

# 在位势能对 Haldane 模型能带的影响及其拓扑电路的实现

朱德军<sup>1,2</sup>, 杭志宏<sup>1,2,3,4\*</sup>

<sup>1</sup>苏州大学物理科学与技术学院, 江苏 苏州 215006;

<sup>2</sup>苏州纳米科技协同创新中心, 江苏 苏州 215006;

<sup>3</sup>苏州大学高等研究院, 江苏 苏州 215006;

<sup>4</sup>江苏省薄膜材料重点实验室, 江苏 苏州 215006

**摘要** 以 Haldane 模型为研究体系, 扩展了拓扑电路对相互作用调制研究, 设计并构建了调制紧束缚模型在位势能的一般方法。通过改变 Haldane 模型的在位势能, 包括改变整体在位势能、对蜂窝晶格两原子施加不同在位势能, 以及调整边界原子在位势能等, 特别是构建相应的电路实验设计方案, 实现了对界面态的调制, 为进一步调控和利用界面态提供了新的思路。

**关键词** 物理光学; Haldane 模型; 在位势能; 光子晶体类比; 拓扑电路

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS202242.2126011

## Influence of On-Site Potential Energy on Bands of Haldane Model and Implementation of Its Topoelectrical Circuit

Zhu Dejun<sup>1,2</sup>, Hang Zhihong<sup>1,2,3,4\*</sup>

<sup>1</sup>School of Physical Science and Technology, Soochow University, Suzhou 215006, Jiangsu, China;

<sup>2</sup>Collaborative Innovation Center of Suzhou Nano Science and Technology, Suzhou 215006, Jiangsu, China;

<sup>3</sup>Institute for Advanced Study of Soochow University, Suzhou 215006, Jiangsu, China;

<sup>4</sup>Jiangsu Provincial Key Lab of Thin Films, Suzhou 215006, Jiangsu, China

**Abstract** Taking the Haldane model as the research system, we extend the current study of topoelectrical circuits modulating interactions and design and construct a general method to modulate the on-site potential energy of the tight-binding model. In this method, efforts are made to achieve the interface state modulation, including changes in the on-site potential energy of the Haldane model, which involves the change in overall on-site potential energy, the application of different on-site potential energies on the two atoms of the honeycomb lattice, and the adjustment to the on-site potential energy of boundary atoms, and in particular, the development of the corresponding design scheme for circuit experiments. The method provides a new idea for further control and utilization of interface states.

**Key words** physical optics; Haldane model; on-site potential energy; photonic crystal analogy; topoelectrical circuit

## 1 引言

拓扑物理一直是热门研究领域, 在 Kosterlitz-Thouless (KT) 相变理论提出后, 1980 年德国物理学家 Klitzing 等<sup>[1]</sup>在实验上发现了霍尔电导的新规律——在低温且强磁场的条件下, 霍尔电导是离散值而不是连续值; 1982 年著名的 TKNN 理论被提出<sup>[2]</sup>, 该理论

证明了在二维周期晶格中量子化的霍尔电导由动量空间中能带的拓扑性质决定, 且不同的 TKNN 数, 即第一类陈数 (Chern number), 对应不同的量子霍尔平台; 1988 年 Haldane<sup>[3]</sup>提出了基于石墨烯蜂窝结构的六角晶格模型, 这是实现量子反常霍尔效应的第一个模型。科学家们基于 Haldane 模型实现了包括双曲反常量子霍尔效应<sup>[4]</sup>、超冷原子中的拓扑态<sup>[5]</sup>、非厄米趋肤效

收稿日期: 2022-05-13; 修回日期: 2022-06-21; 录用日期: 2022-07-13

基金项目: 国家自然科学基金 (11874274)

通信作者: \*zhhang@suda.edu.cn

应<sup>[6]</sup>等新奇有趣的现象。Thouless、Kosterlitz 和 Haldane 三位物理学家也因为在拓扑方向的杰出贡献, 获得 2016 年诺贝尔物理学奖。随后, 拓扑物理学蓬勃发展, 这些新奇的拓扑物理现象引发人们思考如何进行实验论证。

