

## 双腔机械量子陀螺仪的热噪声抑制策略

王静宇<sup>1\*</sup>, 聂敏<sup>1</sup>, 杨光<sup>1</sup>, 张美玲<sup>1</sup>, 孙爱晶<sup>1</sup>, 裴昌幸<sup>2</sup><sup>1</sup>西安邮电大学通信与信息工程学院, 陕西 西安 710121;<sup>2</sup>西安电子科技大学综合业务网国家重点实验室, 陕西 西安 710071

**摘要** 提出一种机械振子基态冷却策略来抑制受外界热环境激发而产生的热噪声。首先,建立了旋转角速度与输出光场信号振幅的定量关系;其次,讨论了辐射压力涨落谱对机械振子声子数的影响;最后,结合冷却率和稳态声子数,对系统参数进行优化,使机械振子冷却至基态,即稳态声子数小于1。理论分析和仿真结果表明,辐射压力涨落谱的峰值可以增强冷却过程,谷值可以抑制加热过程。双腔量子陀螺仪模型可使机械振子达到冷却效果,稳态声子数减小至0.19,从而降低系统的热噪声。

**关键词** 量子光学; 基态冷却; 光机械系统; 陀螺仪

中图分类号 O431 文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS202242.2327002

## Thermal Noise Suppression Strategy for Dual-Cavity Mechanical Quantum Gyroscope

Wang Jingyu<sup>1\*</sup>, Nie Min<sup>1</sup>, Yang Guang<sup>1</sup>, Zhang Meiling<sup>1</sup>, Sun Aijing<sup>1</sup>, Pei Changxing<sup>2</sup><sup>1</sup>School of Communications and Information Engineering, Xi'an University of Posts & Telecommunications, Xi'an 710121, Shaanxi, China;<sup>2</sup>State Key Laboratory of Integrated Services Networks, Xidian University, Xi'an 710071, Shaanxi, China

**Abstract** A ground-state cooling strategy for the mechanical oscillator is proposed to suppress the thermal noise excited by the external thermal environment. For this purpose, the quantitative relationship between the rotation angular velocity and the amplitude of the output light field signal is determined. Then, the influence of the radiation pressure-induced fluctuation spectrum on the number of phonons in the mechanical oscillator is discussed. Finally, the cooling rate and the number of steady-state phonons are investigated to optimize the system parameters and thereby cool the mechanical oscillator to its ground state, that is, to the extent that the number of steady-state phonons is less than 1. Theoretical analysis and simulation results show that the peak value of the radiation pressure-induced fluctuation spectrum can be leveraged to strengthen the cooling process, and its valley value can be utilized to suppress the heating process. The proposed dual-cavity quantum gyroscope model can cool the mechanical oscillator by reducing the number of steady-state phonons to 0.19 and ultimately reduce the thermal noise in the system.

**Key words** quantum optics; ground-state cooling; optomechanical system; gyroscope

## 1 引言

陀螺仪(gyroscope)是惯性导航系统的核心器件,可以测量载体相对惯性空间的旋转角速度,从而感测和维持载体的方向<sup>[1]</sup>。随着科技不断进步,采用新原理、新技术发展新型陀螺仪是陀螺技术研究的一个重要方向<sup>[2]</sup>。目前,基于Sagnac效应的光纤陀螺仪和激

光陀螺仪精度较高,但性能受光纤长度、闭环面积、激光线宽等因素的限制<sup>[3-4]</sup>;基于哥氏效应的微机电陀螺仪体积小,但精度不高<sup>[2]</sup>;基于量子力学原理的量子陀螺仪是一种新型角速度测量装置,相比其他类型的陀螺仪具有更高的灵敏度<sup>[5]</sup>。一方面,由于量子领域的物质波干涉对旋转检测有较高的灵敏度,超流体<sup>4</sup>He物质波和冷原子物质波分别被应用于超流体陀螺仪和

收稿日期: 2022-03-31; 修回日期: 2022-05-18; 录用日期: 2022-06-16

基金项目: 国家自然科学基金(61971348, 61201194)、陕西省国际科技合作与交流计划项目(2015KW-013)、陕西省自然科学基金基础研究计划(2021JM-464)

通信作者: lanrao\_1@163.com

冷原子陀螺仪中<sup>[6-7]</sup>;另一方面,结合光机械系统<sup>[8]</sup>的量子陀螺仪相比其他类型陀螺仪具有更高的灵敏度且不依赖于光路尺寸,更容易在微型结构中实现<sup>[9]</sup>。

光机械系统是基于辐射压力<sup>[10]</sup>的原理,通过辐射压力将光腔和机械振子进行耦合,是目前量子光学领域的一个研究热点。光机械腔对作用于它的外力十分敏感,在探测微小质量、引力波、位移、弱力等方面展现出巨大的优势<sup>[11-15]</sup>。基于光机械腔在检测方面的有效性,有学者提出光机械系统可应用于旋转检测中。Davuluri<sup>[16]</sup>提出光机械腔由于可检测机械振子自由度的微小变化,可以设计成为非常灵敏的旋转探测器。Bhattacharya<sup>[17]</sup>从理论上探讨了旋转纳米粒子与带有轨道角动量腔模的光机械耦合方案,证明了通过零差检测可以检测纳米粒子的旋转频率。最近,Davuluri和Li<sup>[18]</sup>提出使用光机械系统的单向陀螺仪,将陀螺内的激光场限制在一个方向来避免环形激光陀螺锁模问题。

机械振子容易受到外界热环境激发,从而产生热噪声,而热噪声是光机械旋转检测模型的重要噪声来源,同时光机械系统量子特性的展现也必须抑制不可控的热涨落<sup>[19]</sup>,因此有必要改善旋转检测模型来抑制热噪声。目前,对机械模式冷却所能达到的最好效果就是使机械振子处于或者接近于基态,一般是指机械振子的稳态声子数小于1<sup>[20]</sup>。双腔机械量子陀螺仪模型与Davuluri等<sup>[16]</sup>提出的旋转检测模型相似,但双腔机械量子陀螺仪模型实现了对机械振子的基态冷却,降低了模型的热噪声。

本文提出一种用于抑制量子陀螺仪热噪声的机械振子基态冷却策略。常见的机械振子自冷却方案是在可分辨边带的条件下实现,即光腔的衰减率远小于机械振子的频率<sup>[21]</sup>。双腔机械量子陀螺仪模型引入辅助光腔,并将其与拥有一个可移动腔镜的法布里-珀罗腔<sup>[11]</sup>直接耦合,腔内光场产生的辐射压力使机械模式发生微小的振动,从而改变光腔的长度。腔长的变化使腔内光子数改变,从而影响作用在机械模式上的辐射压力,使双腔机械系统在不可分辨的边界条件下也能实现基态冷却。

## 2 系统哈密顿量和郎之万方程

图1所示为所设计的双腔机械量子陀螺仪模型,整个系统被放置在一个旋转角速度为 $\dot{\theta}$ 的工作台上,使旋转轴穿过分束镜(BS)的中心,且光腔沿着工作台的半径被放置在一个可移动的平台。一束光场强度为 $a_0$ 的激光从激光器射出,经过50:50分束镜被分为两束,光场强度分别为 $c_{in} = ia_0/\sqrt{2}$ ( $i$ 为虚数单位)和 $a_1 = a_0/\sqrt{2}$ ,其中光场强度为 $c_{in}$ 的激光输入双光腔系统,光场强度为 $a_1$ 的激光射向反射镜(FM)。双光腔系统和反射镜输出的光场强度为 $c_{out}$ 和 $a_2$ 的激光再次经过50:50分束镜,重新组合产生两束新的光 $d_1 = (c_{out} + ia_2)/\sqrt{2}$ 和 $d_2 = (a_2 + ic_{out})/\sqrt{2}$ ,并分别被探测器 $D_1$ 和 $D_2$ 测量。

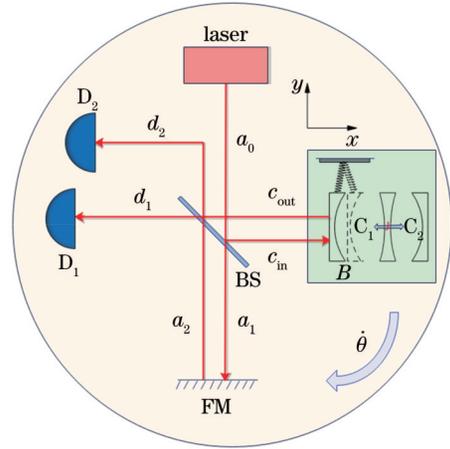


图1 双光腔机械量子陀螺仪示意图

Fig. 1 Schematic of a dual-cavity optomechanical quantum gyroscope

所提模型使用由两个光腔和机械振子组成的双腔机械系统,机械振子是指一端悬挂在弹簧上的可移动腔镜 $B$ ,当受到光腔 $C_1$ 内光场的辐射压力或科氏力作用时腔镜 $B$ 会发生微小的振动,其位移发生变化。机械振子和光腔 $C_1$ 通过辐射压力进行耦合,而辅助光腔 $C_2$ 与光腔 $C_1$ 通过交换光子耦合(类似于倏逝场耦合),光腔 $C_2$ 与 $C_1$ 间的耦合强度为 $J$ , $c_{in}$ 和 $c_{out}$ 分别为双腔机械系统的驱动和输出光场强度。双腔机械系统直接测量的对象是旋转坐标系下由科氏力引起的机械振子位移,当陀螺仪模型以角速度 $\dot{\theta}$ 旋转时,科氏力沿 $x$ 轴作用于机械振子(可移动的腔镜 $B$ )。由于机械振子振动,系统输出端会得到与平台旋转角速度成正比的输出信号。

