat{p}^r = \frac{1}{2}(\hat{P}_r + \hat{P}_r^\dagger) = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right), \quad (5)$$

(5)式满足厄米性 $(\hat{p}^r)^\dagger = \hat{p}^r$ 和正则对易关系 $[r, \hat{p}^r] = i\hbar$ 。由于下转换过程满足动量守恒且产生的纠缠光子对具有强位置相关性, 故可以预测信号光子(A)和闲置光子(B)在径向位置具有正关联, 即 $r_A = r_B$, 如图 15 (a)、(b)所示; 在径向动量具有反关联, 即 $p_A^r = -p_B^r$, 如图 15(c)、(d)所示。两种关联的同时存在便是纠缠的关键特征。实验装置如图

16 所示, 利用环缝掩膜来测量双光子的径向位置关联, 利用径向动量算符本征态的空间结构来测量双光子径向动量关联。实验结果如图 17 所示, 可以看到, 纠缠光子对在径向位置呈现明显的正关联, 在径向动量呈现明显的反关联。根据关联结果, 可以计算出径向位置与径向动量的不确定度

$$[\Delta(r_B | r_A)]^2 [\Delta(p_B^r | p_A^r)]^2 = (0.1196 \pm 0.0110)\hbar^2, \quad (6)$$

理论上, 由于径向位置与径向动量存在对易关系 $[r, \hat{p}^r] = i\hbar$, 因此根据径向自由度的类海森伯不

确定原理, 独立粒子的海森伯不确定性应满足

$$[\Delta(r_B | r_A)]^2 [\Delta(p_B^r | p_A^r)]^2 \geq 0.25\hbar^2. \quad (7)$$

(6)式的计算结果显然违反了类海森伯不确定性, 进而证明了双光子波函数径向结构的 EPR 关联^[96-97]。本团队的工作表明, 与角位置和 OAM 一样, 径向位置和径向动量这对共轭变量同样能够为量子力学基础研究和量子信息应用提供一个新的共轭自由度。

此外, 基于径向位置和径向动量的傅里叶关

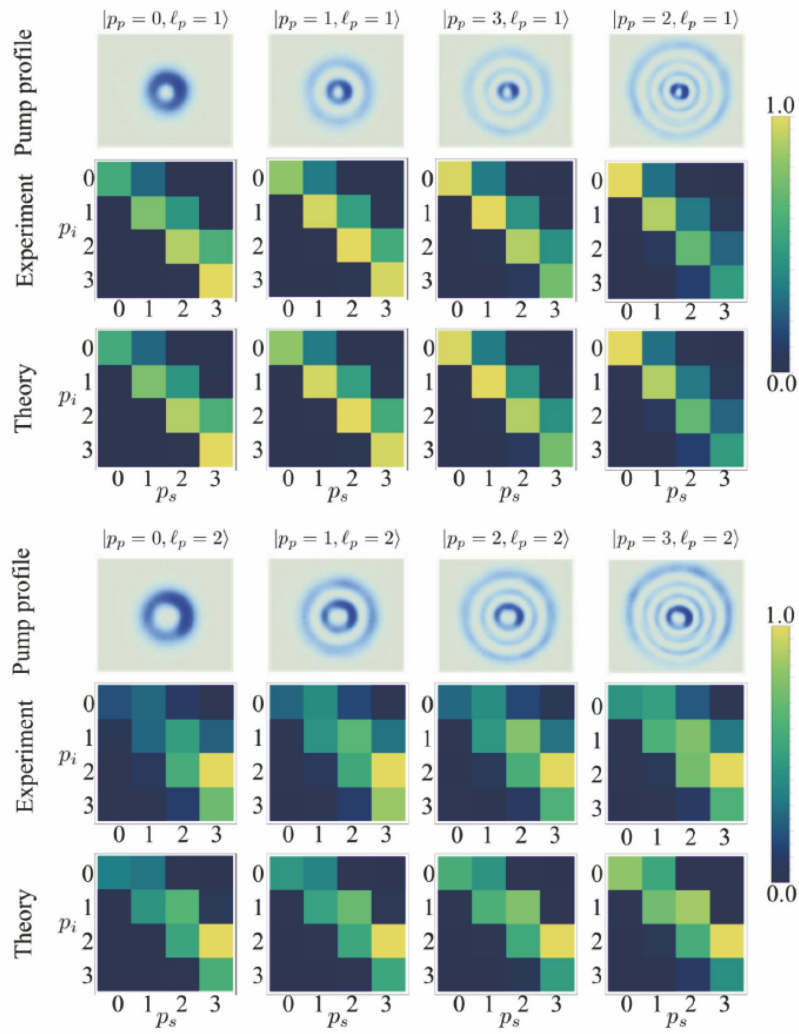


图 14 基于高阶 LG_{pl} 泵浦模式的径向模式量子相关性^[48]