拓扑现象与具体波动方程无关, 可以依靠光学<sup>[7-11]</sup>和声学<sup>[12-14]</sup>平台来验证相关的拓扑理论。光子晶体是具有不同折射率的材料在空间上周期排列的人工微结构<sup>[15]</sup>, 通过对光子晶体的调控, 可以实现有趣的物理现象。从布洛赫定理来看, 光子可以类比电子, 而光学的第一个拓扑物态量子霍尔效应就由 Haldane 和 Raghu<sup>[16-17]</sup>提出, 证明光子晶体能够实现类似电子晶体中的拓扑边界态。通过构建平面内光的自旋, 光子晶体也能实现量子自旋霍尔效应, 并在实验上证明了单向传输的特性<sup>[18]</sup>。除此之外, 光子晶体利用各种模型如二维 SSH 模型<sup>[19]</sup>、四级子模型<sup>[20]</sup>、Kagome 模型<sup>[21]</sup>等能够实现高阶的拓扑绝缘体。声子晶体的概念在光子晶体之后被提出<sup>[22-23]</sup>, 声学中的声子晶体亦具有倒格子空间能带结构, 通过引入气流可以构造等效磁场来实现声子的量子霍尔效应<sup>[24-25]</sup>。Li 等<sup>[26]</sup>通过实验实现了手性声子晶体中的 Weyl 点, 并证明了与 Weyl 点相关的表面态具有单向传播的拓扑性质。

在拓扑物理学发展史上, 光学和声学平台作了很大的贡献, 但这两种实验平台有一定的局限性, 特别是难以实现高维度拓扑现象, 现已不能满足拓扑物理的发展需求。电路是近几年兴起的实验平台<sup>[27]</sup>。Jia 等<sup>[28]</sup>最早提出可以在电路系统实现拓扑物理的类比, 用每个单元内两个电感间的电压来构造赝自旋自由度, 通过电路编织的方式实现相邻单元间的相互作用, 并通过线圈完成对边界态的激发和测量。随后, 出现更多有趣的电路实验, 首次用电路实现的是二维的四级子<sup>[29]</sup>, 之后在电路中陆续实现了二阶角态<sup>[30]</sup>、非厄米拓扑<sup>[31-33]</sup>, 更有甚者利用电路实现了光声平台无法完成的

高维度拓扑绝缘体<sup>[34-35]</sup>。通过构建与电子系统哈密顿量等价的电路拉普拉斯矩阵<sup>[36]</sup>, 可以模拟其他系统中难以观测的量子态, 从而推进相关研究。对比光子晶体和声子晶体等经典波拓扑实验平台, 拓扑电路是开展拓扑物理研究的良好平台, 亦可与紧束缚模型<sup>[37]</sup>一一对应, 在印刷电路板(PCB)上增加电路元件便可实现, 电路样品加工简单且容易被测量。本文基于拓扑电路研究并实现基于 Haldane 模型的新奇特性。

## 2 基本原理

自 1988 年 Haldane<sup>[3]</sup>提出基于石墨烯蜂窝结构的六角晶格模型以来, 科学家们从未停止对 Haldane 模型的研究。Haldane 模型如图 1 所示, 晶体原胞包含 A 和 B 两种原子, 最近邻与次近邻原子间的相互作用以黑线表示。最近邻(A-B)相互作用的相位为 0, 而次近邻 A-A 与 B-B 的相互作用呈非互易性。本研究为了便于实验实现, 将相位分别设置为  $\pi/2$  ( $-\pi/2$ )。所提模型与石墨烯结构的最大区别在于添加了次近邻相互作用, 而且作用在 A 和 B 原子的相位相反。虽然整体模型呈现零磁通量, 但是在次近邻围绕的区域中磁通量为非零值, 于是打破了时间反演对称性, 从而实现了反常量子霍尔效应。中国矿业大学杨玉婷研究组与本课题组合作, 利用改进 Haldane 电路模型, 即重新调整了次近邻相互作用与最近邻相互作用的相位, 实现了反手性边界态, 并且利用拓扑电路实验验证了反手性界面态在边界同方向传播, 且与体态中传播方向相反的特性<sup>[38]</sup>。除了相互作用, 原子的在位势能也是非常重要的参数。Yao 等<sup>[39]</sup>发现调制石墨烯锯齿状边界的在位势能可以实现色散能带从平庸到非平庸的转变。既然石墨烯带隙的界面态色散关系与原子的在位势能有关, 与石墨烯结构类似的 Haldane 模型能否也利用调制在位势能这一方式来调制拓扑界面态? 这也是本文希望开展的工作。

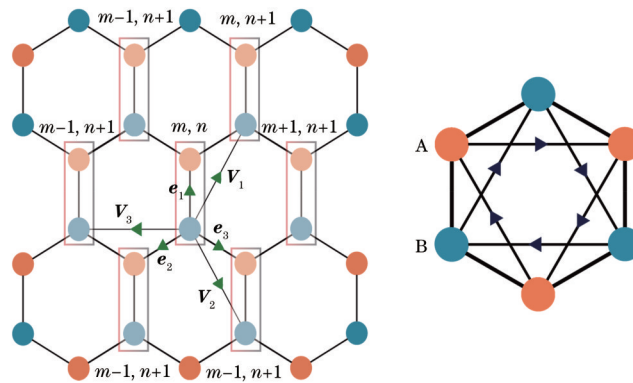


图 1 Haldane 模型示意图, 其中  $e_i$  和  $V_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 分别为最近邻和次近邻到相邻原胞的基矢, 右图为 Haldane 蜂窝晶格原胞相互作用示意图