所提双腔光机械系统的哈密顿量可以表示为

$$H = \hbar\Delta_1 c_1^\dagger c_1 + \hbar\Delta_2 c_2^\dagger c_2 + \hbar\omega_m b^\dagger b + i\hbar\epsilon(c_1^\dagger - c_1) - \hbar g_0 c_1^\dagger c_1 (b + b^\dagger) + \hbar J (c_1^\dagger c_2 + c_2^\dagger c_1), \quad (1)$$

式中: $\hbar$ 为约化普朗克常数; $c_i$ ( $i=1,2$ )和 $\omega_i$ 分别为光腔 $C_i$ 的湮灭算符和频率; $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_c$ , $\Delta_2 = \omega_2 - \omega_c$ 分别为光腔 $C_1$ 和 $C_2$ 对驱动激光场的频率失谐量; $\omega_c$ 为激光的频率; $b$ 和 $\omega_m$ 分别为机械振子的湮灭算符和固有频率; $\epsilon = \sqrt{2k_1} \bar{c}_{in}$ 为驱动项系数,其中 $k_1$ 为光腔 $C_1$ 的衰减率, $\bar{c}_{in}$ 为驱动激光场的振幅; $g_0 = g\sqrt{\hbar/2m\omega_m}$ 为光力耦合系数,其中 $m$ 为机械振子的质量, $g = \omega_1/L_1$ 为光力耦合常数, $L_i$ 为光腔 $C_i$ 的初始长度; $J$ 为光腔耦合常数。式(1)等号右边的前两项描述的是左、右光腔内的光场,第三项表示机械振子的能量,第四项描述激光场驱动光腔系统的能量,第五项为机械振子与光腔 $C_1$ 的耦合项,第六项为光腔耦合项,且该光腔耦合项主要依靠左、右光腔间交换光子产生相互作用。例如: $c_1^\dagger c_2$ 可以理解为在光腔 $C_1$ 产生一个算符,而光腔 $C_2$ 湮灭一个算符,即光子由光腔 $C_2$ 传递给光腔 $C_1$ 。

量子光力学系统通常都是开放系统,它们会与具有多个自由度的外部环境热库发生相互作用,热库对

系统的作用是通过加入明显的随机项来修正系统的运动方程<sup>[22-23]</sup>。在光机械系统中,热库对光机械系统的影响通常体现在郎之万方程的噪声项和耗散项中<sup>[8,22]</sup>。当光机械系统以角速度 $\dot{\theta}$ 旋转时,运动方程中要考虑

科氏效应,科氏力<sup>[9]</sup>沿 $x$ 轴作用于机械振子。光机械系统在可移动平台上受到 $y$ 方向的正弦驱动,机械振子沿 $y$ 轴的瞬时速度为 $\dot{y}$ ,则该描述系统动力学的量子郎之万方程为

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = -i\Delta_1 c_1 - iJc_2 + \varepsilon + ig_0(b + b^\dagger)c_1 - k_1 c_1 + \sqrt{2k_1} E_1 \\ \dot{c}_2 = -i\Delta_2 c_2 - iJc_1 - k_2 c_2 + \sqrt{2k_2} E_2 \\ \dot{b} = -i\omega_m b + ig_0 c_1^\dagger c_1 - \gamma b + \sqrt{2\gamma} M + \frac{2i}{\sqrt{2\hbar m \omega_m}} m \dot{y} \dot{\theta} \end{cases}, \quad (2)$$

式中: $E_1, E_2, M$ 分别为左、右光腔和机械振子的噪声算符; $k_1, k_2, \gamma$ 分别为左、右光腔和机械振子的衰减率。式(2)第3个公式等号右边的最后一项代表经典的科氏力。噪声算符的相关函数<sup>[8,24]</sup>可表示为

$$\begin{cases} \langle E_i^\dagger(t) E_j(t') \rangle = 0, \langle E_i(t) E_j^\dagger(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t-t') \\ \langle M^\dagger(t) M(t') \rangle = \bar{n}_{\text{th}} \delta(t-t'), \langle M(t) M^\dagger(t') \rangle = (\bar{n}_{\text{th}} + 1) \delta(t-t') \end{cases}, \quad (3)$$

式中: $t, t'$ 代表不同时刻; $\delta$ 为狄拉克函数; $\bar{n}_{\text{th}} = 1 / \left\{ \exp \left[ \hbar \omega_m / (k_B T) \right] - 1 \right\}$ 为热平均声子数,其中 $k_B$ 为玻尔兹曼常数, $T$ 为外界环境温度。系统经过长时间演化后趋于稳态,经过式(2)取平均值得到平均值演化方程,将科氏力以及噪声算符当作一阶涨落项处理。由平均值演化方程得到系统的稳态平均值为

$$\begin{cases} \bar{c}_1 = \frac{\varepsilon}{i\Delta'_1 + k_1} = \frac{\sqrt{2k_1} \bar{c}_{\text{in}}}{i\Delta'_1 + k_1} \\ \bar{b} = \frac{ig_0 \bar{c}_1^2}{i\omega_m + \gamma} \\ \bar{c}_2 = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

式中: $\Delta'_1 = \Delta_1 - g_0(\bar{b}^\dagger + \bar{b})$ 。将涨落算符写为算符和稳态平均值之差的形式: $\delta c_1 = c_1 - \bar{c}_1, \delta c_2 = c_2 - \bar{c}_2, \delta b = b - \bar{b}$ ,代入式(2)进行线性化近似处理,同时忽略高阶涨落项,得到涨落算符的方程,即

$$\begin{cases} \delta \dot{c}_1 = -i\Delta'_1 \delta c_1 - iJ \delta c_2 - k_1 \delta c_1 + ig_0 \bar{c}_1 (\delta b + \delta b^\dagger) + \sqrt{2k_1} E_1 \\ \delta \dot{c}_2 = -i\Delta_2 \delta c_2 - iJ \delta c_1 - k_2 \delta c_2 + \sqrt{2k_2} E_2 \\ \delta \dot{b} = -i\omega_m \delta b - \gamma \delta b + \sqrt{2\gamma} M + ig_0 (\delta c_1 \bar{c}_1^\dagger + \bar{c}_1 \delta c_1^\dagger) + \frac{2i}{\sqrt{2\hbar m \omega_m}} m \dot{y} \dot{\theta} \end{cases}. \quad (5)$$

根据式(5),可以得到双腔机械系统的有效线性哈密顿方程:

$$H' = \hbar \Delta'_1 \delta c_1^\dagger \delta c_1 + \hbar \Delta'_2 \delta c_2^\dagger \delta c_2 + \hbar \omega_m \delta b^\dagger \delta b - \hbar g_0 (\delta c_1^\dagger + \delta c_1) (\delta b + \delta b^\dagger) + \hbar J (\delta c_1^\dagger \delta c_2 + \delta c_2^\dagger \delta c_1). \quad (6)$$

选择采用傅里叶变换的方法求解式(5)(推导过程见附录),根据输入和输出关系<sup>[23,25]</sup>  $c_{\text{out}} = \sqrt{2k_1} c_1 - c_{\text{in}}$ ,且调整激光频率使有效失谐 $\Delta'_1 = 0$ (此时光腔 $C_1$ 的零阶平均值 $\bar{c}_1 = \sqrt{2/k_1} \bar{c}_{\text{in}}$ ),可以得到双腔机械系统输出场的频域解:

$$\begin{cases} \bar{c}_{\text{out}} = \sqrt{2k_1} \bar{c}_1 - \bar{c}_{\text{in}} = \bar{c}_{\text{in}}, \\ \begin{cases} \delta c_{\text{out}}(\omega) = (2b_{11}k_1 - 1)E_1(\omega) + 2b_{12}k_1 E_1^\dagger(-\omega) + 2b_{13}\sqrt{k_1 k_2} E_2(\omega) + \\ 2b_{14}\sqrt{k_1 k_2} E_2^\dagger(-\omega) + 2b_{15}\sqrt{k_1 \gamma} M(\omega) + 2b_{16}\sqrt{k_1 \gamma} M^\dagger(-\omega) + \sqrt{\frac{k_1}{\hbar m \omega_m}} \frac{g_0 \bar{c}_1}{\varphi_1} F(2m\dot{y}\dot{\theta}) \left( \frac{1}{\varphi_6} - \frac{1}{\varphi_5} \right) \\ \delta c_{\text{out}}^\dagger(-\omega) = 2b_{21}k_1 E_1(\omega) + (2b_{22} - 1)k_1 E_1^\dagger(-\omega) + 2b_{23}\sqrt{k_1 k_2} E_2(\omega) + \\ 2b_{24}\sqrt{k_1 k_2} E_2^\dagger(-\omega) + 2b_{25}\sqrt{k_1 \gamma} M(\omega) + 2b_{26}\sqrt{k_1 \gamma} M^\dagger(-\omega) + \sqrt{\frac{k_1}{\hbar m \omega_m}} \frac{g_0 \bar{c}_1^\dagger}{\varphi_2} F(2m\dot{y}\dot{\theta}) \left( \frac{1}{\varphi_5} - \frac{1}{\varphi_6} \right) \end{cases} \end{cases}, \quad (7)$$