Fig. 14 Quantum correlation of radial modes based on high-order LG_{pl} pump modes^[48]

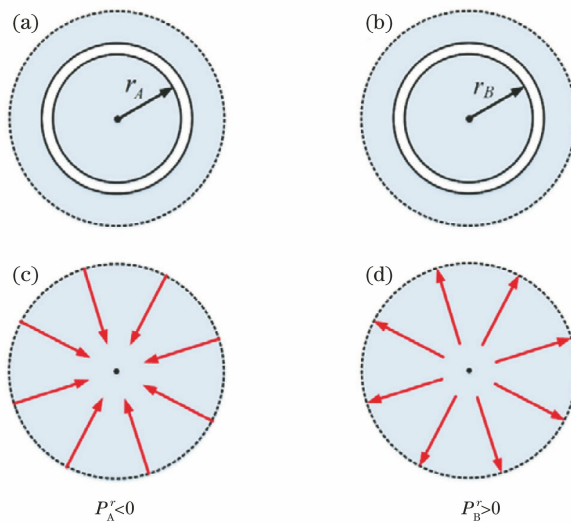


图 15 径向位置和径向动量的定义^[95]。(a)(b)径向位置；(c)(d)径向动量

Fig. 15 Definition of radial position and radial momentum^[95]. (a)(b) Radial position; (c)(d) radial momentum

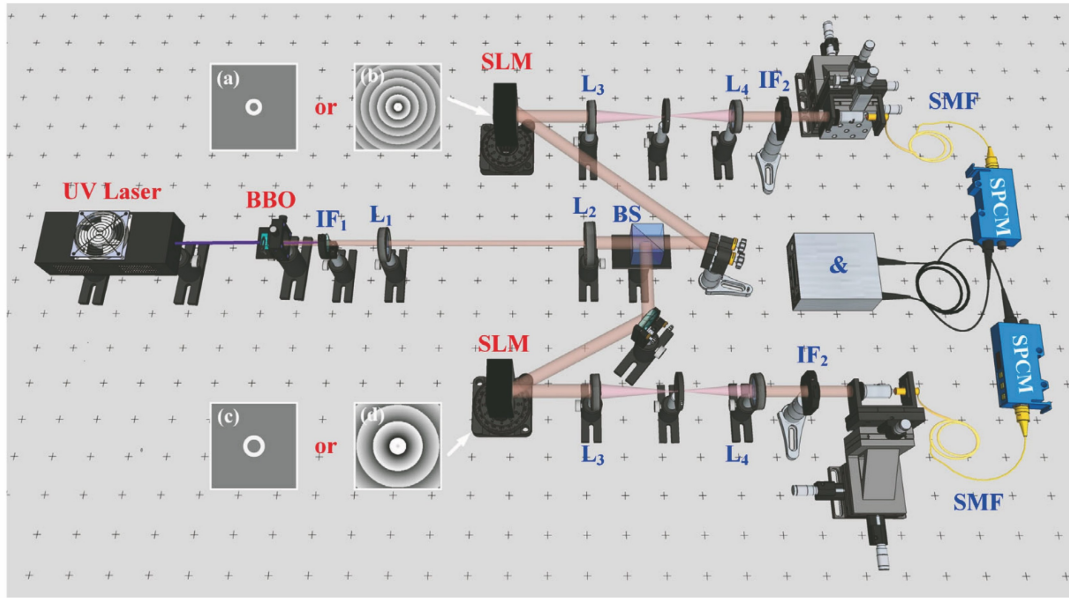


图 16 径向自由度 EPR 关联的实验装置^[95]

Fig. 16 Experimental setting of EPR correlation for radial degree of freedom^[95]