Fig. 1 Schematic of Haldane model, where  $e_i$  and  $V_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) represent basis vectors of nearest and second nearest neighbors to neighboring protocells, and the right diagram shows the interaction of primitive cell in Haldane's honeycomb lattice

图 2 所示为在 Haldane 模型中添加在位势能的电路连接。每格点上设置两个电感, 分别设为 X 和 Y,

电感两端端点记为  $X_{\pm}$  和  $Y_{\pm}$ , 格点上电感电压值可以写为  $U_X = V_{X_+} - V_{X_-}$  和  $U_Y = V_{Y_+} - V_{Y_-}$ 。每个节点

都添加接地电容  $C_g$ , 其电容值为  $C_g$ , 该接地电容对在位势能。最近邻与次近邻格点间用电容连接, 最近邻格点 A-B 采取一一对应的直连方式, 而次近邻 A-A 与 B-B 由于相位不同, 二者电路连接方式呈镜像分布。采用与改良 Haldane 模型相同的计算方式, 虽然 Haldane 模型与改良 Haldane 模型在次近邻 B 格点上的连接方式不同, 但是计算电路的本征方程是一致的。首先从基尔霍夫定律出发, 考虑自旋向上的态  $U_{\uparrow} = U_x + iU_y$ , 可以推导出加入接地电容后的方程

$$E \begin{pmatrix} U_{k,\uparrow}^A \\ U_{k,\uparrow}^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k(\phi) & T_k \\ T_k^* & P_k(-\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{k,\uparrow}^A \\ U_{k,\uparrow}^B \end{pmatrix}, \quad (1)$$

式中:  $E = 3t_1 + 6t_2 + t_3 - 2\omega_0^2/\omega^2$ ,  $\omega$  为角频率且  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $C$  为参考电容,  $t_1$  和  $t_2$  分别为最近邻和次近邻的相互作用项 ( $C_1 = t_1C$  和  $C_2 = t_2C$ ),  $t_3$  为在位势能项 ( $C_g = -t_3C$ );  $T_k = t_1[\exp(ike_1) + \exp(ike_2) + \exp(ike_3)]$  表示最近邻的相互作用; \* 表示共轭;  $P_k = 2t_2[\cos(kv_1 + \phi) + \cos(kv_2 + \phi) + \cos(kv_3 + \phi)]$  表示次近邻的相互作用。

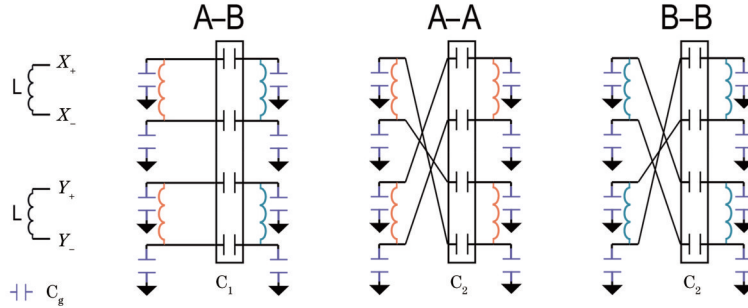


图 2 添加在位势能的电路设计图。最左侧两个黑色电感代表所有电路格点, 且 4 个节点分别标识为  $X_{\pm}$  和  $Y_{\pm}$ ; 右边 3 幅子图分别为不同 A、B 格点间的连接方式

Fig. 2 Setup of the circuit with on-site energy. The two black inductors on the far left represent all the grid points of the circuit, and the four nodes are identified as  $X_{\pm}$  and  $Y_{\pm}$ , respectively, and the pictures on the right are the connection modes between different grid points A and B, respectively

根据每个单元的方程, 构造出周期性带结构, 如图 3(a) 所示。每个原子具有相同的在位势能, 仅考虑锯齿状界面的情况, 电路参数分别为  $L = 3.3$  mH、

$C_1 = 330$  pF、 $C_2 = 33$  pF, 即  $t_1 = 1, t_2 = 0.1, t_3 = 0$ , 并使用 python 代码编写程序计算超原胞本征矩阵的本征频率, 从而得到图 3 所示的电路等效能带结构。将不同

