

## 基于消隐点共线约束的镜头畸变非量测校正方法

孙丽君<sup>1,2,3</sup>, 郭强强<sup>1,2,3</sup>, 陈天飞<sup>1,2,3\*</sup><sup>1</sup>河南工业大学粮食信息处理与控制教育部重点实验室, 河南 郑州 450001;<sup>2</sup>河南工业大学郑州市机器感知与智能系统重点实验室, 河南 郑州 450001;<sup>3</sup>河南工业大学信息科学与工程学院, 河南 郑州 450001

**摘要** 提出一种基于消隐点共线约束的镜头畸变非量测校正方法。针对畸变中心的定位误差问题,利用畸变模型的基本矩阵和最小二乘法,实现畸变中心的高精度定位。同时,根据消隐点共线约束,定义消隐点和直线联合度量的畸变测度函数,并使用 Nelder-Mead 算法进行非线性优化,迭代计算出精确的畸变模型系数。实验结果表明,所提方法能够有效、准确地对镜头畸变进行校正,方法简单易行,校正精度高。

**关键词** 测量; 镜头畸变; 非量测校正; 消隐点共线约束; 直线残差

中图分类号 TP391.4

文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS202242.2312004

## Nonmetric Correction Method for Lens Distortion Based on Collinear Vanishing Point Constraint

Sun Lijun<sup>1,2,3</sup>, Guo Qiangqiang<sup>1,2,3</sup>, Chen Tianfei<sup>1,2,3\*</sup><sup>1</sup>Key Laboratory of Grain Information Processing and Control of Ministry of Education, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, Henan, China;<sup>2</sup>Zhengzhou Key Laboratory of Machine Perception and Intelligent System, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, Henan, China;<sup>3</sup>College of Information Science and Engineering, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, Henan, China

**Abstract** This paper proposes a nonmetric correction method for lens distortion based on the collinear vanishing point constraint. Regarding the error in distortion center positioning, the fundamental matrix of the distortion model and the least-squares method are used to achieve the high-precision positioning of the distortion center. Furthermore, the distortion measure function for the joint measure by the vanishing points and the straight-lines is defined according to the collinear vanishing point constraint, and the Nelder-Mead algorithm is employed for nonlinear optimization. Accurate distortion model coefficients are thereby calculated iteratively. The experimental results show that the proposed method can effectively and accurately correct lens distortion. Moreover, the method is simple and easy to operate and offers high correction accuracy.

**Key words** measurement; lens distortion; nonmetric correction; collinear vanishing point constraint; straight-line residual

## 1 引言

镜头畸变是计算机视觉、摄影测量、图像处理等研究领域的一个重要问题。由于镜头的不完善和光学元件的非对准,大多数镜头都会存在或大或小的畸变。

比如场景中的直线受到畸变影响弯曲为圆弧,镜头的非线性畸变越大,弯曲程度就越大<sup>[1]</sup>。为了保证后续图像处理和分析的准确性,必须对镜头畸变进行校正。

关于镜头畸变校正的研究可以追溯到 1919 年,Conrady 首次提出镜头畸变模型<sup>[2]</sup>。1966 年, Brown<sup>[3-4]</sup>

收稿日期: 2022-04-26; 修回日期: 2022-05-30; 录用日期: 2022-06-20

基金项目: 国家自然科学基金(62173127, 61973104, 61803146)、中原科技创新领军人才资助项目(224200510008)、河南省优秀青年科学基金(212300410036)、河南省高校科技创新人才支持计划(21HASTIT029)、河南省高等学校青年骨干教师培养计划(2019GGJS089)、郑州市协同创新专项(21ZZXTCX06)、河南工业大学自科创新基金支持计划(2020ZKCJ06)

通信作者: \*chen\_tianfei@163.com

在 Conrady 模型的基础上提出著名的 Brown-Conrady 模型,该模型包含径向畸变、偏心畸变和棱镜畸变,现已被广泛应用于镜头畸变校正算法<sup>[5-6]</sup>。目前,镜头畸变校正算法主要分为度量法和非度量法。度量法利用物体的空间对应关系定位 3D 特征点,从而估计畸变参数与相机模型参数<sup>[5-7]</sup>,但这些方法的参数较多、计算量大,且校正成本较高<sup>[8]</sup>。相比之下,非度量方法不依赖于已知的场景点、校准对象或任何已知结构<sup>[9-10]</sup>,而是利用图像特征的几何不变量,如直线度<sup>[11-12]</sup>、交比<sup>[13-14]</sup>、消隐点<sup>[15]</sup>和平面约束<sup>[16-17]</sup>等。在这些不变量中,直线度对畸变具有很强的度量能力,是应用最广泛的几何特征。

基于直线度的镜头畸变校正方法有很多,Prescott 等<sup>[9]</sup>通过检测线信息来实现径向畸变的校正,但在优化过程中容易出现局部极小值的问题,畸变校正效果不稳定。张靖等<sup>[18]</sup>考虑了主点的影响,把曲线面积的平方和作为畸变度量,利用遗传算法估计参数,但算法复杂度极高。Ahmed 等<sup>[19]</sup>提出基于直线特征的校正方法,将曲线上各点映射到对应的直线上,从而求解出最优的畸变系数。Li 等<sup>[20]</sup>基于直线度的原理来标定摄像机,但对线的提取精度以及测量精度仍需改进。Zhou 等<sup>[21]</sup>提出一种基于直线度的摄像机标定方法,通过使用 3 个未知长度的正方形对单幅图像的畸变进行校正,但该方法对图像中的直线度要求较高,更适用于处理特殊场景下的图像,不具备一般性。Song 等<sup>[22]</sup>基于理想针孔模型下直线度不变的原理,拟合所有直线来确定畸变系数,但算法的计算量大,校正成本高。刘

炼雄等<sup>[23]</sup>提出一种基于直线特征的非线性校正方法,利用直线投影不变性和三点近似共线性的约束关系求解畸变参数,但该方法仅基于直线特性,测量精度不高,会影响算法的校正精度。为了获得高精度的图像,寻找一种方便而稳健的畸变校正方法显得尤为重要。