式中: $\varphi_1 = i\Delta'_1 + k_1 + i\omega, \varphi_2 = -i\Delta'_1 + k_1 + i\omega; F(2m\dot{y}\dot{\theta})$ 为傅里叶变换后的科氏力; $\varphi_5 = i\omega_m + \gamma + i\omega, \varphi_6 = -i\omega_m + \gamma + i\omega; b_{ij}$ 为矩阵 $B$ (详见附录)第 $i$ 行第 $j$ 列的元素; $\bar{c}_{\text{out}}$ 和 $\delta c_{\text{out}}(\omega)$ 分别为系统的输出算符零

阶平均值和频域涨落算符。利用零差测量的方法来测量双腔机械系统的输出。给系统输出的光场加上一个 $90^\circ$ 的相位,参考光场为 $a_2$ ,则探测器 $D_1$ 和 $D_2$ 测量到的光场强度差值为

$$I = I_1 - I_2 = a_2^\dagger c_{\text{out}} + c_{\text{out}}^\dagger a_2, \quad (9)$$

式中:  $I_1 = d_1^\dagger d_1$ 、 $I_2 = d_2^\dagger d_2$  分别为探测器  $D_1$  和  $D_2$  测量到的光场强度。将式(9)中算符进行线性化:  $\delta a_2 = a_2 - \bar{a}_2$ ,  $\delta c_{\text{out}} = c_{\text{out}} - \bar{c}_{\text{out}}$ , 则式(9)可变为

$$I = \bar{a}_2^\dagger \bar{c}_{\text{out}} + \bar{c}_{\text{out}}^\dagger \bar{a}_2 + \delta a_2^\dagger \bar{c}_{\text{out}} + \bar{a}_2^\dagger \delta c_{\text{out}} + \delta a_2^\dagger \delta c_{\text{out}} + \delta c_{\text{out}}^\dagger \bar{a}_2 + \bar{c}_{\text{out}}^\dagger \delta a_2 + \delta c_{\text{out}}^\dagger \delta a_2. \quad (10)$$

将参考光场  $\bar{a}_2 = -\bar{a}_0/\sqrt{2}$  和双腔机械系统输出  $\bar{c}_{\text{out}} = \bar{c}_{\text{in}} = i\bar{a}_0/\sqrt{2}$  ( $\bar{a}_0$  为激光场的强度) 代入式(10), 发现前两项  $\bar{a}_2^\dagger \bar{c}_{\text{out}} + \bar{c}_{\text{out}}^\dagger \bar{a}_2 = 0$ , 因此忽略高阶涨落项, 结合式(10)和傅里叶变换后的科氏力  $F(2m\dot{\theta}) = 2\pi m\dot{\theta}[\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)]$ , 此时测量到信号在频域中可以近似表示为

$$\begin{aligned} \bar{I}(\omega) \approx & \langle \delta a_2^\dagger(-\omega) \bar{c}_{\text{out}} + \bar{a}_2^\dagger \delta c_{\text{out}}(\omega) + \delta c_{\text{out}}^\dagger(-\omega) \bar{a}_2 + \bar{c}_{\text{out}}^\dagger \delta a_2(\omega) \rangle = \\ & \sqrt{\frac{k_1}{2\hbar m \omega_m}} \frac{2\pi m \dot{\theta} g_0 \bar{a}_0}{\varphi_1} \left( \frac{1}{\varphi_6} - \frac{1}{\varphi_5} \right) (\bar{c}_1 - \bar{c}_1^\dagger) [\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)] = \\ & \sqrt{\frac{2}{\hbar m \omega_m}} \frac{2i\pi m \dot{\theta} g_0 |\bar{a}_0|^2}{\varphi_1} \left( \frac{1}{\varphi_6} - \frac{1}{\varphi_5} \right) [\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)]. \end{aligned} \quad (11)$$

通过对式(11)作傅里叶逆变换  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$ , 可以得到信号在时域里的解:

$$\begin{aligned} \bar{I}(t) = & -\sqrt{\frac{2}{\gamma^2 m \hbar \omega_m}} i m \dot{\theta} g_0 |\bar{a}_0|^2 \left[ \frac{\exp(i\omega_m t)}{(k_1 + i\omega_m)(\gamma + 2i\omega_m)} - \frac{\exp(-i\omega_m t)}{(k_1 - i\omega_m)(-\gamma + 2i\omega_m)} \right] = \\ & \sqrt{\frac{2}{\gamma^2 m \hbar \omega_m}} 4m \dot{\theta} g_0 |\bar{a}_0|^2 \frac{[(2\omega_m^2 - k_1\gamma) \sin(\omega_m t) + (2\omega_m k_1 + \omega_m \gamma) \cos(\omega_m t)]}{(k_1^2 + \omega_m^2)(4\omega_m^2 + \gamma^2)} = \\ & \frac{4\dot{\theta} g |\bar{a}_0|^2}{\omega_m \gamma \sqrt{(k_1^2 + \omega_m^2)(4\omega_m^2 + \gamma^2)}} \cos(\omega_m t + \phi), \end{aligned} \quad (12)$$

式中: 相位  $\phi$  满足  $\tan \phi = (2\omega_m^2 - k_1\gamma)/(2\omega_m k_1 + \omega_m \gamma)$ 。从式(12)可以发现, 信号  $\bar{I}(t)$  和时间成正弦函数的关系, 且该信号的振幅与平台旋转角速度  $\dot{\theta}$  成正比。因此, 在所设计模型中可利用系统输出信号的振幅  $I_0 = (4\dot{\theta} g |\bar{a}_0|^2) / [\omega_m \gamma \sqrt{(k_1^2 + \omega_m^2)(4\omega_m^2 + \gamma^2)}]$  进一步推出系统旋转的角速度。

双腔机械量子陀螺仪模型的噪声为光场强度差减去平均值部分, 即  $\delta I(\omega) = I(\omega) - \bar{I}(\omega)$ , 因此  $I(\omega)$  的方差可表示为

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & \langle \delta I(\omega) \delta I^\dagger(\omega') \rangle = \\ & \left[ \frac{\pi |\bar{a}_0|^2 (2k_1 \varphi_1 \varphi_5 \varphi_6 - 1)^2}{|\Phi_1|^2} - \frac{4\pi |\bar{a}_0|^2 J^2 k_1 k_2}{\varphi_1^2 \varphi_3^2} + \frac{16\pi |\bar{a}_0|^4 g_0^2 \gamma \varphi_1^2}{|\Phi_1|^2} (\varphi_5^2 n^2 + \varphi_6^2 n^2 + 2n + 1) \right] \delta(\omega - \omega'), \end{aligned} \quad (13)$$

式中:  $\varphi_3 = i\Delta_2 + iJ + k_2 + i\omega$ ,  $\Phi_1 = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_5 \varphi_6 + g_0^2 |\bar{c}_1|^2 (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_5 - \varphi_6)$ 。量子噪声功率谱  $S(\omega)$  为

$$\begin{aligned} S(\omega) = & S_1 + S_2 + S_3 = \\ & \frac{\pi |\bar{a}_0|^2 (2k_1 \varphi_1 \varphi_5 \varphi_6 - 1)^2}{|\Phi_1|^2} - \frac{4\pi |\bar{a}_0|^2 J^2 k_1 k_2}{\varphi_1^2 \varphi_3^2} + \frac{16\pi |\bar{a}_0|^4 g_0^2 \gamma \varphi_1^2}{|\Phi_1|^2} (\varphi_5^2 n^2 + \varphi_6^2 n^2 + 2n + 1). \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)等号右边第一项  $S_1$  表示光腔  $C_1$  的散粒噪声和对机械振子的反作用噪声; 第二项  $S_2$  是来自辅助光腔  $C_2$  的噪声; 第三项  $S_3$  表示机械模式的热噪声, 该噪声和机械振子的声子数  $n$  有关。结合式(12)和式(14)可以写出双腔机械量子陀螺仪模型的信噪比为

$$\begin{aligned} R_{\text{SN}} = & 10 \lg \left[ \frac{|I_0|^2}{S(\omega_m)} \right] = \\ & \frac{16\dot{\theta}^2 g^2 |\bar{a}_0|^4}{\omega_m^2 \gamma^2 (k_1^2 + \omega_m^2)(4\omega_m^2 + \gamma^2)(S_1 + S_2 + S_3)}. \end{aligned} \quad (15)$$

双腔机械量子陀螺仪模型的灵敏度和信噪比有关, 陀螺仪的信噪比越高, 灵敏度越高<sup>[26]</sup>。结合式(15)和图2可知, 模型的噪声主要来源于机械模式的热噪声项  $S_3$ , 而引入辅助光腔带来的噪声项  $S_2$  很小, 通过降低机械模式热噪声  $S_3$  可以提高信噪比。如果采取一种机械振子基态冷却策略来抑制量子陀螺仪热噪声, 利用双腔机械系统将机械振子冷却到声子数小于1, 可以有效提高信噪比。