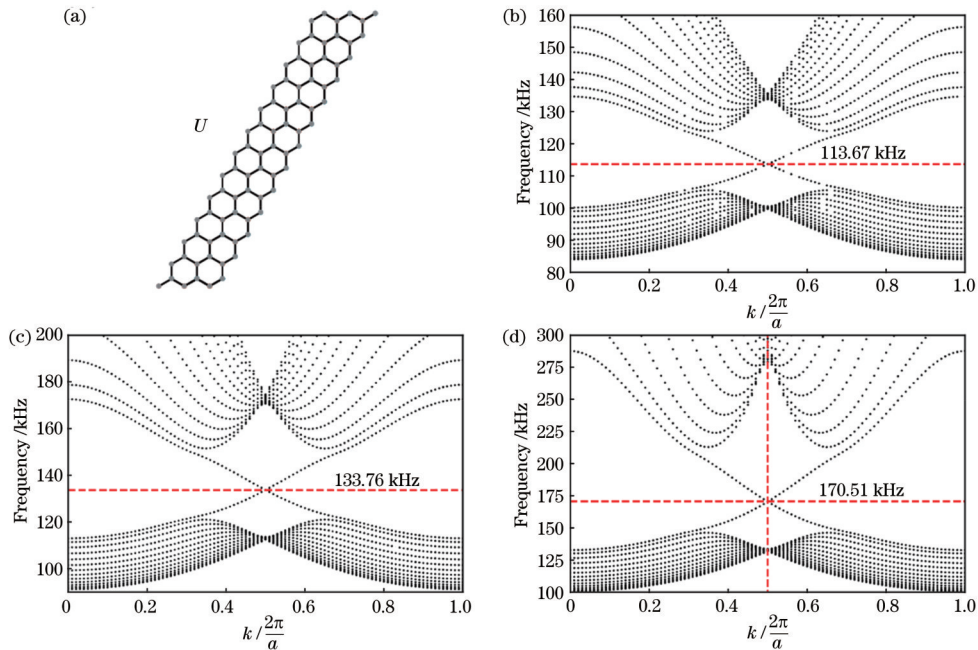


图 3 全局的在位势能调制。(a) 锯齿边界晶格的有限晶格示意图; (b) 具有锯齿状边界的周期带状晶格的电路等效能带图, 其中  $L = 3.3$  mH、 $C_1 = 330$  pF、 $C_2 = 33$  pF; (c)  $t_3 = 1$ 、(d)  $t_3 = 2$  时的能带结构

Fig. 3 Global on-site energy tuning. (a) Schematic of the finite lattice with zigzag edges; (b) equivalent band diagram of a periodic ribbon lattice with zigzag edges and parameters  $L = 3.3$  mH,  $C_1 = 330$  pF, and  $C_2 = 33$  pF; band diagrams when (c)  $t_3 = 1$  and (d)  $t_3 = 2$

电容电感值对应的紧束缚参数  $t_1, t_2, t_3$  等代入紧束缚模型, 根据式(2)可直接求得图 3 虚线所示的对应等效电路费米面频率, 即  $E=0$  时的频率:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{2}{3.6 - E}}, \quad (2)$$

计算结果为 113.67 kHz。从图 3 可以看到, 能带图出现了对应于上、下边界的两个边界态, 二者在等效电路费米面频率处相交, 这与 Haldane 模型的结果一致。继续考虑接地电容的紧束缚参数  $t_3$ , 将  $t_3$  代入式(1)的矩阵中进行简单变换后得到

$$E' \begin{pmatrix} U_{k,\uparrow}^A \\ U_{k,\uparrow}^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k(\phi) - t_3 & T_k \\ T_k^* & P_k(-\phi) - t_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{k,\uparrow}^A \\ U_{k,\uparrow}^B \end{pmatrix}, \quad (3)$$

式中:  $E' = 3t_1 + 6t_2 - 2\omega_0^2/\omega^2 = E + t_3$ 。由此可见, 通过引入不同的接地电容, 可以有效地对各原胞的在位势能进行局部调制。图 3(b)~(d) 对应整体在位势能  $t_3$  分别为 0、1、2 的情况。由于在位势能的增加, 整体能带明显向更高频率方向移动, 等效电路费米面频率分别为 113.67 kHz、133.76 kHz 和 170.51 kHz, 且等