现有的非度量校正方法仅利用直线度的单一特性,导致优化过程中存在测量精度低、适用性差、容易陷入局部极值等问题。针对这些问题,本文重点研究了一种采用双特性联合度量的镜头畸变校正方法,其优点在于:首先,本文方法不需要标定摄像机的内外参数,避免了内外参数耦合对畸变系数的影响;其次,针对摄像机畸变中心的定位误差问题,利用畸变模型的基本矩阵和最小二乘法,计算出准确的畸变中心,避免了因畸变中心位置不准确而对畸变校正效果产生的影响;最后,根据消隐点共线约束,定义并最小化直线与消隐点联合度量的优化目标函数。通过 Nelder-Mead 算法非线性优化,迭代计算出最优的畸变模型系数。大量实验结果表明,本文方法能够实现相机畸变的高精度校正。

## 2 镜头畸变模型

传统的全畸变模型通常可以表示为

$$\begin{cases} x_u = x_d - \delta_x \\ y_u = y_d - \delta_y \end{cases} \quad (1)$$

式中: $(x_d, y_d)$ 为畸变图像上的可测坐标,对应的畸变模型校正后的点坐标为 $(x_u, y_u)$ ;  $\delta_x$ 和 $\delta_y$ 表示平面图像上的畸变。根据全畸变模型,有

$$\begin{cases} \delta_x = k_1 x'(x'^2 + y'^2) + k_2 x'(x'^2 + y'^2)^2 + p_1(3x'^2 + y'^2) + 2p_2 x'y' + s_1(x'^2 + y'^2) \\ \delta_y = k_1 y'(x'^2 + y'^2) + k_2 y'(x'^2 + y'^2)^2 + p_2(x'^2 + 3y'^2) + 2p_1 x'y' + s_2(x'^2 + y'^2) \end{cases} \quad (2)$$

式中: $x' = x_d - c_x$ ,  $y' = y_d - c_y$ ;  $(c_x, c_y)$ 为畸变中心; $k_1, k_2$ 为径向畸变系数; $p_1, p_2$ 为偏心畸变系数; $s_1$ 和 $s_2$ 为棱镜畸变系数。利用系数 $k_1, k_2$ 对径向畸变进行建模,径向畸变是指图像像素点以畸变中心为中心点,沿径向产生的位置偏差,从而导致所成图像发生形变。正径向位移

称为枕形畸变,负径向位移称为桶形畸变,如图 1 所示。偏心畸变用系数 $p_1, p_2$ 进行建模,它是由光学透镜的中心不在同一条直线上引起的。如果相机镜头没有对准,则会产生棱镜畸变,用 $s_1, s_2$ 进行建模。因此,全畸变模型将这 3 种畸变结合在一起,使畸变有效地被校正。

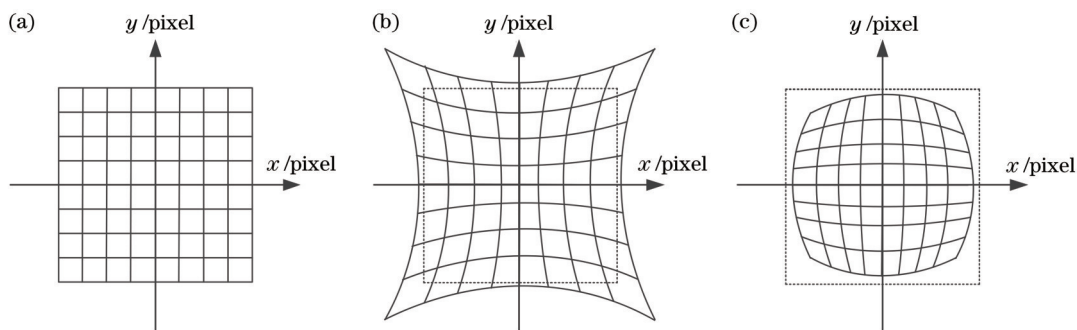


图 1 径向畸变。(a)理想无畸变图像;(b)枕形畸变;(c)桶形畸变

Fig. 1 Radial distortion. (a) Ideal image with no distortion; (b) pin-cushion distortion; (c) barrel distortion

视觉领域中绝大多数镜头的畸变均可利用上述模型校正<sup>[19]</sup>,实际畸变像点可通过图像处理算法获得,在已知所有畸变模型系数的情况下,可以对镜头畸变进行校正。

### 3 校正方法

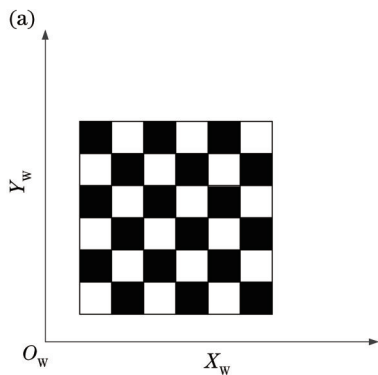
目前,基于直线度的方法已被广泛应用于镜头畸变校正。理想情况下,空间平行直线在图像平面上的投影相交于一点,即消隐点。然而,大多数基于线的方法只满足线性特性,不满足消隐点共线约束<sup>[19-20]</sup>。消隐点坐标的求解与单应矩阵  $H$  有关, $H$  用于描述空间坐标与图像坐标的直接对应关系。因此,基于全畸变模型,本文方法利用消隐点共线约束,定义消隐点和直线联合度量的畸变测度函数来求解畸变模型系数,从而实现镜头畸变的准确校正。

#### 3.1 畸变中心估计

在过去的工作中,总是假设图像中心为畸变中心<sup>[7,21,24]</sup>。实际上,畸变中心的位置受多种因素影响,比如镜头中心与 CCD 中心的偏移、传感器平面相对于镜头的微小倾斜等。正如 Hartley 等<sup>[25]</sup>所述:“By experimentation, we show that the usual assumption that the center of distortion is at the center of the image is not valid.”畸变中心位置的偏移不仅会扩大图像畸变,而且会加大图像处理的难度。因此,畸变中心位置的准确性对镜头畸变的校正效果至关重要。