### 3 机械振子速率方程和光压涨落谱

本节利用文献[8, 23, 27]的方法, 根据双腔机械有

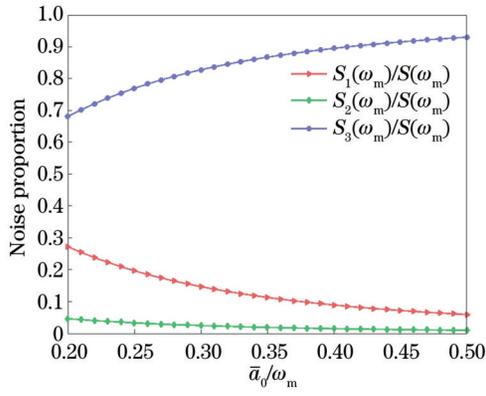


图 2 各项噪声占比随激光光场强度  $\bar{a}_0$  的变化 (光腔的有效失谐:  $\Delta'_1=0, \Delta_2=-\omega_m$ ; 光腔衰减率:  $k_1=5\omega_m, k_2=0.3\omega_m$ ; 声子数:  $n=312$ ; 机械振子衰减率:  $\gamma=8 \times 10^{-4}\omega_m$ ; 光腔耦合强度:  $J=2\omega_m$ )

Fig. 2 Variation of noise proportion with laser field intensity  $\bar{a}_0$  (effective detuning of optical cavity:  $\Delta'_1=0, \Delta_2=-\omega_m$ ; cavity decay rate:  $k_1=5\omega_m, k_2=0.3\omega_m$ ; phonon number:  $n=312$ ; mechanical oscillator decay rate:  $\gamma=8 \times 10^{-4}\omega_m$ ; optical cavity coupling intensity:  $J=2\omega_m$ )

效哈密顿量公式得出机械振子的速率方程,并由速率方程得到机械振子的稳态声子数。通过有效哈密顿量中光腔和机械振子相互作用项得到光腔对振子的辐射压力:  $F=c_1+c_1^\dagger$  (为了简化,下文中将有效哈密顿量中所有的  $\delta$  省略)。当  $g \ll \omega_m$  时,可以忽略机械振子对光腔的反作用<sup>[23]</sup>,即仅考虑有效哈密顿量中的光腔模式部分  $H''=\hbar\Delta'_1c_1^\dagger c_1+\hbar\Delta_2c_2^\dagger c_2+\hbar J(c_1^\dagger c_2+c_2^\dagger c_1)$ ,结合附录中式(A3)可以求得机械振子受到腔内光场辐射压力时的涨落谱<sup>[8]</sup>,即光压涨落谱:

$$S_{FF}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega t)\langle F(t)F(0)\rangle dt=\frac{1}{4\pi^2}\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega t)\left[\iint F(\omega')F(\omega'')\exp(-i\omega't)\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\omega''\right]dt=\frac{2k_1X_2(\omega)X_2^\dagger(\omega)+2k_2J^2}{[X_1(\omega)X_2(\omega)+J^2][X_1^\dagger(\omega)X_2^\dagger(\omega)+J^2]}, \quad (16)$$

$$\begin{cases} X_1(\omega)=i\omega-i\Delta'_1-k_1 \\ X_2(\omega)=i\omega-i\Delta_2-k_2 \end{cases} \quad (17)$$

在系统演化过程中,辐射压力  $F$  会引起机械振子声子态在能级间跃迁。根据费米黄金定则<sup>[8]</sup>,机械振子的声子在不同声子态间跃迁的速率和腔内光场对声子的有效涨落力有关。声子态  $|n\rangle$  到  $|n-1\rangle$  和  $|n+1\rangle$  的跃迁速率分别为

$$\begin{cases} \Gamma_{n \rightarrow n-1}=g_0^2 n S_{FF}(\omega_m) \\ \Gamma_{n \rightarrow n+1}=g_0^2 (n+1) S_{FF}(-\omega_m) \end{cases} \quad (18)$$

式中:  $S_{FF}(\omega_m)$  和  $S_{FF}(-\omega_m)$  分别为涨落谱正频率侧  $\omega=\omega_m$  和负频率侧  $\omega=-\omega_m$  的值,由于  $F$  不是经典的噪声源,而是一个作用于环境自由度的算符<sup>[8]</sup>,因此  $S_{FF}(\omega_m) \neq S_{FF}(-\omega_m)$ 。实际上机械振子的声子态只在

相邻能级间跃迁<sup>[21]</sup>,能级跃迁概率如图 3 所示。

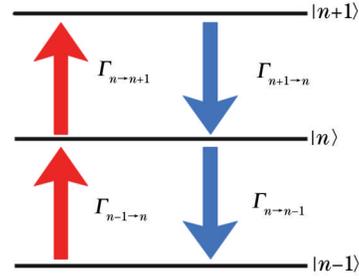


图 3 机械振子声子态跃迁示意图

Fig. 3 Schematic of phonon state transition of mechanical resonator

速率方程通常是描述开放系统的动力学方程,因此本文除了考虑腔内光场对机械振子的作用力,还需要将外部热库环境考虑进来。结合图 3,机械振子速率方程的完整形式为

$$\begin{aligned} \dot{P}_n &= \Gamma_{n-1 \rightarrow n} P_{n-1} + \Gamma_{n+1 \rightarrow n} P_{n+1} - \Gamma_{n \rightarrow n-1} P_n - \\ &\Gamma_{n \rightarrow n+1} P_n + \gamma \bar{n}_{\text{th}} n P_{n-1} + \gamma (\bar{n}_{\text{th}} + 1) (n+1) P_{n+1} - \\ &\gamma (\bar{n}_{\text{th}} + 1) n P_n - \gamma \bar{n}_{\text{th}} (n+1) P_n, \end{aligned} \quad (19)$$

式中:  $P_n$  为机械振子处于声子数本征态  $|n\rangle$  的概率;  $\Gamma_{n' \rightarrow n}$  表示  $|n'\rangle$  态到  $|n\rangle$  态的跃迁速率;  $\gamma$  为机械振子的衰减率。式(19)描述了机械振子处于声子态  $|n\rangle$  概率的增量,等号右边前 4 项和后 4 项分别为辐射压力和热库影响下的速率方程。(19)式可以化简改写为

$$\begin{aligned} \dot{P}_n &= \gamma_i n_i n P_{n-1} + \gamma_f (n_f + 1) (n+1) P_{n+1} - \\ &\gamma_f (n_f + 1) n P_n - \gamma_i n_f (n+1) P_n, \end{aligned} \quad (20)$$

式中:  $n_i$  为机械振子稳态声子数;  $\gamma_f$  为声子数平均值趋于稳态值的速率。

$$n_i = \frac{\gamma \bar{n}_{\text{th}} + \gamma_c n_c}{\gamma + \gamma_c}, \quad (21)$$

$$\gamma_f = \gamma + \gamma_c, \quad (22)$$

式中:  $n_c$  为冷却极限;  $\gamma_c$  为冷却率。

$$\begin{cases} n_c = \frac{S_{FF}(-\omega_m)}{S_{FF}(\omega_m) - S_{FF}(-\omega_m)} \\ \gamma_c = g_0^2 [S_{FF}(\omega_m) - S_{FF}(-\omega_m)] \end{cases} \quad (23)$$

从式(22)可以看出,机械振子的一部分冷却过程是由于自身的衰减,另一部分是通过耦合向光腔传递能量,使声子数减少。因此,所设计的冷却方案主要是利用  $\gamma_c$  达到基态冷却。在基态冷却理论中,通常需要满足  $\gamma_c \gg \gamma$ 。此时,机械振子的稳态声子数可以表示为

$$n_i = \frac{\gamma \bar{n}_{\text{th}} + \gamma_c n_c}{\gamma + \gamma_c} \approx \frac{\gamma \bar{n}_{\text{th}}}{\gamma_c} + n_c \quad (24)$$

当机械振子的衰减率  $\gamma \rightarrow 0$  时,稳态声子数趋于一个非零的冷却极限  $n_c$ 。为了让机械振子达到基态冷却 ( $n_i < 1$ ),需要让冷却率  $\gamma_c$  尽可能大,冷却极限  $n_c$  尽可能小。从式(23)可知,涨落谱的正频率侧值  $S_{FF}(\omega_m)$  越大,同时负频率侧值  $S_{FF}(-\omega_m)$  越小,机械

振子的稳态声子数越小。结合式(18)发现:正频率侧值与声子态向下跃迁有关,决定着冷却过程;负频率侧值与声子态向上跃迁有关,决定着加热过程。因此,需要利用辐射压力涨落谱,加强它的正频率侧值  $S_{\text{FF}}(\omega_m)$ ,抑制负频率侧值  $S_{\text{FF}}(-\omega_m)$ ,使机械振子达到基态冷却,从而降低系统的热噪声。

## 4 基态冷却

### 4.1 光压涨落谱与参数

从第 3 节对式(18)~(24)的分析中发现,机械振子的冷却需要利用辐射压力涨落谱实现。本节分析并研究了系统参数对辐射压力涨落谱的影响。

从图 4 可以看出,随着光腔耦合强度  $J$  的增加,辐射压力涨落谱出现明显的劈裂。当  $J=0$  时,双腔模型退化为标准的光机械系统形式,即不存在辅助腔。此时涨落谱是一个单峰的洛伦兹谱,  $S_{\text{FF}}(\omega)$  由  $k_1$  和  $\Delta'_1$  决定,且峰值出现在  $\omega = \Delta'_1$  处。

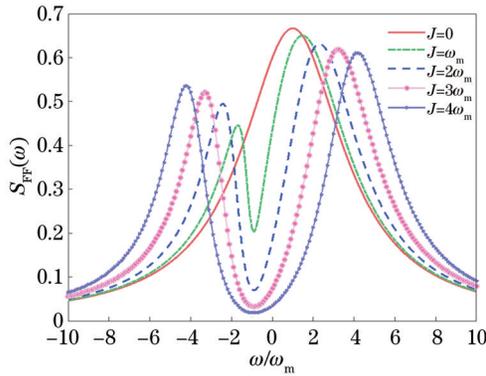


图 4 不同光腔耦合强度  $J$  下的辐射压力涨落谱  $S_{\text{FF}}(\omega)$  (光腔的有效失谐:  $\Delta'_1 = \omega_m$ ,  $\Delta_2 = -\omega_m$ ; 光腔衰减率:  $k_1 = 3\omega_m$ ,  $k_2 = 0.3\omega_m$ )