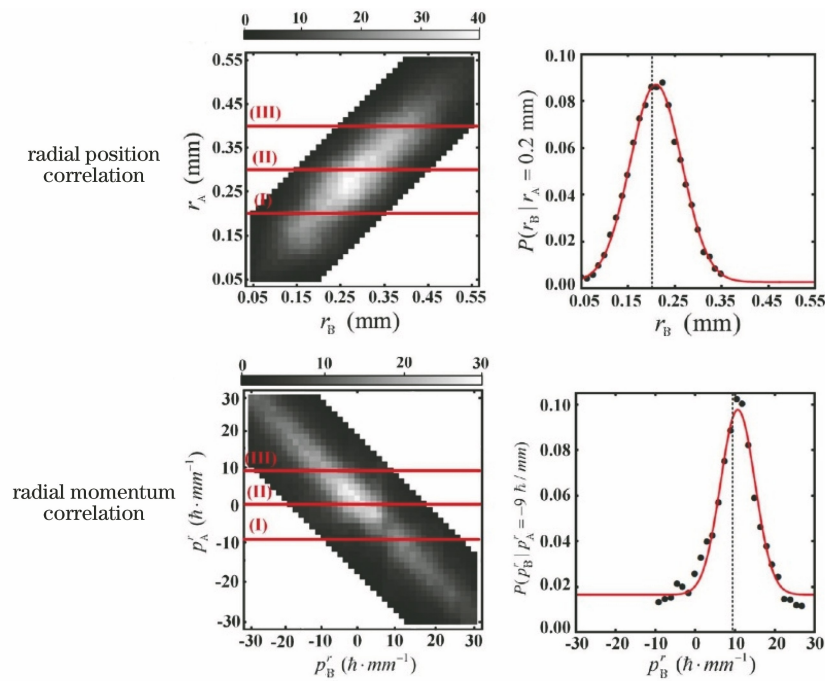


图 17 双光子径向自由度的 EPR 关联^[95]

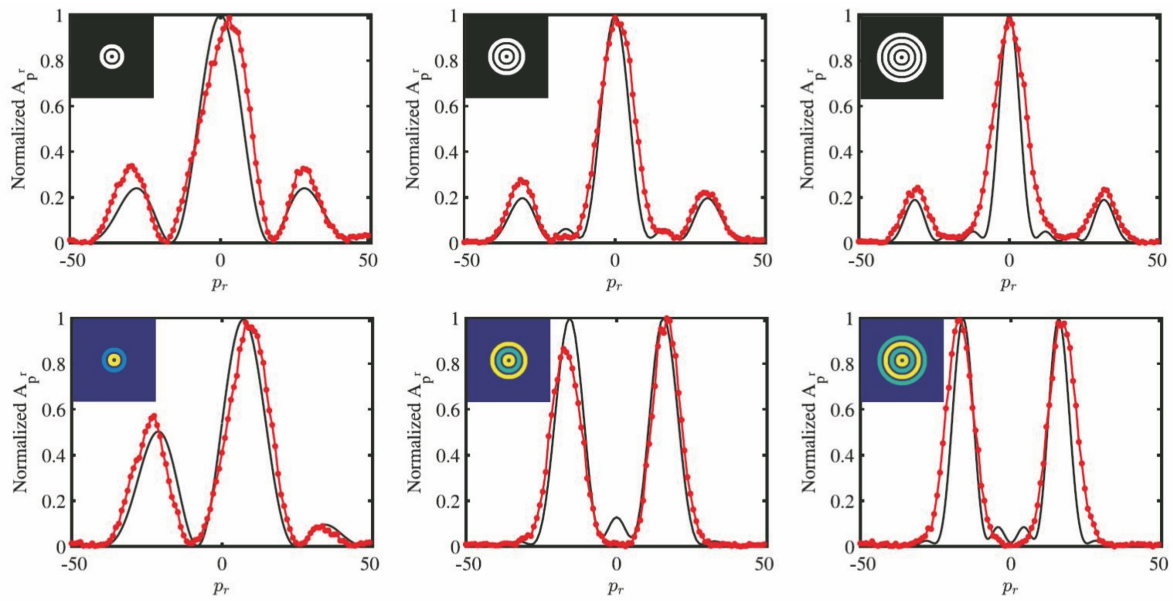
Fig. 17 EPR correlation of radial degree of freedom for two photons^[95]