效费米面频率与两个界面态的交点相交, 这与 Haldane 模型的理论结果吻合。从整体能带情况来看:  $t_3=1$  与  $t_3=0$  的情况基本类似, 即在这样的在位势能情况下, 拓扑电路模型可以很好地描述 Haldane 模型; 当  $t_3=2$  时, 电路等效费米面对应能量(频率)的变化不再与  $t_3$  的取值成线性关系, 整体能带的形状(等效费米面之上和之下的体带形状明显不同, 界面态色散也不再呈线性变化)受到很大影响。由此可以得出, 当  $t_3$  较大时, 电路仿真可能会偏离原本 Haldane 模型的紧束缚哈密顿量, 出现某些非线性现象, 这是值得今后探索的内容。为了与紧束缚模型进行直接比较, 此后使用小的接地电容值( $t_3 < 1$ )。

### 3 分析与讨论

以上的电路设计表明, 根据原胞中不同格点的在位势能, 可以使用不同的接地电容, 并根据以上计算的电路模型来探索局域在位势能的影响。图 4(a) 所示为 Haldane 模型的带状结构, 它在水平方向上呈周期性分布, 在垂直方向上考虑了 12 个单元格。参考文献

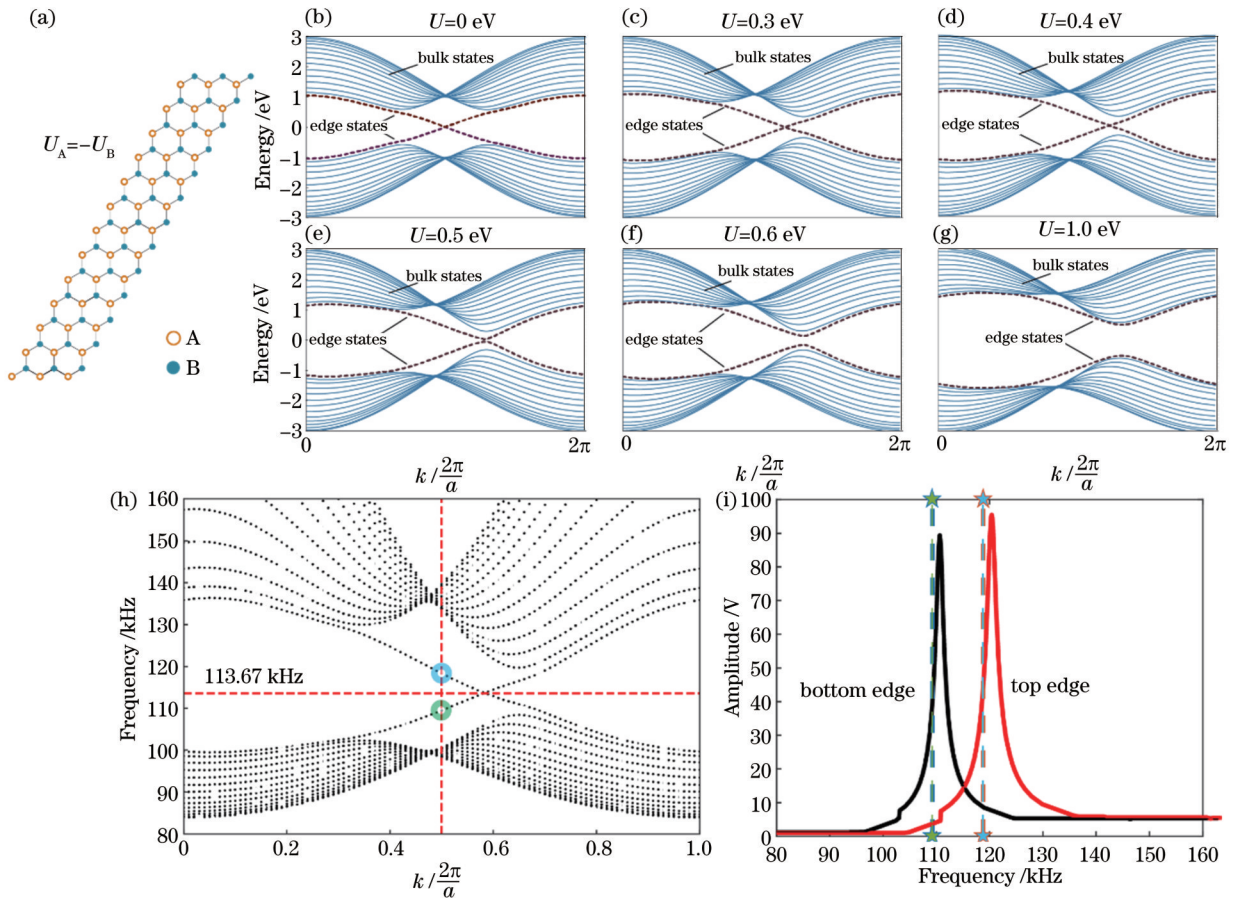


图 4 在所有的 A 和 B 格点上施加不同在位势能的 Haldane 模型能带图。(a) 计算的 Haldane 模型周期带状结构示意图; (b)~(g) 对 A 和 B 格点施加不同的在位势能 ( $U_A = -U_B = U$ ) 后计算得到的能带结构; (h) 当  $C_A = -C_B = -99$  pF 时的电路能带图; (i) 在设计 PCB 中仿真图 4(h) 两边界电感电压幅值