Fig. 4 Radiation pressure fluctuation spectra  $S_{\text{FF}}(\omega)$  under different optical cavity coupling intensities  $J$  (effective detuning of optical cavity:  $\Delta'_1 = \omega_m$ ,  $\Delta_2 = -\omega_m$ ; cavity decay rate:  $k_1 = 3\omega_m$ ,  $k_2 = 0.3\omega_m$ )

当  $J = \omega_m, 2\omega_m, 3\omega_m, 4\omega_m$  时,涨落谱由一个单独的洛伦兹峰劈裂成两个较窄的峰和一个较低的谷,谷值出现在  $\omega = \Delta_2 = -\omega_m$  处。通过图 5 可以验证图 4 中谷值出现在  $\Delta_2$  处现象,从图 5 可以看到,涨落谱  $S_{\text{FF}}(\omega)$  的谷值随辅助光腔失谐量  $\Delta_2$  的改变而不断变化,但谷值始终出现在  $\omega = \Delta_2$  处。因此,为了尽可能抑制加热过程,将负频率侧的涨落谱  $S_{\text{FF}}(-\omega_m)$  对应的频率放在谷底,即  $\omega = \Delta_2 = -\omega_m$ 。涨落谱中双峰来自光学模的简正模劈裂<sup>[28-29]</sup>,将光学模式的哈密顿量进行对角化处理,可以求得双峰出现的位置。

利用 Bogoliubov 变换<sup>[30]</sup>对角化哈密顿量  $H'$ ,可得

$$H' = \hbar\Delta'_1 c_1^\dagger c_1 + \hbar\Delta_2 c_2^\dagger c_2 + \hbar J(c_1^\dagger c_2 + c_2^\dagger c_1) = \hbar\Delta_- p^\dagger p + \hbar\Delta_+ q^\dagger q, \quad (25)$$

式中:  $p = uc_2 - vc_1$  和  $q = vc_2 - uc_1$  为本文重新定义的玻色算符;  $\Delta_+$ 、 $\Delta_-$  为算符的本征频率。

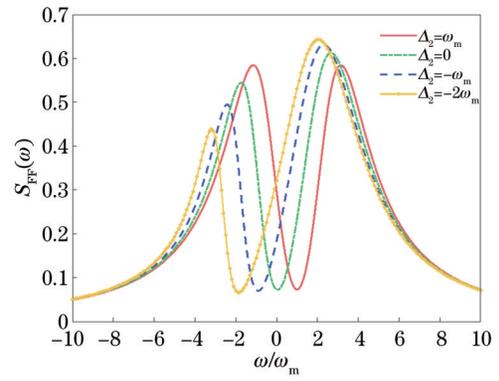


图 5 不同辅助光腔失谐量  $\Delta_2$  下的辐射压力涨落谱  $S_{\text{FF}}(\omega)$  (光腔的有效失谐:  $\Delta'_1 = \omega_m$ ; 光腔衰减率:  $k_1 = 3\omega_m$ ,  $k_2 = 0.3\omega_m$ ; 光腔耦合强度:  $J = 2\omega_m$ )

Fig. 5 Radiation pressure fluctuation spectra  $S_{\text{FF}}(\omega)$  under different auxiliary cavity detuning  $\Delta_2$  (effective detuning of optical cavity:  $\Delta'_1 = \omega_m$ ; cavity decay rate:  $k_1 = 3\omega_m$ ,  $k_2 = 0.3\omega_m$ ; optical cavity coupling intensity:  $J = 2\omega_m$ )

$$\begin{cases} u = \left( \frac{\Delta_0 + \sqrt{\Delta_0^2 + 4J^2}}{2\sqrt{\Delta_0^2 + 4J^2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ v = \sqrt{1 - u^2} \end{cases}, \quad (26)$$

式中:  $\Delta_0 = \Delta'_1 - \Delta_2$ 。

哈密顿量对角化后的频率  $\Delta_-$  和  $\Delta_+$  分别对应辐射压力涨落谱左、右峰的位置:

$$\Delta_+ = \frac{\Delta'_1 + \Delta_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_0^2 + 4J^2}, \quad (27)$$

$$\Delta_- = \frac{\Delta'_1 + \Delta_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_0^2 + 4J^2}, \quad (28)$$

取谷值  $\omega = \Delta_2 = -\omega_m$  处,且让正频率侧  $S_{\text{FF}}(\omega_m)$  对应的频率与右峰频率始终保持一致,即取  $\Delta_+ = \omega_m$ ,从而利用谷值抑制加热过程、峰值增强冷却过程,以达到最优冷却的目的。此时从(27)式得到的最优耦合强度为

$$J = \sqrt{2\omega_m(\omega_m - \Delta'_1)}. \quad (29)$$

图 6 所示为考虑最优耦合条件式(29)后的辐射压力涨落谱  $S_{\text{FF}}(\omega)$ 。结合式(27)和图 6 可以发现:当  $\Delta'_1 > \omega_m$  时,右峰所在的频率值  $\Delta_+ > \omega_m$ ,涨落谱的正频率侧值  $S_{\text{FF}}(\omega_m)$  并不是正频率部分的最大值点;当  $\Delta'_1 > \omega_m$  时,虽然也可以加强冷却过程,但为了获得更好的冷却效果,仅考虑  $\Delta'_1 < \omega_m$  的情况;当  $\Delta'_1 = \omega_m$  时,所得到的最优耦合条件为  $J=0$ ,这与图 4 中实线的结果相符。需要注意的是,这并不代表当  $\Delta'_1 = \omega_m$  时  $J=0$  的原始模型最优,需要区别的是原始模型考虑的条件是  $\Delta'_1 = 0$ ,本文推出最优条件的前提是  $\Delta'_1 = \omega_m$ ,即单峰涨落谱的峰值出现在  $\omega = \omega_m$  处(如图 4 实线所示)。

从上节分析可知,如果涨落谱的正频率侧值  $S_{\text{FF}}(\omega_m)$  越大,同时负频率侧值  $S_{\text{FF}}(-\omega_m)$  越小,则冷却效果将会更好。这就意味着涨落谱的正负频率侧差值  $S_{\text{FF}}(\omega_m) - S_{\text{FF}}(-\omega_m)$  越大,机械振子越容易冷却达

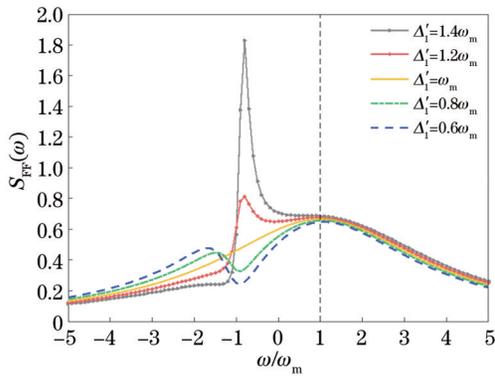


图 6 不同光腔失谐量  $\Delta'_1$  下的辐射压力涨落谱  $S_{FF}(\omega)$  (辅助光腔有效失谐:  $\Delta_2 = -\omega_m$ ; 光腔耦合强度:  $J = \sqrt{2\omega_m(\omega_m - \Delta'_1)}$ ; 光腔衰减率:  $k_1 = 3\omega_m, k_2 = 0.3\omega_m$ )  
 Fig. 6 Radiation pressure fluctuation spectra  $S_{FF}(\omega)$  under different optical cavity detuning  $\Delta'_1$  (effective detuning of the auxiliary cavity:  $\Delta_2 = -\omega_m$ ; optical cavity coupling intensity:  $J = \sqrt{2\omega_m(\omega_m - \Delta'_1)}$ ; cavity decay rate:  $k_1 = 3\omega_m, k_2 = 0.3\omega_m$ )

到基态。如图 7 所示, 当  $\Delta_2 = -\omega_m$ 、光腔耦合强度  $J = \sqrt{2\omega_m(\omega_m - \Delta'_1)}$  时, 涨落谱正频率侧值取得峰值, 负频率侧值取得谷值。辅助光腔的衰减率会影响涨落谱的深度, 随着衰减率  $k_2$  的减小, 正、负频率侧差值增大。