本文计算畸变中心的步骤如下:先利用畸变模型的基本矩阵得到关于畸变中心的方程,再利用最小二乘法求解出准确的畸变中心。通常情况下,基本矩阵可以从若干个点对应关系中计算得出,畸变中心即为此矩阵计算出的极点<sup>[26]</sup>。设  $G_c$  为棋盘上已知坐标点,  $G_d$  为已检测畸变图像上的对应点。坐标点  $G_u$  (在像素坐标中) 与  $G_c$  通过单应矩阵  $H_c$  关联,则有  $G_u = H_c G_c$ 。根据图像坐标和空间坐标的匹配关系,可以通过求解线性方程组得到  $H_c$ <sup>[26]</sup>。由于镜头畸变的存在,  $G_u$  将会偏移至  $x_d$ , 从而得出

$$G_d = c + k(G_u - c), \quad (3)$$



式中:  $c$  为畸变中心。对式 (3) 左乘  $G_d^T [c]_{\times} ([\cdot]_{\times}$  表示  $3 \times 3$  反对称矩阵), 根据  $G_u = H_c G_c$ , 可得

$$k G_d^T [c]_{\times} H_c G_c = G_d^T [c]_{\times} H_c G_c = 0. \quad (4)$$

令  $Q = [c]_{\times} H_c$ , 畸变中心便可通过基本矩阵  $Q$  的左极点提取出来。然而,经过验证,没有一个向量满足  $c^T Q = 0$ 。因此,可利用最小二乘法求取方程  $c^T q_r = 0$  的解,其中  $r = 1, \dots, 3$ ,  $q_r$  为  $Q$  的第  $r$  列。至此,利用所有方程的最小二乘解即可求解出准确的畸变中心。

#### 3.2 畸变测度

##### 3.2.1 消隐点

在理想透视投影的作用下,若空间中存在相互平行的直线且直线与像平面不平行,则其在像平面上的投影会相交于一点,该点即为空间平行直线所对应的消隐点<sup>[26]</sup>。如图 2 所示,一组平行直线  $d$  的消隐点  $v$  是由平行于  $d$  并过  $O_c$  的射线与图像平面的交点。因此,三维空间中一组平行直线映射到图像上会有共同的消隐点。

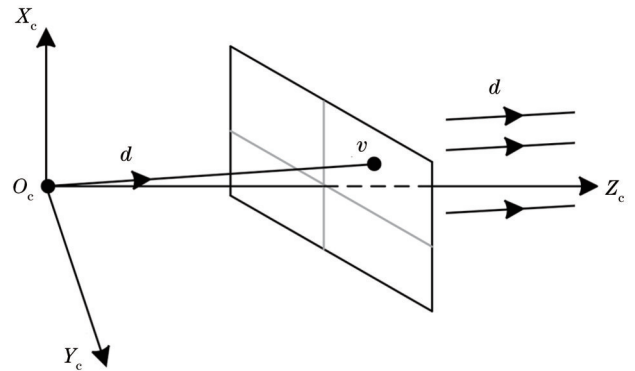


图 2 消隐点示意图

Fig. 2 Schematic of vanishing point

从以上分析可以看出,消隐点约束在镜头畸变校正中非常重要。图 3(a) 为空间平面 (为不失一般性,本文假设空间平面  $Z_w = 0$ ) 的靶标示意图,图 3(b) 为靶标经过投影后的示意图,  $V_1$  和  $V_2$  分别是对应于棋盘格靶标平面水平、竖直方向上的消隐点。

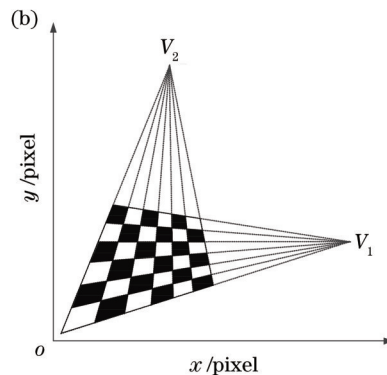


图 3 靶标示意图。(a) 空间平面上的靶标; (b) 图像平面上的靶标投影和消隐点

Fig. 3 Target diagrams. (a) Target diagram on space plane; (b) target projection and vanishing point schematic on image plane

在世界坐标系下,棋盘格靶标平面水平方向为  $x$  轴方向,竖直方向为  $y$  轴方向,它们各自方向分别表示

为  $[1, 0, 0]^T$  和  $[0, 1, 0]^T$ 。由高等几何知识可知,上述方向分别为水平、竖直方向直线与无穷远直线的交



点<sup>[26]</sup>,则有

$$\begin{cases} \lambda_x \begin{bmatrix} h_{ux} \\ h_{vy} \\ 1 \end{bmatrix} = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = h_1 \\ \lambda_y \begin{bmatrix} v_{ux} \\ v_{vy} \\ 1 \end{bmatrix} = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = h_2 \end{cases}, \quad (5)$$

式中:  $(h_{ux}, h_{vy})$  和  $(v_{ux}, v_{vy})$  分别为水平和竖直方向上的消隐点坐标;  $\lambda_x, \lambda_y$  分别表示靶标平面  $x$  轴和  $y$  轴方向的尺度因子。因此,消隐点坐标的计算公式为

$$\begin{cases} h_{ux} = h_{11}/h_{31} \\ h_{vy} = h_{21}/h_{31} \end{cases}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} v_{ux} = h_{12}/h_{32} \\ v_{vy} = h_{22}/h_{32} \end{cases}, \quad (7)$$

式中:  $h_g (g=1, 2, 3)$  为  $H$  的列向量,  $h_{gw} (w=1, 2)$  为  $H$  中第  $g$  行、第  $w$  列的元素。

### 3.2.2 共线向量

目前基于直线的方法只考虑了直线特性,未考虑消隐点对直线的约束,校正效果受拟合直线的精度影响。周子卿等<sup>[27]</sup>提出一种基于共线向量的畸变系数估计方法,使用向量内积作为畸变测度,但计算过程复杂,畸变参数的函数如式(8)所示。假设从一幅靶标图像提取到  $W$  行  $E$  列坐标点,则同一行或同一列直线上两个相邻特征点  $P_{m,n}$  和  $P_{m,n+1}$  构成向量  $\overrightarrow{P_{m,n}P_{m,n+1}}$ , 其中  $P_{m,n}(x_{um,un}, y_{um,un}) (m=1, 2, \dots, W; n=1, 2, \dots, E-1)$  为理想像点,按照此方法构造向量序列,取相邻两个向量做叉乘运算并计算其模。

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_{m,n-1}P_{m,n}} \times \overrightarrow{P_{m,n}P_{m,n+1}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{um,un} - x_{um,u(n-1)} & y_{um,un} - y_{um,u(n-1)} & 0 \\ x_{u(m+1),un} - x_{um,un} & y_{u(m+1),un} - y_{um,un} & 0 \end{vmatrix} = \\ \left[ (x_{um,un} - x_{um,u(n-1)})(y_{u(m+1),un} - y_{um,un}) - (x_{u(m+1),un} - x_{um,un})(y_{um,un} - y_{um,u(n-1)}) \right] k \\ \left| \overrightarrow{P_{m,n-1}P_{m,n}} \times \overrightarrow{P_{m,n}P_{m,n+1}} \right|^2 = \left[ (x_{um,un} - x_{um,u(n-1)})(y_{u(m+1),un} - y_{um,un}) - (x_{u(m+1),un} - x_{um,un})(y_{um,un} - y_{um,u(n-1)}) \right]^2 \end{cases}, \quad (8)$$