联研究了径向的环衍射^[98]。先前人们已经基于角度与 OAM 的傅里叶关联设计了角衍射实验^[99-100]，即在角掩膜后观测透射光的 OAM 谱。同样地，当光束通过环掩膜后，必然能够在透射光的径向动量谱中观测到环衍射现象，实验结果如图 18 所示。在光束入射到图 18 左上角插图所展示的多环掩膜后，在径向动量谱中可以观测到明显的衍射现象，并且随着径向狭缝数量的增加，观

察到的包络线宽度明显变窄。另外，当在环形掩膜中引入不同相位后，衍射条纹将会呈现出有趣的现象，即径向动量谱的零阶分量被部分或完全抑制，而边带会变强。

5 结束语

径向模式作为光子全新的自由度，逐渐在光通信及量子信息处理领域中展现出潜在的应用前景，

图 18 径向衍射实验结果^[98]Fig. 18 Experimental results of radial diffraction^[98]

等待着人们的进一步拓展。简要地回顾了近 10 年来径向模式相关的一些重要研究进展,包括径向模式的制备、测量及其在量子力学基本问题检测、高维量子信息领域的应用研究进展。通过这些工作可以发现径向模式既可以作为一个新的光学工具箱来拓展高维的光信息编码,也可以与 OAM 复用来进一步增加实验中实际可操控的维度。无论哪种方式都展示了径向模式的重要研究价值。从径向模式在近几年的研究增量,不难看出径向模式正得到越来越多研究者的青睐,逐渐成为光通信研究的热点。当然,目前对径向模式的研究与实际应用间仍有较大的距离,故需要科学家们不断挖掘和探索。相信今后几年将成为攻克径向模式实际应用的关键时期,必将充满机遇。

参 考 文 献

- [1] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J C, et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes [J]. *Physical Review A*, 1992, 45(11): 8185-8189.
- [2] Plick W N, Krenn M. Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams[J]. *Physical Review A*, 2015, 92(6): 063841.
- [3] He H, Heckenberg N R, Rubinsztein-Dunlop H. Optical particle trapping with higher-order doughnut beams produced using high efficiency computer generated holograms[J]. *Journal of Modern Optics*, 1995, 42(1): 217-223.
- [4] Simpson N B, Dholakia K, Allen L, et al. Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner[J]. *Optics Letters*, 1997, 22(1): 52-54.
- [5] Paterson L, MacDonald M P, Arlt J, et al. Controlled rotation of optically trapped microscopic particles[J]. *Science*, 2001, 292(5518): 912-914.
- [6] Grier D G. A revolution in optical manipulation[J]. *Nature*, 2003, 424(6950): 810-816.
- [7] Jesacher A, Fürhapter S, Bernet S, et al. Shadow effects in spiral phase contrast microscopy [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(23): 233902.
- [8] Zhang W H, Wang J K, Li F S, et al. Revealing optical vortices with a small number of photons[J]. *Laser & Photonics Reviews*, 2017, 11(1): 1600163.
- [9] Qiu X D, Li F S, Zhang W H, et al. Spiral phase contrast imaging in nonlinear optics: seeing phase objects using invisible illumination [J]. *Optica*, 2018, 5(2): 208-212.
- [10] Lin F, Qiu X, Zhang W, et al. Seeing infrared optical vortex arrays with a nonlinear spiral phase filter[J]. *Optics Letters*, 2019, 44(9): 2298-2301.
- [11] Lavery M P J, Speights F C, Barnett S M, et al. Detection of a spinning object using light's orbital angular momentum[J]. *Science*, 2013, 341(6145): 537-540.
- [12] Zhang W H, Gao J S, Zhang D K, et al. Free-space remote sensing of rotation at the photon-counting level[J]. *Physical Review Applied*, 2018, 10(4): 044014.
- [13] Gibson G, Courtial J, Padgett M J, et al. Free-