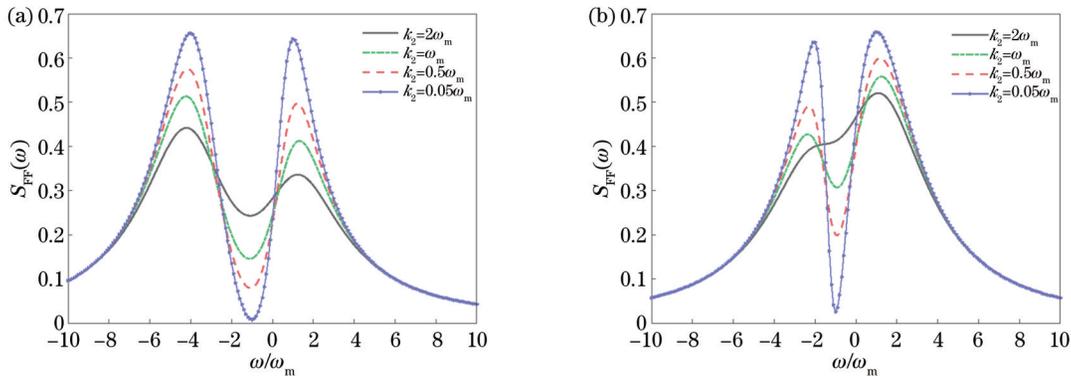


图 7 当光腔衰减率  $k_1 = 3\omega_m$ 、光腔耦合强度  $J = \sqrt{2\omega_m(\omega_m - \Delta'_1)}$  时, 不同辅助光腔衰减率  $k_2$  下的辐射压力涨落谱  $S_{FF}(\omega)$ 。(a) 光腔的有效失谐  $\Delta'_1 = -2\omega_m, \Delta_2 = -\omega_m$ ; (b) 光腔的有效失谐  $\Delta'_1 = 0, \Delta_2 = -\omega_m$   
 Fig. 7 Radiation pressure fluctuation spectra  $S_{FF}(\omega)$  under different decay rates of auxiliary optical cavities  $k_2$  when cavity decay rate  $k_1 = 3\omega_m$  and optical cavity coupling intensity  $J = \sqrt{2\omega_m(\omega_m - \Delta'_1)}$ . (a) Effective detuning of optical cavity  $\Delta'_1 = -2\omega_m$  and  $\Delta_2 = -\omega_m$ ; (b) effective detuning of optical cavity  $\Delta'_1 = 0, \Delta_2 = -\omega_m$

在图 8(a) 中, 当耦合强度小于  $\omega_m$  时, 冷却率出现负值。由于  $J < \omega_m$ , 受  $\Delta_2 > 0$  的影响, 谷值出现在涨落谱的正频率侧 (如图 5 实线), 这时可能会出现涨落谱值  $S_{FF}(-\omega_m) > S_{FF}(\omega_m)$ , 反而造成了对系统的加热。从图 8(b) 可以看到: 耦合强度在  $1.28\omega_m < J < 1.84\omega_m$  时, 稳态声子数小于 1; 当  $J > \sqrt{2}\omega_m$  时, 随着耦合强度的增大, 冷却率减小, 开始出现偏离冷却极限的现象。

方案二: 为了让负频率侧的涨落谱值  $S_{FF}(-\omega_m)$  取得最小值, 辅助光腔有效失谐应满足  $\Delta_2 = -\omega_m$ 。从

需要注意的是, 其他因素 (如图 4 所示的光腔耦合强度) 也会影响涨落谱的深度。光腔品质的高低影响着光腔的衰减率, 光腔品质因子越高, 衰减率越小。而选取高品质的辅助光腔, 就可以弥补第一个光腔品质因子低的缺陷。

#### 4.2 机械振子的基态冷却

本节在参数光腔有效失谐  $\Delta'_1 = 0$  和衰减率一定的条件下, 寻找针对于本模型的最佳参数, 使得冷却率尽可能大, 且冷却极限  $n_c$  和机械振子的稳态声子数  $n_f$  尽可能小。正负频率侧差值  $S_{FF}(\omega_m) - S_{FF}(-\omega_m)$  越大, 冷却效果越好, 而差值的主要影响因素还有光腔耦合强度  $J$  以及辅助光腔的频率失谐  $\Delta_2$ 。为了验证所提方案的基态冷却效果, 取一套验证可行的参数<sup>[31]</sup>: 机械振子频率  $\omega_m = 2\pi \times 20$  MHz, 热库温度  $T = 300$  mK, 热平均声子数  $\bar{n}_{th} = 312$ , 机械振子品质因子  $Q = \omega_m/\gamma = 8 \times 10^4$ , 光腔衰减率  $k_1 = 3\omega_m$  ( $k_1 > \omega_m$ , 即光腔  $C_1$  不满足边带可分辨条件)。

方案一: 为了让正频率侧的涨落谱值  $S_{FF}(\omega_m)$  取得最大值, 辅助光腔有效失谐和光腔耦合强度应满足  $J = \sqrt{\omega_m(\omega_m - \Delta_2)}$ 。如图 8 所示, 在衰减率不同的情况下, 冷却效果均在同一耦合强度  $J = \sqrt{2}\omega_m$  处取得最优。冷却率的最大值为  $\gamma_c = 3.18\omega_m$ , 满足  $\gamma_c \gg \gamma$ 。随着衰减率  $k_2$  的减小, 冷却率变大, 冷却极限减小, 这个规律和图 7 所示的辐射压力涨落谱结论相符。

图 9(a) 可以看到, 在耦合强度  $J = \sqrt{2}\omega_m$  处, 两种方案的冷却率都达到最大值, 且冷却极限和稳态声子数接近于 0。该点同时满足方案一和方案二的要求, 最佳参数点涨落谱的右峰值处于  $\omega = \omega_m$  处, 谷值处于  $\omega = -\omega_m$  处, 即  $S_{FF}(\omega_m)$  最大,  $S_{FF}(-\omega_m)$  最小。因此, 在辅助光腔有效失谐  $\Delta_2 = -\omega_m$  且耦合强度  $J = \sqrt{2}\omega_m$  的最佳参数点, 冷却率  $\gamma_c = 3.18\omega_m$ , 稳态声子数  $n_f = 0.19 < 1$ , 模型的冷却效果最好, 机械振子达到了基态冷却。

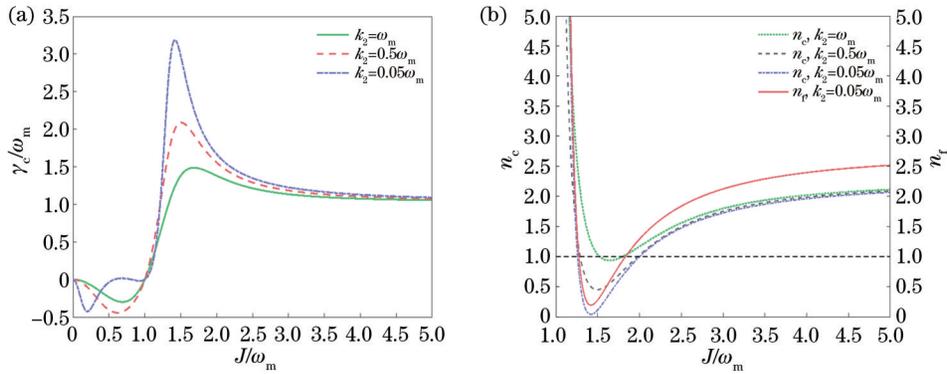


图 8 当光腔的有效失谐  $\Delta_2 = \omega_m - J^2/\omega_m$  时,不同辅助光腔衰减率下方方案一的冷却效果。(a)冷却率随光腔耦合强度  $J$  的变化; (b)冷却极限  $n_c$  和机械振子的稳态声子数  $n_f$  随光腔耦合强度  $J$  的变化

Fig. 8 Cooling effect of scheme I under different decay rates of auxiliary optical cavities when effective detuning of optical cavity  $\Delta_2 = \omega_m - J^2/\omega_m$ . (a) Variation of cooling rate with optical cavity coupling intensity  $J$ ; (b) variations of cooling limit  $n_c$  and the final mean phonon number of the mechanical resonator  $n_f$  with optical cavity coupling intensity  $J$

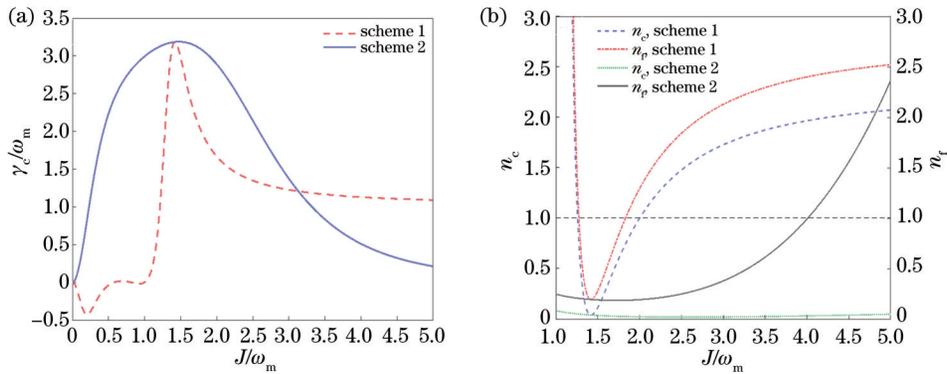


图 9 方案一 [ $S_{FF}(\omega_m)$  最大,  $\Delta'_1 = 0, \Delta_2 = \omega_m - J^2/\omega_m, k_1 = 3\omega_m, k_2 = 0.05\omega_m$ ] 和方案二 [ $S_{FF}(-\omega_m)$  最小,  $\Delta'_1 = 0, \Delta_2 = -\omega_m, k_1 = 3\omega_m, k_2 = 0.05\omega_m$ ] 的冷却效果对比。(a)冷却率随光腔耦合强度  $J$  的变化; (b)冷却极限  $n_c$  和机械振子的稳态声子数  $n_f$  随光腔耦合强度  $J$  的变化