Fig. 4 Band diagrams of Haldane model with different on-site energies on all sites A and B. (a) Calculated periodic ribbon structural diagram of Haldane model; (b)-(g) calculated band structures with different on-site energies applied on sites A and B with  $U_A = -U_B = U$ ; (h) circuit band diagram when  $C_A = -C_B = -99$  pF; (i) inductance voltage measured on the upper and lower edges on a simulated PCB with circuit design

[39]的方案,为 A 和 B 原子设置不同的在位势能时得到的能带结构见图 4(b)~(g)。本研究采用紧束缚模型的计算方法,Haldane 模型原本对应的界面态在布里渊区边界;但当在位势能差值逐渐增大时,两条边界态的交点逐渐向右水平移动。当 A 和 B 原子的在位势能差值增大到 0.5 eV 时,两条边界态不再交叉,并出现了直接带隙。带隙宽度随在位势能差值的增大而逐渐增大,因此调制在位势能是调制边界态色散的有效方法。

下面利用电路模型进一步展示等效色散能带的演化,将 A 和 B 格点的接地电容设为  $C_A = -C_B$  (对应  $U_A = -U_B = U$ ),通过使用不同电容值  $C_A$  和  $C_B$ ,获得图 4(b)~(g)所示的演化过程。图 4(h)所示为计算得到的电路能带结构,其中  $C_B = -C_A = 99$  pF,其他参数与图 2 相同。对比图 4(c)、(h)可以发现,界面态在动量空间移动。原本边界态与布里渊区的边界( $k = \pi/a$ ,其中  $a$  为晶格常数)相交,但变换后的边界态色散关系相交于两个频率 109.52 kHz 和 118.35 kHz,分别落在图 3 中零在位势能对应交点频率 113.67 kHz 的两侧。

电路模型的另一个优点是不仅可以得到能带图,而且可以直接通过测量来验证色散演化。利用 LTspice 软件(www.linear.com/LTspice)设计电容和电感模拟电路。这些元件之间的接线电阻设为 0。测

量不同频率上(下)锯齿形边界的电感,结果如图 4(i)所示。在测量的电感-电压谱线中可以明显地看到峰值频率,并且对应的峰值频率与计算的频带有很好的 consistency,如图 4(h)所示。根据仿真结果,可以直接定制带有电感和电容的 PCB,而电感的测量可以利用示波器<sup>[28]</sup>。

进一步地,Haldane 模型所描述的石墨烯边界态色散关系也可以通过边界格点的在位势能进行调整,这需要精确地改变局部格点。利用电路模型对边界位置的接地电容进行调谐,就可以实现这一目标。如图 5(a)所示,体态内格点在在位势能均设为 0,上下边界格点在在位势能设为  $U_e$ 。从图 5(b)到图 5(g),通过修改边界在位势能(不同的  $C_g$ ),发现色散图的边界态出现了突变。最初,两个边界态的色散在  $\pi/a$  处相交,能量为 0,后交叉点随着正(负)在位势能的添加转移到高(低)能量点。 $C_g$  的进一步增大也可以使两边缘态色散的交点从  $k = \pi/a$  调至 0,如图 5(g)所示。所设计电路模型的计算结果与紧束缚模型计算的结果吻合,因此在电路模型中使用  $t_3 = \pm 0.5$  的参数。在图 5(h)、(i)的电路等效计算能带图中,接地电容设置为  $C_g = -115$  pF (115 pF),边界态的交叉点偏移至 118.51 kHz (109.39 kHz)。