式中:  $i, j, k$  分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴正方向上的单位向量。

根据几何知识,两个向量共线且同向,则它们夹角为  $0^\circ$ 。邹朋朋等<sup>[28]</sup>利用直线上任意两点构造向量,并将其夹角作为畸变测度,构造共线向量约束函数[式(9)],但其算法受图像特征点的精度限制,很难对所计算的理想坐标点进行有效约束。此外,该方法也未能对畸变中心进行有效估计,致使畸变校正效果不能达到最优。

$$F(k_1) = \sum_{m=1}^W \sum_{n=2}^{E-1} \left| \arccos \left( \frac{\overrightarrow{P_{m,n-1}P_{m,n}} \cdot \overrightarrow{P_{m,n}P_{m,n+1}}}{\left| \overrightarrow{P_{m,n-1}P_{m,n}} \right| \left| \overrightarrow{P_{m,n}P_{m,n+1}} \right|} \right) \right|. \quad (9)$$

由消隐点共线约束可知,若空间平行直线与其对

应的消隐点共线,即直线上任意两点分别与消隐点构成的向量方向相同,其夹角必为  $0^\circ$ 。因此,本文方法在直线特性中加入消隐点共线约束,利用消隐点和直线双特性联合度量畸变,可以更准确地求解畸变模型系数。假设水平或竖直方向上的消隐点  $V$  坐标为  $(v_x, v_y)$ ,则同一行或同一列直线上两个相邻特征点  $P_{m,n}$  和  $P_{m,n+1}$  分别与消隐点可以构成向量  $\overrightarrow{VP_{m,n}}$  和  $\overrightarrow{VP_{m,n+1}}$ ,如式(10)所示。该方法充分利用了共线性作为透视不变量,同时加入消隐点对直线的约束,实现简单、计算量小。

$$\theta_m = \arccos \left( \frac{\overrightarrow{VP_{m,n}} \cdot \overrightarrow{VP_{m,n+1}}}{\left| \overrightarrow{VP_{m,n}} \right| \left| \overrightarrow{VP_{m,n+1}} \right|} \right), \quad (10)$$

式中:  $\theta_m$  为畸变测度函数。根据向量的定义,有

$$\begin{cases} \overrightarrow{VP_{m,n}} \cdot \overrightarrow{VP_{m,n+1}} = (x_{um,un} - v_x)(x_{um,u(n+1)} - v_x) + (y_{um,un} - v_y)(y_{um,u(n+1)} - v_y) \\ \left| \overrightarrow{VP_{m,n}} \right| \left| \overrightarrow{VP_{m,n+1}} \right| = \sqrt{(x_{um,un} - v_x)^2 + (y_{um,un} - v_y)^2} \sqrt{(x_{um,u(n+1)} - v_x)^2 + (y_{um,u(n+1)} - v_y)^2} \end{cases}, \quad (11)$$

式中:  $\overrightarrow{VP_{m,n}} \cdot \overrightarrow{VP_{m,n+1}}$  为同一条直线上的坐标点与其对应消隐点所构成向量的数量积;  $\left| \overrightarrow{VP_{m,n}} \right| \left| \overrightarrow{VP_{m,n+1}} \right|$  为同一条直线上的坐标点与其对应消隐点所构成向量的模的乘积。

### 3.3 畸变系数求解

综合以上各小节的讨论分析结果,本文方法将任意两个相邻坐标点分别与其对应直线的消隐点所构成同向向量的夹角作为畸变测度,建立畸变模型参数的目标函数:

$$R = \sum_{m=1}^W \sum_{n=1}^{E-1} |\theta_m|, \quad (12)$$

其中,棋盘格靶标共有  $W$  行  $E$  列坐标点。基于上述分析,利用(12)式对每一行或每一列坐标分别与消隐点所构成向量的夹角求和,使用Nelder-Mead算法进行非线性优化,即可求解出全畸变模型的系数。比较每次迭代之后的畸变校正结果,当迭代次数达到预先设定的阈值(本文设置为5)时,迭代结束;否则,根据本文方法继续迭代。

### 3.4 畸变校正流程

提出一种基于消隐点共线约束的镜头畸变非量校正方法。首先,根据畸变模型的畸变矩阵和最小二乘法,对畸变中心进行精确求解;其次,根据直线度和消隐点约束理论,构建了双特性联合度量的优化约束函数;最后,使用Nelder-Mead算法进行非线性优化,迭代求解出最优的畸变模型系数。本文方法的流程如图4所示,具体的求解流程如下:

1) 获取畸变图像,利用Harris算子对棋盘格坐标点  $P$  进行检测,并计算出单应矩阵  $H$ 。

2) 利用畸变模型的基本矩阵  $Q$  和最小二乘法求解出准确的畸变中心  $c(c_x, c_y)$ 。

3) 根据消隐点约束理论,利用单应矩阵  $H$  计算出水平和垂直方向的消隐点  $V_1$  和  $V_2$  的坐标分别为  $(h_{vx}, h_{vy}), (v_{vx}, v_{vy})$ 。

4) 根据消隐点约束和共线向量理论,将向量夹角作为畸变测度,可以得到共线向量约束函数  $\theta_m =$

$$\arccos \left( \frac{VP_{m,n} \cdot VP_{m,n+1}}{\|VP_{m,n}\| \|VP_{m,n+1}\|} \right),$$

从而构建出最终的优化目标函数  $R = \sum_{m=1}^W \sum_{n=1}^{E-1} |\theta_m|$ ,使用Nelder-Mead算法对  $R$  进行非线性优化。

5) 迭代步骤3)和4),在  $R$  趋向于最小值的过程中,不断更新  $k_1, k_2, p_1, p_2, s_1, s_2$ 。当迭代达到预先设定的最大迭代次数  $M$  时,迭代结束。