- space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum [J]. *Optics Express*, 2004, 12(22): 5448-5456.
- [14] Tamburini F, Mari E, Sponselli A, et al. Encoding many channels on the same frequency through radio vorticity: first experimental test[J]. *New Journal of Physics*, 2012, 14(3): 033001.
- [15] Wang J, Yang J Y, Fazal I M, et al. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing [J]. *Nature Photonics*, 2012, 6(7): 488-496.
- [16] Bozinovic N, Yue Y, Ren Y, et al. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers [J]. *Science*, 2013, 340(6140): 1545-1548.
- [17] Li S, Wang J. A compact trench-assisted multi-orbital-angular-momentum multi-ring fiber for ultrahigh-density space-division multiplexing (19 rings \times 22 modes)[J]. *Scientific Reports*, 2014, 4: 3853.
- [18] Wang A, Zhu L, Chen S, et al. Characterization of LDPC-coded orbital angular momentum modes transmission and multiplexing over a 50-km fiber [J]. *Optics Express*, 2016, 24(11): 11716-11726.
- [19] Zhang Y, Wang J, Zhang W, et al. LED-based visible light communication for color image and audio transmission utilizing orbital angular momentum superposition modes [J]. *Optics Express*, 2018, 26(13): 17300-17311.
- [20] Nan J H, Han Y P. Dual-channel multiband vortex optical communication [J]. *Acta Optica Sinica*, 2021, 41(12): 1206001.
南久航, 韩一平. 双路多进制涡旋光通信[J]. *光学学报*, 2021, 41(12): 1206001.
- [21] Krenn M, Handsteiner J, Fink M, et al. Twisted photon entanglement through turbulent air across Vienna[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2015, 112(46): 14197-14201.
- [22] Bouchard F, Heshami K, England D, et al. Experimental investigation of high-dimensional quantum key distribution protocols with twisted photons[J]. *Quantum*, 2018, 2: 111.
- [23] Bouchard F, Hufnagel F, Koutn D, et al. Quantum process tomography of a high-dimensional quantum communication channel [J]. *Quantum*, 2019, 3: 138.
- [24] Sit A, Bouchard F, Fickler R, et al. High-dimensional intracity quantum cryptography with structured photons[J]. *Optica*, 2017, 4(9): 1006-1010.
- [25] Bouchard F, Sit A, Hufnagel F, et al. Quantum cryptography with twisted photons through an outdoor underwater channel [J]. *Optics Express*, 2018, 26(17): 22563-22573.
- [26] Zhang Y, Agnew M, Roger T, et al. Simultaneous entanglement swapping of multiple orbital angular momentum states of light [J]. *Nature Communications*, 2017, 8(1): 632.
- [27] Chen L X, Zhang Y Y. Research progress on preparation, manipulation, and remote sensing applications of high-order orbital angular momentum of photons[J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(16): 164210.
陈理想, 张远颖. 光子高阶轨道角动量制备、调控及传感应用研究进展[J]. *物理学报*, 2015, 64(16): 164210.
- [28] Yang W D, Qiu X D, Chen L X. Research progress in detection, imaging, sensing, and micromanipulation application of orbital angular momentum of beams[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2020, 47(5): 0500013.
杨伟东, 邱晓东, 陈理想. 光轨道角动量分离、成像、传感及微操控应用研究进展[J]. *中国激光*, 2020, 47(5): 0500013.
- [29] Guo J J, Guo B H, Cheng G M, et al. Research progress on photon orbital angular momentum in quantum communication applications [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2012, 49(8): 080003.
郭建军, 郭邦红, 程广明, 等. 光子轨道角动量在量子通信中应用的研究进展[J]. *激光与光电子学进展*, 2012, 49(8): 080003.
- [30] Plick W N, Lapkiewicz R, Ramelow S, et al. The forgotten quantum number: a short note on the radial modes of Laguerre-Gauss beams [EB/OL]. (2013-06-27)[2021-05-20]. <https://arxiv.org/abs/1306.6517>.
- [31] Karimi E, Santamato E. Radial coherent and intelligent states of paraxial wave equation [J]. *Optics Letters*, 2012, 37(13): 2484-2486.
- [32] Krenn M, Handsteiner J, Fink M, et al. Twisted light transmission over 143 km[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2016, 113(48): 13648-13653.
- [33] Zhao N B, Li X Y, Li G F, et al. Capacity limits of spatially multiplexed free-space communication[J]. *Nature Photonics*, 2015, 9(12): 822-826.
- [34] Karimi E, Boyd R W, de la Hoz P, et al. Radial quantum number of Laguerre-Gauss modes [J]. *Physical Review A*, 2014, 89(6): 063813.
- [35] Mendoza-Hernández J, Arroyo-Carrasco M L, Iturbe-Castillo M D, et al. Laguerre-Gauss beams versus Bessel beams showdown: peer comparison