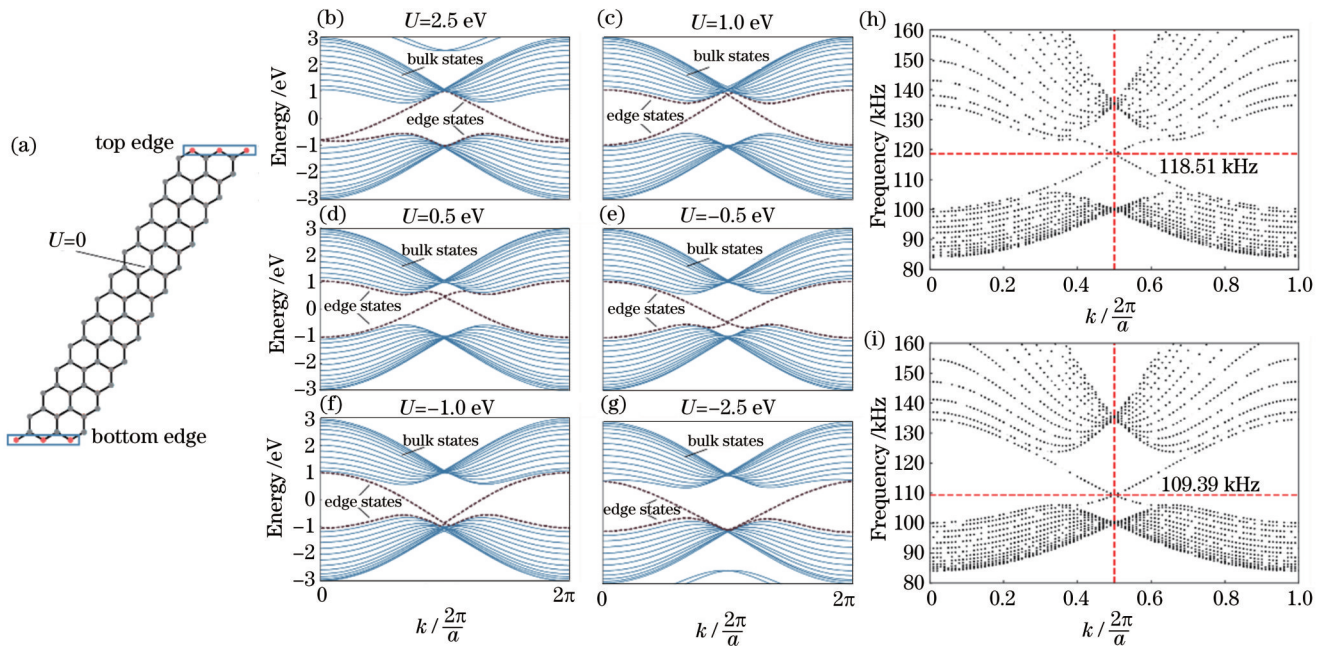


图 5 只在边界上施加不同在位势能的 Haldane 模型能带图。(a)计算模型的示意图;(b)~(g)施加不同在位势能时的能带图;当边界上施加的接地电容为(h)  $-115$  pF 和(i)  $115$  pF 的等效电路能带图

Fig. 5 Band diagrams of Haldane model with different on-site energies applied only on boundary sites. (a) Schematics of proposed model; (b)-(g) calculated band diagrams with different edge onsite energies; equivalent circuit band diagrams with grounding capacitors (h)  $C_g = -115$  pF and (i)  $C_g = 115$  pF on edge sites

如前文所述,可以通过调整 Haldane 模型 A 和 B 格点或只调整边界位置的在位势能来调制 Haldane 模型的能带。如果这两种方法同时应用,可能会产生更有趣的现象。如图 6 所示,体态中的格点 A ( $U_A$ ) 和 B ( $U_B$ ) 的在位势能相反,上下边界的在位势能分别为  $U_e$

和  $U_b$  且  $U_t = -U_b$ 。由于整个系统格点施加的净能量仍然为零,费米能级依旧保持在零能量。有趣的是,在这种结构下,边界态色散可以通过在位势能进行调整。设格点 A 的在位势能为 0.5 eV,格点 B 的在位势能为  $-0.5$  eV,两种边界态的简并点沿波矢方向水平移动