6) 利用步骤5)的迭代结果  $k_1, k_2, p_1, p_2, s_1, s_2$  对畸变图像进行校正。

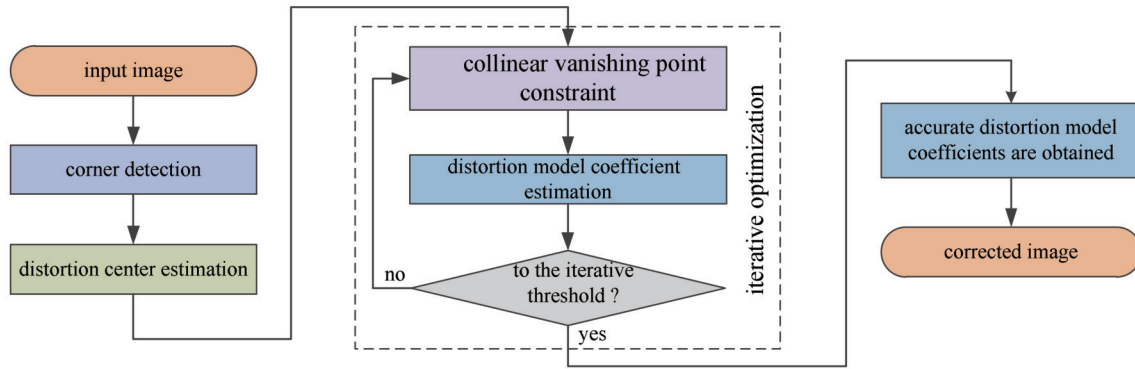


图4 本文方法的具体步骤  
Fig. 4 Specific steps of proposed method

## 4 实验结果与分析

为验证本文方法的实用性和可靠性,进行了两方面实验:1)验证本文方法所计算畸变中心的准确性;2)将本文方法的校正结果与典型的基于单测度非量测校正方法的校正结果进行详细对比。其中,单测度非量测校正方法包括拟合直线方法<sup>[23]</sup>、共线向量方

法<sup>[28]</sup>。实验中使用摄像机对棋盘格靶标进行采样,图5所示为采集的3幅原始图像[图5(a)、(b)、(c)分别是不同角度的靶标拍摄图],利用本文方法校正后的图像如图6所示。可以看出,图像的畸变被有效校正,没有出现空洞失真现象。如图7所示,对畸变校正前、后的图像进行边缘检测并勾勒其轮廓,可以更明显地观察本文方法校正畸变的效果。可以看到,



图5 棋盘格靶标原始图像。(a)图像1;(b)图像2;(c)图像3  
Fig. 5 Original images of checkerboard targets. (a) Image 1; (b) image 2; (c) image 3

图 7 中有 15 条采样线和 54 个点, 表明畸变校正前后为衡量畸变校正效果, 即校正精度, 观察共线特征点的变化, 将畸变校正后的平均直线度误差 (ASE) 和交比 (CR) 作为评价因子。ASE 为校正点与拟合直线的方均根距离<sup>[29]</sup>, 校正后的 ASE 值越小, 表明校正

的显著差别。果越好; CR 是射影几何中的基本不变量之一, 校正后的 CR 值越接近靶标 CR 值, 表明校正效果越好。如图 8 所示, 对于任意 4 条直线的共线点, 存在一个确定的 CR<sup>[26]</sup>, 并且 CR 在直线的任何投影变换下均不变。

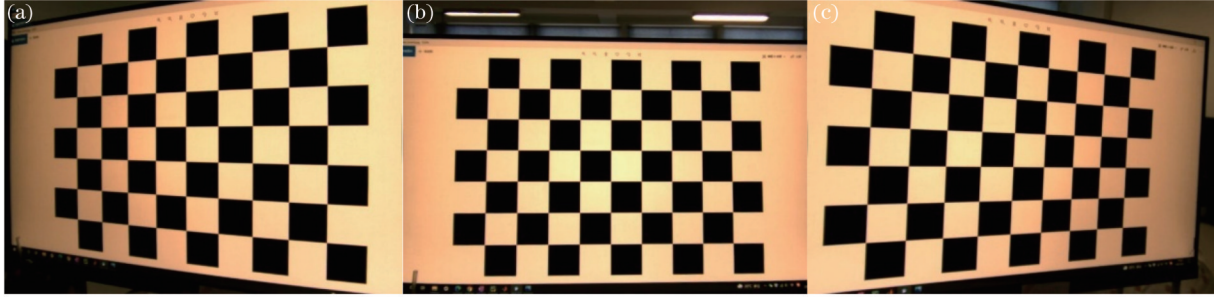


图 6 利用本文方法校正后的图像。(a) 图像 1; (b) 图像 2; (c) 图像 3

Fig. 6 Corrected images using proposed method. (a) Image 1; (b) image 2; (c) image 3

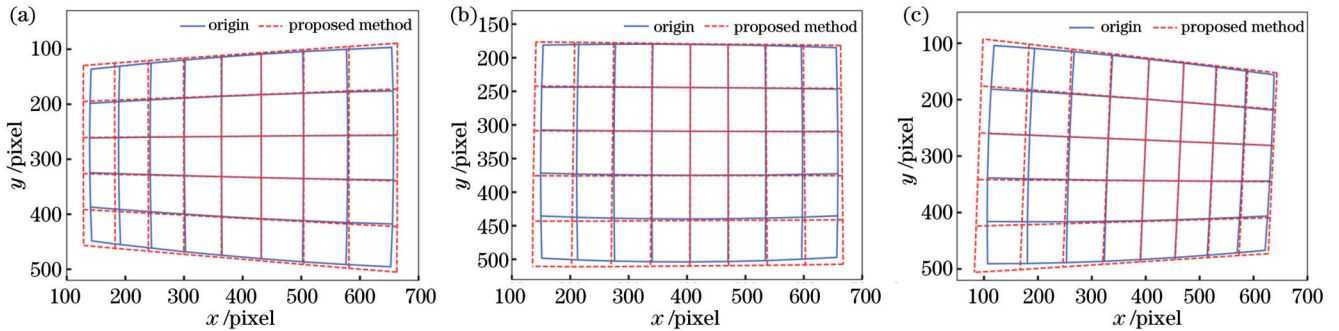


图 7 校正前、后坐标点的变化对比。(a) 图像 1; (b) 图像 2; (c) 图像 3

Fig. 7 Comparison of distorted-point and corrected-point. (a) Image 1; (b) image 2; (c) image 3