- [J]. *Optics Letters*, 2015, 40(16): 3739-3742.
- [36] Savelyev D A, Khonina S N, Golub I. Tight focusing of higher orders Laguerre-Gaussian modes [C]. *AIP Conference Proceedings*, 2016, 1724(1): 020021.
- [37] Granata M, Buy C, Ward R, et al. Higher-order Laguerre-Gauss mode generation and interferometry for gravitational wave detectors[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105(23): 231102.
- [38] Arlt J, Dholakia K, Allen L, et al. The production of multiringed Laguerre-Gaussian modes by computer-generated holograms [J]. *Journal of Modern Optics*, 1998, 45(6): 1231-1237.
- [39] Inoue T, Tanaka H, Fukuchi N, et al. LCOS spatial light modulator controlled by 12-bit signals for optical phase-only modulation[J]. *Proceedings of SPIE*, 2007, 6487: 64870Y.
- [40] Matsumoto N, Ando T, Inoue T, et al. Generation of high-quality higher-order Laguerre-Gaussian beams using liquid-crystal-on-silicon spatial light modulators[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2008, 25(7): 1642-1651.
- [41] Bolduc E, Bent N, Santamato E, et al. Exact solution to simultaneous intensity and phase encryption with a single phase-only hologram [J]. *Optics Letters*, 2013, 38(18): 3546-3549.
- [42] Ruffato G, Massari M, Carli M, et al. Spiral phase plates with radial discontinuities for the generation of multiring orbital angular momentum beams: fabrication, characterization, and application [J]. *Optical Engineering*, 2015, 54(11): 111307.
- [43] Mao H D, Ren Y X, Yu Y, et al. Broadband meta-converters for multiple Laguerre-Gaussian modes [J]. *Photonics Research*, 2021, 9(9): 1689-1698.
- [44] Trichili A, Rosales-Guzmán C, Dudley A, et al. Optical communication beyond orbital angular momentum[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 27674.
- [45] Xie G, Ren Y, Yan Y, et al. Experimental demonstration of a 200-Gbit/s free-space optical link by multiplexing Laguerre-Gaussian beams with different radial indices[J]. *Optics Letters*, 2016, 41(15): 3447-3450.
- [46] Guo Z Y, Wang Z K, Dedo M I, et al. The orbital angular momentum encoding system with radial indices of Laguerre-Gaussian beam [J]. *IEEE Photonics Journal*, 2018, 10(5): 1-11.
- [47] Wang X H, Song Y X, Pang F F, et al. High-dimension data coding and decoding by radial mode and orbital angular momentum mode of a vortex beam in free space [J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2021, 137: 106352.
- [48] D'Errico A, Hufnagel F, Miatto F, et al. Full-mode characterization of correlated photon pairs generated in spontaneous downconversion [J]. *Optics Letters*, 2021, 46(10): 2388-2391.
- [49] Qassim H, Miatto F M, Torres J P, et al. Limitations to the determination of a Laguerre-Gauss spectrum via projective, phase-flattening measurement[J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2014, 31(6): A20-A23.
- [50] Bouchard F, Valencia N H, Brandt F, et al. Measuring azimuthal and radial modes of photons [J]. *Optics Express*, 2018, 26(24): 31925-31941.
- [51] Choudhary S, Sampson R, Miyamoto Y, et al. Measurement of the radial mode spectrum of photons through a phase-retrieval method [J]. *Optics Letters*, 2018, 43(24): 6101-6104.
- [52] Miatto F M, Yao A M, Barnett S M. Full characterization of the quantum spiral bandwidth of entangled biphotons[J]. *Physical Review A*, 2011, 83(3): 033816.
- [53] Salakhutdinov V D, Eliel E R, Löffler W. Full-field quantum correlations of spatially entangled photons [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 108(17): 173604.
- [54] Zhang D K, Qiu X D, Zhang W H, et al. Violation of a bell inequality in two-dimensional state spaces for radial quantum number[J]. *Physical Review A*, 2018, 98(4): 042134.
- [55] Kotlyar V V, Khonina S N, Almazov A A, et al. Elliptic Laguerre-Gaussian beams[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2006, 23(1): 43-56.
- [56] Abouraddy A F, Yarnall T M, Saleh B E A. Angular and radial mode analyzer for optical beams [J]. *Optics Letters*, 2011, 36(23): 4683-4685.
- [57] Mazilu M, Mourka A, Vettenburg T, et al. Simultaneous determination of the constituent azimuthal and radial mode indices for light fields possessing orbital angular momentum [J]. *Applied Physics Letters*, 2012, 100(23): 231115.
- [58] Li F, Jiang Y S, Tang H, et al. Measuring the azimuthal and radial indexes of Laguerre-Gaussian beams [J]. *Optoelectronics Letters*, 2010, 6(3): 222-225.
- [59] Wang B, Li P Y, Chen T, et al. Accurately identifying mode indices of Laguerre-Gaussian beams via weak measurements [J]. *Journal of Optics*, 2017, 19(5): 055603.
- [60] Li Y X, Han Y P, Cui Z W, et al. Simultaneous identification of the azimuthal and radial mode indices of Laguerre-Gaussian beams using a spiral phase grating [J]. *Journal of Physics D*, 2020, 53

(8): 085106.