Fig. 9 Comparison of cooling effects of scheme 1 [ $S_{FF}(\omega_m)$  maximum,  $\Delta'_1 = 0, \Delta_2 = \omega_m - J^2/\omega_m, k_1 = 3\omega_m, k_2 = 0.05\omega_m$ ] and scheme 2 [ $S_{FF}(-\omega_m)$  minimum,  $\Delta'_1 = 0, \Delta_2 = -\omega_m - J/\omega_m, k_1 = 3\omega_m, k_2 = 0.05\omega_m$ ]. (a) Variation of cooling rate with optical cavity coupling intensity  $J$ ; (b) variations of cooling limit  $n_c$  and the final mean phonon number of mechanical resonator  $n_f$  with optical cavity coupling intensity  $J$

虽然两个方案在最优参数点的冷却效果相同,但从图 9 可以看到,方案二对于光机械系统机械振子基态冷却的普遍适应性更好。如图 9 所示,方案二的冷却率整体比方案一高,且方案二在耦合强度小于  $4\omega_m$  时,稳态声子数均小于 1。

当耦合强度  $J=0$  时,双腔模型将退化为 Davuluri<sup>[16]</sup> 提出的原始旋转检测模型,即不存在辅助腔的情况。图 10 所示为耦合强度  $J=0$  (虚线) 和优化后耦合强度  $J=\sqrt{2}\omega_m$  (实线) 的辐射压力涨落谱。当原始模型耦合强度  $J=0$  时,涨落谱正、负频率侧值相等,即  $S_{FF}(\omega_m) = S_{FF}(-\omega_m)$ ,在图 8(a) 和图 9(a) 中冷却率均为 0,此时光机械系统对机械振子没有冷却效果,稳态声子数也远远大于 1。从图 10 实线可以看到:优化模型的涨落谱右侧峰值处于  $\omega = \omega_m$  处,促进冷却过程;左侧谷值处于  $\omega = -\omega_m$  处,抑制加热过程。从上述分析可知,在双腔量子陀螺仪模型中,双腔机械系统部分可以对机械振子起到冷却作用,采取适当参数

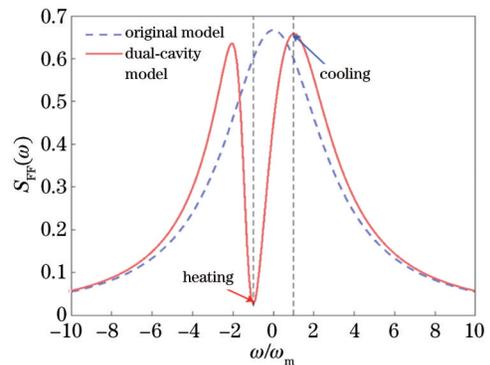


图 10 原始模型 (耦合强度  $J=0$ ) 和优化后的双腔模型 (耦合强度  $J=\sqrt{2}\omega_m$ ) 辐射压力涨落谱对比 (光腔的有效失谐  $\Delta'_1 = 0, \Delta_2 = -\omega_m$ ; 光腔衰减率  $k_1 = 3\omega_m, k_2 = 0.05\omega_m$ )

Fig. 10 Comparison of radiation pressure fluctuation spectra between original model (coupling strength  $J=0$ ) and optimized dual-cavity model (coupling strength  $J=\sqrt{2}\omega_m$ ). Effective detuning of optical cavity:  $\Delta'_1 = 0, \Delta_2 = -\omega_m$ ; cavity decay rate:  $k_1 = 3\omega_m, k_2 = 0.05\omega_m$

时能使机械振子达到基态冷却,从而降低热噪声。

## 5 结 论

建立了一种双腔机械量子陀螺仪模型,并提出抑制量子陀螺仪热噪声的机械振子基态冷却策略,利用双腔机械系统将机械振子冷却到稳态声子数小于 1,即达到基态冷却。首先由双腔机械系统输出信号的振幅可以得到平台旋转的角速度。然后,采用双腔机械

系统的光压涨落谱研究了机械振子冷却的参数优化问题,并针对双腔量子陀螺仪模型找出最佳参数,使机械振子可以获得很好的冷却效果。仿真结果表明,当光腔  $C_2$  的衰减率较小、左右光腔耦合强度  $J = \sqrt{2} \omega_m$  时,机械振子的冷却率  $\gamma_c = 3.18\omega_m$ , 稳态声子数  $n_i = 0.19 < 1$ , 即机械振子达到了基态冷却,从而降低了模型的热噪声。本文的研究结果将有助于设计出更灵敏的量子陀螺仪。

## 附录

采用傅里叶变换的方法解微分方程组,可以把描述双腔机械系统运动信息的方程组式(5)写为如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{c}_1 \\ \delta\dot{c}_1^\dagger \\ \delta\dot{c}_2 \\ \delta\dot{c}_2^\dagger \\ \delta\dot{b} \\ \delta\dot{b}^\dagger \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \delta c_1 \\ \delta c_1^\dagger \\ \delta c_2 \\ \delta c_2^\dagger \\ \delta b \\ \delta b^\dagger \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2k_1} \delta E_1 \\ \sqrt{2k_1} \delta E_1^\dagger \\ \sqrt{2k_2} \delta E_2 \\ \sqrt{2k_2} \delta E_2^\dagger \\ \sqrt{2\gamma} \delta M + \frac{2i}{\sqrt{2\hbar m \omega_m}} m\dot{y}\dot{\theta} \\ \sqrt{2\gamma} \delta M^\dagger - \frac{2i}{\sqrt{2\hbar m \omega_m}} m\dot{y}\dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad (A1)$$

其中,系数矩阵  $A$  为

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & -iJ & 0 & ig_0\bar{c}_1 & ig_0\bar{c}_1 \\ 0 & -k_1 & 0 & iJ & -ig_0\bar{c}_1^\dagger & -ig_0\bar{c}_1^\dagger \\ 0 & 0 & -i\Delta_2 - iJ - k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\Delta_2 + iJ - k_2 & 0 & 0 \\ ig_0\bar{c}_1^\dagger & ig_0\bar{c}_1 & 0 & 0 & -i\omega_m - \gamma & 0 \\ -ig_0\bar{c}_1^\dagger & -ig_0\bar{c}_1 & 0 & 0 & 0 & i\omega_m - \gamma \end{bmatrix}.$$

对式(A1)作傅里叶变换  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$ , 可以得到方程在频域里的形式:

$$\begin{bmatrix} \delta c_1(\omega) \\ \delta c_1^\dagger(-\omega) \\ \delta c_2(\omega) \\ \delta c_2^\dagger(-\omega) \\ \delta b(\omega) \\ \delta b^\dagger(-\omega) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \sqrt{2k_1} E_1(\omega) \\ \sqrt{2k_1} E_1^\dagger(-\omega) \\ \sqrt{2k_2} E_2(\omega) \\ \sqrt{2k_2} E_2^\dagger(-\omega) \\ \sqrt{2\gamma} M(\omega) + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m \omega_m}} F(2m\dot{y}\dot{\theta}) \\ \sqrt{2\gamma} M^\dagger(-\omega) - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m \omega_m}} F(2m\dot{y}\dot{\theta}) \end{bmatrix}. \quad (A2)$$

矩阵  $B = [-A + i\omega I]^{-1}$ , 其具体形式为

$$B = \frac{1}{\Phi_1} \begin{bmatrix} \xi_5 & g_0^2 |\bar{c}_1|^2 (\varphi_5 - \varphi_6) & \xi_1 & \frac{iJ}{\varphi_4} g_0^2 |\bar{c}_1|^2 (\varphi_5 - \varphi_6) & ig_0 \bar{c}_1 \varphi_2 \varphi_6 & ig_0 \bar{c}_1 \varphi_2 \varphi_5 \\ g_0^2 |\bar{c}_1|^2 (\varphi_6 - \varphi_5) & \xi_6 & \frac{g_0^2 iJ}{\varphi_3} |\bar{c}_1|^2 (\varphi_5 - \varphi_6) & \xi_3 & -ig_0 \bar{c}_1^\dagger \varphi_1 \varphi_6 & -ig_0 \bar{c}_1^\dagger \varphi_1 \varphi_5 \\ 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_4 & 0 & 0 \\ ig_0 \bar{c}_1^\dagger \varphi_2 \varphi_6 & ig_0 \bar{c}_1 \varphi_1 \varphi_6 & \frac{g_0 \bar{c}_1^\dagger J}{\varphi_3} \varphi_2 \varphi_6 & -\frac{g_0 \bar{c}_1^\dagger J}{\varphi_4} \varphi_1 \varphi_6 & \xi_7 & g_0^2 |\bar{c}_1|^2 (\varphi_1 - \varphi_2) \\ -ig_0 \bar{c}_1^\dagger \varphi_2 \varphi_5 & -ig_0 \bar{c}_1 \varphi_1 \varphi_5 & -\frac{g_0 \bar{c}_1^\dagger J}{\varphi_3} \varphi_2 \varphi_5 & \frac{g_0 \bar{c}_1^\dagger J}{\varphi_4} \varphi_1 \varphi_5 & g_0^2 |\bar{c}_1|^2 (\varphi_2 - \varphi_1) & \xi_8 \end{bmatrix},$$