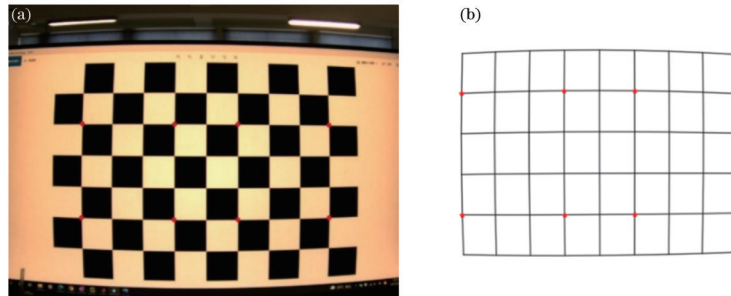


图 8 特征点选取。(a) 棋盘格图像; (b) 检测到的网格 (选择每一行的红色圆点计算直线的 CR)

Fig. 8 Feature point selection. (a) An image of a chessboard; (b) detected grid (select the red dot of each line to calculate the CR of the line)

#### 4.1 畸变中心精度分析

为了评价本文方法计算畸变中心的准确性, 对默认图像几何中心和确定畸变中心的校正结果进行对比, 结果如表 1 所示, 其中  $R_0$  为靶标 CR,  $R_{origin}$  为畸变校正前的 CR,  $R_{undc}$  和  $R_{dc}$  分别为默认图像几何中心和确定畸变中心校正后的 CR,  $\Delta R_{origin}$  为  $R_0$  和  $R_{origin}$  的差值,  $\Delta R_{undc}$  为  $R_0$  和  $R_{undc}$  的差值,  $\Delta R_{dc}$  为  $R_0$  和  $R_{dc}$  的差值。从表 1 可以看出, 无论是否确定畸变中心, 利用本文方法对镜头畸变进行校正后的 CR 均接近靶标 CR, 畸变校正后的效果明显优于校正前。此外, 确定畸变中心后

校正的结果比使用图像几何中心校正的结果更稳定, 鲁棒性更强。计算得到,  $\Delta R_{undc}$  的均值比  $\Delta R_{origin}$  的均值减小了 5.38%,  $\Delta R_{dc}$  的均值比  $\Delta R_{origin}$  的均值减小了 5.47%, 而  $\Delta R_{dc}$  的均值比  $\Delta R_{undc}$  的均值减小 2.78%, 即利用本文方法计算的畸变中心校正后的 CR 更接近靶标 CR, 证明本文方法取得非常好的校正效果, 也表明了畸变中心对畸变校正效果的影响不容忽视。

图 9 所示为 ASE 的对比结果, 其中  $E_{origin}$  为畸变校正前的 ASE,  $E_{undc}$  和  $E_{dc}$  分别为默认图像几何中心和确定畸变中心校正后的 ASE。根据计算,  $E_{undc}$  的均值比



表 1 CR 对比  
Table 1 Comparison of CR

Image	Row No.	$R_0$	$R_{origin}$	$R_{undc}$	$R_{dc}$	$\Delta R_{origin}$	$\Delta R_{undc}$	$\Delta R_{dc}$
Image 1	1	1.5625	1.5372	1.5609	1.5614	0.0253	0.0016	0.0011
	2	1.5625	1.5355	1.5615	1.5619	0.0270	0.0010	0.0006
	3	1.5625	1.5359	1.5624	1.5627	0.0266	0.0001	0.0002
	4	1.5625	1.5359	1.5627	1.5629	0.0266	0.0002	0.0004
	5	1.5625	1.5371	1.5624	1.5628	0.0254	0.0001	0.0003
	6	1.5625	1.5369	1.5611	1.5619	0.0256	0.0014	0.0006
Image 2	1	1.5625	1.5383	1.5614	1.5621	0.0242	0.0011	0.0004
	2	1.5625	1.5376	1.5608	1.5628	0.0249	0.0017	0.0003
	3	1.5625	1.5377	1.5612	1.5626	0.0248	0.0013	0.0001
	4	1.5625	1.5379	1.5616	1.5624	0.0246	0.0009	0.0001
	5	1.5625	1.5377	1.5614	1.5626	0.0248	0.0011	0.0001
	6	1.5625	1.5372	1.5606	1.5627	0.0253	0.0019	0.0002
Image 3	1	1.5625	1.5364	1.5623	1.5626	0.0261	0.0002	0.0001
	2	1.5625	1.5352	1.5619	1.5620	0.0273	0.0006	0.0005
	3	1.5625	1.5359	1.5624	1.5626	0.0266	0.0001	0.0001
	4	1.5625	1.5374	1.5629	1.5628	0.0251	0.0004	0.0003
	5	1.5625	1.5362	1.5620	1.5621	0.0263	0.0005	0.0004
	6	1.5625	1.5369	1.5615	1.5618	0.0256	0.0010	0.0007
Average		1.5625	1.5368	1.5617	1.5624	0.0257	0.0008	0.0004

$E_{origin}$  的均值减小 73.09%,  $E_{dc}$  的均值比  $E_{origin}$  的均值减小 77.72%,  $E_{dc}$  的均值比  $E_{undc}$  的均值减小 25.00%。ASE 的对比结果再次验证了利用本文方法计算畸变中心的有效性。

表 2 给出了用图像 1~3 计算出的畸变模型系数,

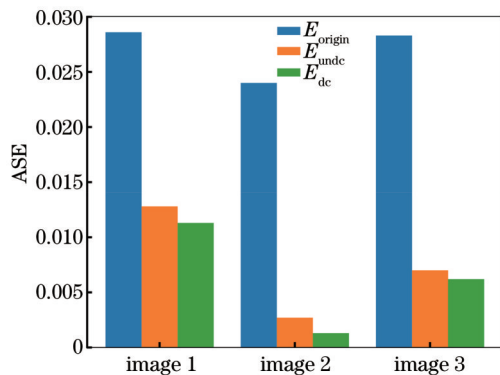


图 9 ASE 对比  
Fig. 9 Comparison of ASE

表 2 畸变模型系数

Table 2 Coefficients of distortion model

Coefficient	$k_1 / 10^{-8}$	$k_2 / 10^{-13}$	$p_1 / 10^{-5}$	$p_2 / 10^{-6}$	$s_1 / 10^{-5}$	$s_2 / 10^{-6}$	$c_x$	$c_y$
Model before correction	-2.3336	0.0042	5.8830	1.8824	1.1894	-5.0863	400	300
Model after correction	-2.4145	0.5450	3.0599	2.9498	2.0219	0.5907	430.2705	283.5048

将文献[23]、文献[28]方法校正后的 ASE 与本文方法校正后的 ASE 进行比较,结果如表 3 所示,其中  $E_0$  表示畸变校正前的 ASE,  $E_{[23]}$  和  $E_{[28]}$  分别表示使用