- [61] Zhao S P, Chen S Q, Wang X, et al. Measuring the complex spectrum of orbital angular momentum and radial index with a single-pixel detector[J]. *Optics Letters*, 2020, 45(21): 5990.
- [62] Leach J, Padgett M J, Barnett S M, et al. Measuring the orbital angular momentum of a single photon[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 88(25): 257901.
- [63] Fu D Z, Jia J L, Zhou Y N, et al. Realisation of orbital angular momentum sorter of photons based on Sagnac interferometer[J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(13): 130704.
付栋之, 贾俊亮, 周英男, 等. 利用 Sagnac 干涉仪实现光子轨道角动量分束器[J]. *物理学报*, 2015, 64(13): 130704.
- [64] Zhang W H, Qi Q Q, Zhou J, et al. Mimicking faraday rotation to sort the orbital angular momentum of light[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(15): 153601.
- [65] Berkhout G C G, Lavery M P J, Courtial J, et al. Efficient sorting of orbital angular momentum states of light[J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105(15): 153601.
- [66] O'Sullivan M N, Mirhosseini M, Malik M, et al. Near-perfect sorting of orbital angular momentum and angular position states of light[J]. *Optics Express*, 2012, 20(22): 24444-24449.
- [67] Mirhosseini M, Malik M, Shi Z, et al. Efficient separation of the orbital angular momentum eigenstates of light[J]. *Nature Communications*, 2013, 4: 2781.
- [68] Li C, Zhao S M. Efficient separating orbital angular momentum mode with radial varying phase[J]. *Photonics Research*, 2017, 5(4): 267-270.
- [69] Zhou Y, Mirhosseini M, Fu D, et al. Sorting photons by radial quantum number[J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(26): 263602.
- [70] Gu X M, Krenn M, Erhard M, et al. Gouy phase radial mode sorter for light: concepts and experiments[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(10): 103601.
- [71] Fu D Z, Zhou Y Y, Qi R, et al. Realization of a scalable Laguerre-Gaussian mode sorter based on a robust radial mode sorter[J]. *Optics Express*, 2018, 26(25): 33057-33065.
- [72] Zhou Y, Mirhosseini M, Oliver S, et al. Using all transverse degrees of freedom in quantum communications based on a generic mode sorter[J]. *Optics Express*, 2019, 27(7): 10383-10394.
- [73] Morizur J F, Nicholls L, Jian P, et al. Programmable unitary spatial mode manipulation[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2010, 27(11): 2524-2531.
- [74] Fontaine N K, Ryf R, Chen H S, et al. Design of high order mode-multiplexers using multiplane light conversion [C] // 2017 European Conference on Optical Communication (ECOC), September 17-21, 2017, Gothenburg, Sweden. New York: IEEE Press, 2017: 17749246.
- [75] Fontaine N K, Ryf R, Chen H, et al. Laguerre-Gaussian mode sorter[J]. *Nature Communications*, 2019, 10: 1865.
- [76] Fickler R, Ginoya M, Boyd R W. Custom-tailored spatial mode sorting by controlled random scattering[J]. *Physical Review B*, 2017, 95(16): 161108.
- [77] Volyar A, Bretsko M, Akimova Y, et al. Digital sorting perturbed Laguerre-Gaussian beams by radial numbers[J]. *Journal of the Optical Society of America A*, 2020, 37(6): 959-968.
- [78] Brandt F, Hiekkamäki M, Bouchard F, et al. High-dimensional quantum gates using full-field spatial modes of photons[J]. *Optica*, 2020, 7(2): 98-107.
- [79] Paterson C. Atmospheric turbulence and orbital angular momentum of single photons for optical communication[J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(15): 153901.
- [80] Tyler G A, Boyd R W. Influence of atmospheric turbulence on the propagation of quantum states of light carrying orbital angular momentum[J]. *Optics Letters*, 2009, 34(2): 142-144.
- [81] Boyd R W, Rodenburg B, Mirhosseini M, et al. Influence of atmospheric turbulence on the propagation of quantum states of light using plane-wave encoding[J]. *Optics Express*, 2011, 19(19): 18310-18317.
- [82] Ren Y X, Huang H, Xie G D, et al. Atmospheric turbulence effects on the performance of a free space optical link employing orbital angular momentum multiplexing[J]. *Optics Letters*, 2013, 38(20): 4062-4065.
- [83] Xie G D, Li L, Ren Y X, et al. Performance metrics and design considerations for a free-space optical orbital-angular-momentum-multiplexed communication link[J]. *Optica*, 2015, 2(4): 357-365.
- [84] Ren Y X, Wang Z, Xie G D, et al. Free-space optical communications using orbital-angular-momentum multiplexing combined with MIMO-based spatial multiplexing[J]. *Optics Letters*, 2015, 40(18): 4210-4213.
- [85] Wei H Y, Yan J L, Jia P, et al. Spiral phase