式中:  $\varphi_1 = i\Delta_1' + k_1 + i\omega, \varphi_2 = -i\Delta_1' + k_1 + i\omega, \varphi_3 = i\Delta_2 + iJ + k_2 + i\omega, \varphi_4 = -i\Delta_2 - iJ + k_2 + i\omega, \varphi_5 = i\omega_m + \gamma + i\omega, \varphi_6 = -i\omega_m + \gamma + i\omega$ ;  $\Phi_1 = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_5 \varphi_6 + g_0^2 |\bar{c}_1|^2 (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_5 - \varphi_6)$ ;  $\xi_1 = -\frac{iJ}{\varphi_3} (\varphi_2 \varphi_5 \varphi_6 + g_0^2 |\bar{c}_1|^2 \varphi_5 - g_0^2 |\bar{c}_1|^2 \varphi_6)$ ,  $\xi_2 = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_5 \varphi_6}{\varphi_3} + \frac{g_0^2 |\bar{c}_1|^2}{\varphi_3} (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_5 - \varphi_6)$ ,  $\xi_3 = \frac{iJ}{\varphi_4} (\varphi_1 \varphi_5 \varphi_6 + g_0^2 |\bar{c}_1|^2 \varphi_6 - g_0^2 |\bar{c}_1|^2 \varphi_5)$ ,  $\xi_4 = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_5 \varphi_6}{\varphi_4} + \frac{g_0^2 |\bar{c}_1|^2}{\varphi_4} (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_5 - \varphi_6)$ ,  $\xi_5 = \varphi_2 \varphi_5 \varphi_6 + g_0^2 |\bar{c}_1|^2 (\varphi_5 - \varphi_6)$ ,  $\xi_6 = \varphi_1 \varphi_5 \varphi_6 + g_0^2 |\bar{c}_1|^2 (\varphi_6 - \varphi_5)$ ,  $\xi_7 = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_6 + g_0^2 |\bar{c}_1|^2 (\varphi_1 - \varphi_2)$ ,  $\xi_8 = \varphi_1 \varphi_5 \varphi_6 + g_0^2 |\bar{c}_1|^2 (\varphi_6 - \varphi_5)$ 。

通过傅里叶变换后的式(A2),可得到光腔 C<sub>1</sub> 湮灭和产生算符在频域里的解:

$$\begin{cases} \delta c_1(\omega) = b_{11} \sqrt{2k_1} E_1(\omega) + b_{12} \sqrt{2k_1} E_1^\dagger(-\omega) + b_{13} \sqrt{2k_2} E_2(\omega) + b_{14} \sqrt{2k_2} E_2^\dagger(-\omega) + \\ b_{15} \sqrt{2\gamma} M(\omega) + b_{16} \sqrt{2\gamma} M^\dagger(-\omega) + \frac{g_0 \bar{c}_1 \varphi_2}{\Phi_1 \sqrt{2\hbar m \omega_m}} F(2m\dot{\gamma}) (\varphi_5 - \varphi_6) \\ \delta c_1^\dagger(-\omega) = b_{21} \sqrt{2k_1} E_1(\omega) + b_{22} \sqrt{2k_1} E_1^\dagger(-\omega) + b_{23} \sqrt{2k_2} E_2(\omega) + b_{24} \sqrt{2k_2} E_2^\dagger(-\omega) + \\ b_{25} \sqrt{2\gamma} M(\omega) + b_{26} \sqrt{2\gamma} M^\dagger(-\omega) + \frac{g_0 \bar{c}_1^\dagger \varphi_1}{\Phi_1 \sqrt{2\hbar m \omega_m}} F(2m\dot{\gamma}) (\varphi_6 - \varphi_5) \end{cases} \quad (A3)$$

参 考 文 献

[1] Armenise M N, Ciminelli G, Dell'Olio F, 等. 新型陀螺仪技术[M]. 袁书明, 程建华, 译. 北京: 国防工业出版社, 2013.  
Armenise M N, Ciminelli C, Dell'Olio F, et al. Advances in gyroscope technologies[M]. Yuan S M, Cheng J H, Transl. Beijing: National Defense Industry Press, 2013.

[2] 赵砚驰, 程建华, 赵琳. 惯性导航系统陀螺仪的发展现状与未来展望[J]. 导航与控制, 2020, 19(S1): 189-196.  
Zhao Y C, Cheng J H, Zhao L. Development status and future prospects of gyroscope in inertial navigation[J]. Navigation and Control, 2020, 19(S1): 189-196.

[3] 苑立波, 童维军, 江山, 等. 我国光纤传感技术发展路线图[J]. 光学学报, 2022, 42(1): 0100001.  
Yuan L B, Tong W J, Jiang S, et al. Road map of fiber optic sensor technology in China[J]. Acta Optica Sinica, 2022, 42(1): 0100001.

[4] 蒋治国, 胡宗福. 谐振型光纤陀螺的灵敏度分析[J]. 中国激光, 2017, 44(7): 0706001.  
Jiang Z G, Hu Z F. Analysis on sensitivity of resonant fiber optic gyro[J]. Chinese Journal of Lasers, 2017, 44

(7): 0706001.

[5] Wu Y, Guo J X, Feng X T, et al. Atom-light hybrid quantum gyroscope[J]. Physical Review Applied, 2020, 14(6): 064023.

[6] Bruckner N, Packard R. Large area multiturn superfluid phase slip gyroscope[J]. Journal of Applied Physics, 2003, 93(3): 1798-1805.

[7] Müller T, Gilowski M, Zaiser M, et al. A compact dual atom interferometer gyroscope based on laser-cooled rubidium[J]. The European Physical Journal D, 2009, 53(3): 273-281.

[8] Aspelmeyer M, Kippenberg T J, Marquardt F. Cavity optomechanics[J]. Reviews of Modern Physics, 2014, 86(4): 1391.

[9] Davuluri S, Li K, Li Y. Gyroscope with two-dimensional optomechanical mirror[J]. New Journal of Physics, 2017, 19(11): 113004.

[10] Caves C M. Quantum-mechanical noise in an interferometer[J]. Physical Review D, 1981, 23(8): 1693-1708.

[11] Kim J M, Cho D. Stabilization of a microwave oscillator to a Fabry-Perot cavity[J]. Journal of the Korean Physical Society, 2011, 58(1): 9-14.

[12] Li J J, Zhu K D. Nonlinear optical mass sensor with an

- optomechanical microresonator[J]. Applied Physics Letters, 2012, 101(14): 141905.
- [13] Bradaschia C, Del Fabbro R, Di Virgilio A, et al. The VIRGO Project: a wide band antenna for gravitational wave detection[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A, 1990, 289(3): 518-525.
- [14] Arcizet O, Cohadon P F, Briant T, et al. High-sensitivity optical monitoring of a micromechanical resonator with a quantum-limited optomechanical sensor [J]. Physical Review Letters, 2006, 97(13): 133601.
- [15] Caniard T, Verlot P, Briant T, et al. Observation of back-action noise cancellation in interferometric and weak force measurements[J]. Physical Review Letters, 2007, 99(11): 110801.
- [16] Davuluri S. Optomechanics for absolute rotation detection [J]. Physical Review A, 2016, 94(1): 013808.
- [17] Bhattacharya M. Rotational cavity optomechanics[J]. Journal of the Optical Society of America B, 2015, 32(5): B55-B60.
- [18] Davuluri S, Li Y. Unidirectional gyroscope using optomechanics to avoid mode-locking[J]. Journal of Optics, 2019, 21(11): 115402.
- [19] Gigan S, Böhm H R, Paternostro M, et al. Self-cooling of a micromirror by radiation pressure[J]. Nature, 2006, 444(7115): 67-70.
- [20] Lai D G, Zou F, Hou B P, et al. Simultaneous cooling of coupled mechanical resonators in cavity optomechanics [J]. Physical Review A, 2018, 98(2): 023860.
- [21] Wilson-Rae I, Nooshi N, Zwerger W, et al. Theory of ground state cooling of a mechanical oscillator using dynamical backaction[J]. Physical Review Letters, 2007, 99(9): 093901.
- [22] Gardiner C W, Zoller P. Quantum noise[M]. New York: Springer, 2004: 10-13.
- [23] Clerk A A, Devoret M H, Girvin S M, et al. Introduction to quantum noise, measurement, and amplification[J]. Reviews of Modern Physics, 2010, 82(2): 1155-1208.
- [24] Giovannetti V, Vitali D. Phase-noise measurement in a cavity with a movable mirror undergoing quantum Brownian motion[J]. Physical Review A, 2001, 63(2): 023812.
- [25] Collett M J, Gardiner C W. Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification[J]. Physical Review A, 1984, 30(3): 1386-1391.
- [26] Annovazzi-Lodi V, Merlo S. Mechanical-thermal noise in micromachined gyros[J]. Microelectronics Journal, 1999, 30(12): 1227-1230.
- [27] Marquardt F, Chen J P, Clerk A A, et al. Quantum theory of cavity-assisted sideband cooling of mechanical motion[J]. Physical Review Letters, 2007, 99(9): 093902.
- [28] 刘笑尘, 谢严, 陈溢琦, 等. 光纤耦合双微球谐振腔及其模式分裂特性[J]. 光学学报, 2021, 41(13): 1306017. Liu X C, Xie Y, Chen Y Q, et al. Fiber coupled double microsphere resonator and its mode splitting characteristics[J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(13): 1306017.
- [29] Khitrova G, Gibbs H M, Jahnke F, et al. Nonlinear optics of normal-mode-coupling semiconductor microcavities[J]. Reviews of Modern Physics, 1999, 71(5): 1591-1639.
- [30] Bogoljubov N N, Tolmachov V V, Širkov D V. A new method in the theory of superconductivity[J]. Fortschritte Der Physik, 1958, 6(11/12): 605-682.
- [31] Anetsberger G, Rivière R, Schliesser A, et al. Ultralow dissipation optomechanical resonators on a chip[J]. Nature Photonics, 2008, 2(10): 627-633.