其中 model before correction 和 model after correction 分别表示默认图像几何中心和确定畸变中心所计算的畸变模型系数。

#### 4.2 本文方法性能分析

为进一步分析本文方法的校正精度和有效性,将文献[23]方法、文献[28]方法与本文方法的畸变校正的结果进行对比,结果如图 10 所示。可以明显看出,本文方法的畸变校正效果更好,也更稳定。

CR 对比结果如图 11 所示,其中,CR 计算点的选择如图 8(b)所示,这样每一幅图片均可得到 6 组 CR。可以看出,本文方法比文献[23]和文献[28]方法的校正效果更好,CR 稳定在靶标真实值附近。经计算可得,利用文献[23]方法校正后与校正前的 CR 差值为 0.04483,利用文献[28]方法校正后与校正前的 CR 差值为 0.08956,而利用本文方法校正后与校正前的 CR 差值为 0.00634。经计算可得,本文方法的 CR 差值比文献[23]方法平均减小 85.85%,比文献[28]方法平均减小 92.91%。

文献[23]和文献[28]方法校正后的 ASE,  $E_{PM}$  表示使用本文方法校正后的 ASE。从表 3 可以看出:利用文献[23]方法校正后的 ASE 均值比畸变校正前的 ASE

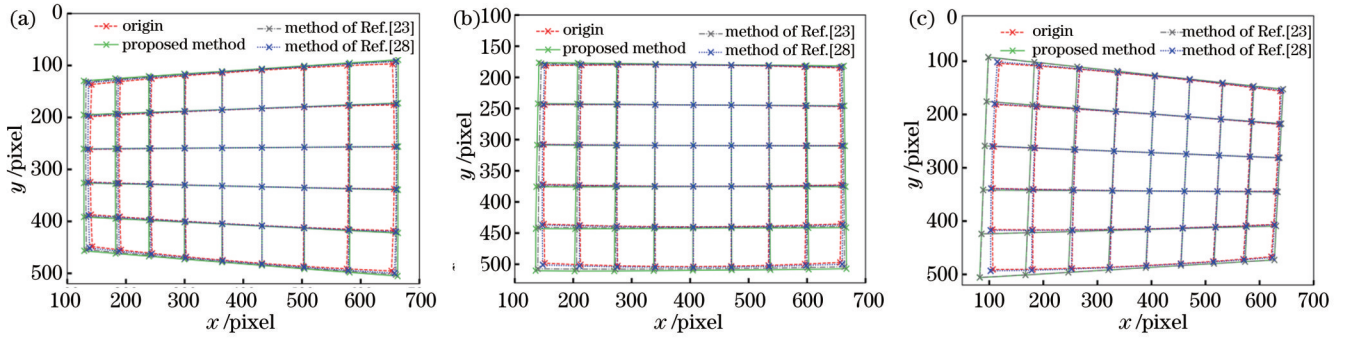


图 10 不同方法的畸变校正结果对比。(a)图像 1;(b)图像 2;(c)图像 3

Fig. 10 Comparison of distortion correction results by different methods. (a) Image 1; (b) image 2; (c) image 3

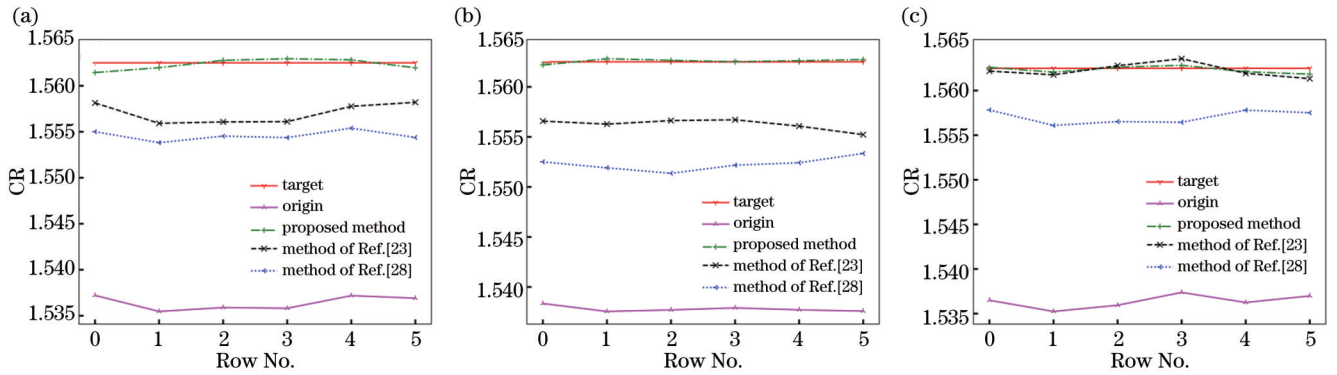


图 11 校正效果(CR)对比。(a)图像 1;(b)图像 2;(c)图像 3

Fig. 11 Comparison of correction effect (CR). (a) Image 1; (b) image 2; (c) image 3

均值减小了 67.48%，利用文献[28]方法校正后的 ASE 均值比畸变校正前的 ASE 均值减小了 60.98%；利用本文方法校正后的 ASE 均值比畸变校正前的 ASE 均值减小了 92.68%，比文献[23]方法校正后的 ASE 均值减小了 77.50%，比文献[28]方法校正后的 ASE 均值减小了 81.25%。ASE 的对比结果再次证明了本文方法具有较好的畸变校正效果。

表 3 ASE 对比

Table 3 Comparison of ASE

Image	$E_0$	$E_{[23]}$	$E_{[28]}$	$E_{PM}$
Image 1	0.0253	0.0099	0.0108	0.0025
Image 2	0.0240	0.0078	0.0094	0.0013
Image 3	0.0245	0.0062	0.0086	0.0017
Average	0.0246	0.0080	0.0096	0.0018

## 5 结 论

基于直线的投影不变性,提出一种利用消隐点共线约束的镜头畸变非量测校正方法。利用畸变模型的基本矩阵和最小二乘法,准确计算出畸变中心,为后续的镜头畸变校正提供了坚实的基础。此外,与直线单特性方法不同,本文方法在直线特性的基础上引入消隐点共线约束,极大提高了直线度量的准确性;同时定义双特性联合度量的线性残差函数,利用 Nelder-Mead 算法进行非线性优化,迭代计算出准确的畸变模