- spectrum of focused Bessel beams in atmospheric turbulence channel [J]. *Acta Optica Sinica*, 2020, 40(24): 2401001.
- 韦宏艳, 闫玠霖, 贾鹏, 等. 聚焦贝塞尔光束在大气湍流中的螺旋相位谱 [J]. *光学学报*, 2020, 40(24): 2401001.
- [86] Zhao L, Hao Y, Chen L, et al. High-accuracy mode recognition method in orbital angular momentum optical communication system [J]. *Chinese Optics Letters*, 2022, 20(2): 020601.
- [87] Lavery M P J, Peuntinger C, Günthner K, et al. Free-space propagation of high-dimensional structured optical fields in an urban environment [J]. *Science Advances*, 2017, 3(10): e1700552.
- [88] Krenn M, Fickler R, Fink M, et al. Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna [J]. *New Journal of Physics*, 2014, 16(11): 113028.
- [89] Wang F M, Zeng P, Wang X L, et al. Towards practical high-speed high dimensional quantum key distribution using partial mutual unbiased basis of photon's orbital angular momentum [EB/OL]. (2018-01-19)[2021-05-20]. <https://arxiv.org/abs/1801.06582>.
- [90] Li L, Xie G D, Yan Y, et al. Power loss mitigation of orbital-angular-momentum-multiplexed free-space optical links using nonzero radial index Laguerre-Gaussian beams [J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2016, 34(1): 1-6.
- [91] Qiu S, Ren Y, Liu T, et al. Rotational Doppler effect detection by LG beams with a nonzero radial index [J]. *Optics Express*, 2021, 29(7): 10275-10284.
- [92] Krenn M, Huber M, Fickler R, et al. Generation and confirmation of a (100×100) -dimensional entangled quantum system [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2014, 111(17): 6243-6247.
- [93] Valencia N H, Srivastav V, Leedumrongwatthanakun S, et al. Entangled ripples and twists of light: radial and azimuthal Laguerre-Gaussian mode entanglement [J]. *Journal of Optics*, 2021, 23(10): 104001.
- [94] Karimi E, Giovannini D, Bolduc E, et al. Exploring the quantum nature of the radial degree of freedom of a photon via Hong-Ou-Mandel interference [J]. *Physical Review A*, 2014, 89: 013829.
- [95] Chen L X, Ma T L, Qiu X D, et al. Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using radial position and radial momentum variables [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(6): 060403.
- [96] Howell J C, Bennink R S, Bentley S J, et al. Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using momentum- and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 92(21): 210403.
- [97] Leach J, Jack B, Romero J, et al. Quantum correlations in optical angle-orbital angular momentum variables [J]. *Science*, 2010, 329(5992): 662-665.
- [98] Ma T L, Zhang D K, Qiu X D, et al. Radial diffraction of light in the radial momentum state space [J]. *Optics Letters*, 2020, 45(18): 5152-5155.
- [99] Jack B, Padgett M J, Franke-Arnold S. Angular diffraction [J]. *New Journal of Physics*, 2008, 10(10): 103013.
- [100] Jha A K, Leach J, Jack B, et al. Angular two-photon interference and angular two-qubit states [J]. *Physical review letters*, 2010, 104(1): 010501.