型系数。实验结果表明,本文方法适用于畸变图像的校正,具有更强的适用性和更精确的校正效果。在获得畸变坐标点的条件下,本文方法可以实现镜头畸变的准确校正。

## 参 考 文 献

- [1] Lelowicz K. Camera model for lens with strong distortion in automotive application[C]//2019 24th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), August 26-29, 2019, Miedzyzdroje, Poland. New York: IEEE Press, 2019: 314-319.
- [2] 贾厚勇, 张勇, 魏军. 径向畸变的校正及其效果评估[J]. 济南大学学报(自然科学版), 2013, 27(1): 38-41.
- [3] Jia H Y, Zhang Y, Wei J. Radial distortion correction and its performance evaluation[J]. Journal of University of Jinan (Science and Technology), 2013, 27(1): 38-41.
- [4] Brown D C. Decentering distortion of lenses[J]. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 1966, 24(1): 555-566.
- [5] Brown D C. Close-range camera calibration[J]. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 1971, 42(10): 855-866.
- [6] Collins T, Bartoli A. Planar structure-from-motion with affine camera models: closed-form solutions, ambiguities and degeneracy analysis[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2017, 39(6): 1237-1255.



- [6] 伍明, 伍俊龙, 马帅, 等. 基于角点灰度分布特征的棋盘格角点检测[J]. 激光与光电子学进展, 2020, 57(1): 011204.  
Wu M, Wu J L, Ma S, et al. Checkerboard corner detection based on corner gray distribution feature[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2020, 57(1): 011204.
- [7] 石岩青, 常彩霞, 刘小红, 等. 面阵相机内外参数标定方法及进展[J]. 激光与光电子学进展, 2021, 58(24): 2400001.  
Shi Y Q, Chang C X, Liu X H, et al. Calibration methods and progress for internal and external parameters of area-array camera[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(24): 2400001.
- [8] Zhu H, Wang M L, Xu W Y. Research on calibration method of binocular vision system based on neural network[J]. Security and Communication Networks, 2021, 2021: 5542993.
- [9] Prescott B, McLean G F. Line-based correction of radial lens distortion[J]. Graphical Models and Image Processing, 1997, 59(1): 39-47.
- [10] Swaminathan R, Nayar S K. Nonmetric calibration of wide-angle lenses and polycameras[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(10): 1172-1178.
- [11] 胡均平, 宋菲菲, 罗春雷, 等. 一种基于自适应角点检测的非量测畸变校正方法[J]. 激光与光电子学进展, 2021, 58(12): 1210012.  
Hu J P, Song F F, Luo C L, et al. Non-metric distortion correction method based on adaptive corner detection[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(12): 1210012.
- [12] Alvarez L, Gómez L, Sendra J R. An algebraic approach to lens distortion by line rectification[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2009, 35(1): 36-50.
- [13] Park S W, Hong K S. Practical ways to calculate camera lens distortion for real-time camera calibration[J]. Pattern Recognition, 2001, 34(6): 1199-1206.
- [14] 贺俊吉, 张广军, 杨宪铭. 基于交比不变性的镜头畸变参数标定方法[J]. 仪器仪表学报, 2004, 25(5): 597-599.  
He J J, Zhang G J, Yang X M. Approach for calibration of lens distortion based on cross ratio invariability[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2004, 25(5): 597-599.
- [15] 刘丹, 刘学军, 王美珍. 由灭点进行径向畸变的自动校正[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(3): 407-413.  
Liu D, Liu X J, Wang M Z. Automatic approach of lens radial distortion correction based on vanishing points[J]. Journal of Image and Graphics, 2014, 19(3): 407-413.
- [16] Wang J H, Gu W, Zhu J X, et al. Calibration of lens distortion based on plane constraints[C]//ICDIP '09: Proceedings of the International Conference on Digital Image Processing, March 7-9, 2009, Bangkok, Thailand. New York: ACM Press, 2009: 355-358.
- [17] 张征宇, 黄诗捷, 罗川, 等. 基于共面条件的摄像机非线性畸变自校正[J]. 光学学报, 2012, 32(1): 0115002.  
Zhang Z Y, Huang S J, Luo C, et al. Nonlinear distortion correction of camera based on coplanar condition equations[J]. Acta Optica Sinica, 2012, 32(1): 0115002.
- [18] 张靖, 朱大勇, 张志勇. 摄像机镜头畸变的一种非量测校正方法[J]. 光学学报, 2008, 28(8): 1552-1557.  
Zhang J, Zhu D Y, Zhang Z Y. Nonmetric calibration of camera lens distortion[J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(8): 1552-1557.
- [19] Ahmed M, Farag A. Nonmetric calibration of camera lens distortion: differential methods and robust estimation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(8): 1215-1230.
- [20] Li H, Zhang X M, Wu H, et al. Line-based calibration of a micro-vision motion measurement system[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2017, 93: 40-46.
- [21] Zhou F Q, Cui Y, Gao H, et al. Line-based camera calibration with lens distortion correction from a single image[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2013, 51(12): 1332-1343.
- [22] Song G Y, Lee J W. Correction of radial distortion based on line-fitting[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2010, 8(3): 615-621.
- [23] 刘炼雄, 胡昌华, 何川, 等. 一种改进的基于直线特征的非量测畸变校正方法[J]. 光学学报, 2017, 37(9): 0915001.  
Liu L X, Hu C H, He C, et al. An improved non-metric distortion calibration method based on straight line characteristics[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(9): 0915001.
- [24] Thormählen T, Broszio H. Automatic line-based estimation of radial lens distortion[J]. Integrated Computer-Aided Engineering, 2005, 12(2): 177-190.
- [25] Hartley R, Kang S B. Parameter-free radial distortion correction with center of distortion estimation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(8): 1309-1321.
- [26] Hartley R, Zisserman A. Multiple view geometry in computer vision[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [27] 周子卿, 赵鹏, 李勃, 等. 基于共线向量的非量测镜头畸变校正[J]. 光学学报, 2014, 34(10): 1015001.  
Zhou Z Q, Zhao P, Li B, et al. Nonmetric lens distortion calibration based on collinear vectors[J]. Acta Optica Sinica, 2014, 34(10): 1015001.
- [28] 邹朋朋, 张滋黎, 王平, 等. 基于共线向量与平面单应性的双目相机标定方法[J]. 光学学报, 2017, 37(11): 1115006.  
Zou P P, Zhang Z L, Wang P, et al. Binocular camera calibration based on collinear vector and plane homography[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(11): 1115006.
- [29] Tang Z W, von Gioi R G, Monasse P, et al. High-precision camera distortion measurements with a "calibration harp"[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2012, 29(10): 2134-2143.