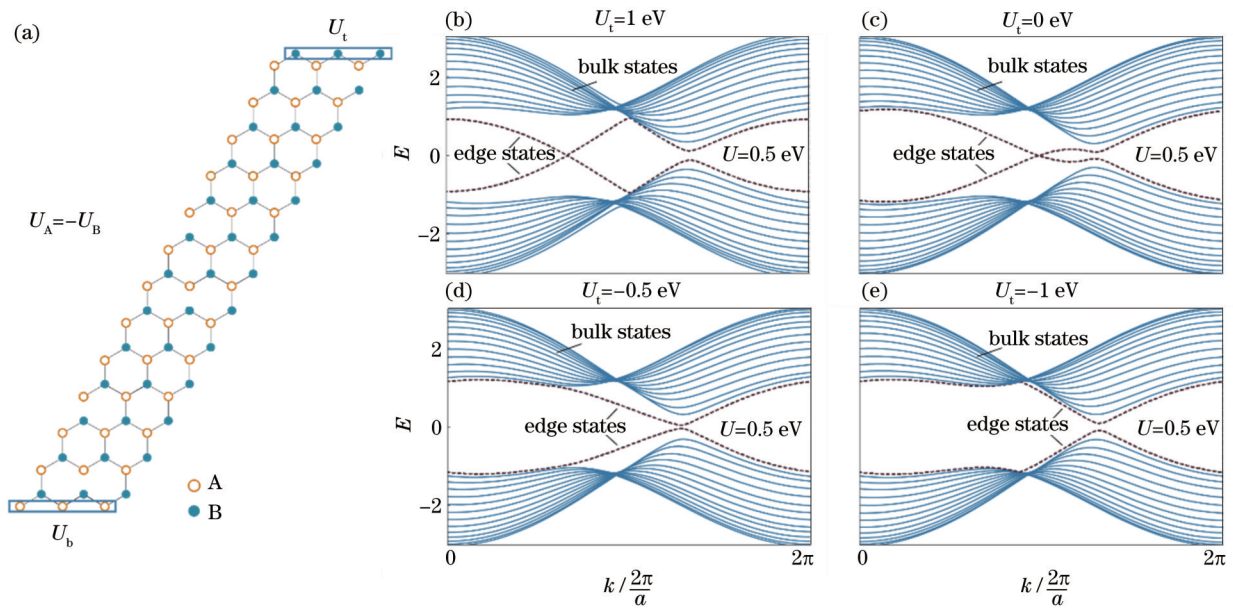


图 6 边界和体内施加不同在位势能的 Haldane 模型能带图。(a) 计算模型示意图; (b)~(e) 施加不同  $U_t$  的边界态色散曲线的演化

Fig. 6 Band diagrams of Haldane model with different bulk and edge on-site energies. (a) Schematics of proposed model;

(b)~(e) evolution of edge state dispersion curves using different  $U_t$ .

[图 6(c)], 也验证了图 3 的结果。然而, 施加在边界位置的在位势能对这两种色散有很强的影响, 微小的变化就会导致巨大的变化, 甚至会导致带隙打开[图 6(d)]。进一步减小边界位置的在位势能, 如图 6(e) 所示,  $U_t$  减小将导致边界态与体态色散合并, 边界态消失。这种体系中是否会发生一定的拓扑相变, 是值得今后进一步探讨的问题。

## 4 结 论

搭建了一种可实现在位势能测量的电路模型, 扩展了拓扑电路对相互作用调制研究, 设计并构建了调制紧束缚模型在位势能的一般方法。在 Haldane 模型在位势能的研究中, 通过构建在位势能调制的电路实现手法, 从多个维度对产生的拓扑界面态进行调控, 包括改变整体在位势能、对蜂窝晶格两原子施加不同在位势能, 以及调整边界原子在位势能等。利用电路仿真分析发现在位势能对界面态的色散关系产生很大影响, 特别是边界处在位势能的变化对边界态具有重要影响, 会实现从平庸到非平庸过程。相关的研究方法对进一步开展在位势能调制界面态色散关系, 为进一步调控和利用界面态提供了新的思路, 可以应用到包括石墨烯等其他晶格乃至三维甚至四维拓扑绝缘体的研究中。本研究中, 不同在位势能完全可以利用不同接地电容值来实现, 无需使用负电容, 在实际实验中可以通过调制接地正电容的差值便可有效地调制在位势能。当然在这种情况下, 能带的具体形状将会偏离紧束缚模型的结果。对照反手性边界态电路<sup>[38]</sup>和光学实现条件<sup>[40]</sup>可知, 光子晶体的在位势能调制方式可能是使用不同长度或大小的光子晶体圆柱。由于电磁波可以在背景材料中传播, 通常不能仅考虑最近邻相互作用, 还要考虑多重散射, 在相互作用方面与紧束

缚模型的对应不一定是最好的, 因此电路相对更方便且易于操作和调控。电路提供了一种实现更多现象的方法, 具有重大意义。凝聚态物理中的在位势能和相互作用可以同时通过电路来实现, 在实验上利用信号发生器激发信号并利用锁相放大器接收信号的方法, 使制成的电路板得到响应峰值, 以此探索更多有趣的物理模型。电路只是实现物理现象的平台之一, 在拓扑物理未来发展中, 会出现新的实验平台, 我们需更多地考虑多样性手段比如光学、声学 and 电路, 甚至采用多种平台组合的方式, 更好地为拓扑新理论的验证服务。

## 参 考 文 献

- [1] Klitzing K V, Dorda G, Pepper M. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance[J]. *Physical Review Letters*, 1980, 45(6): 494-497.
- [2] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, et al. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential[J]. *Physical Review Letters*, 1982, 49(6): 405-408.
- [3] Haldane F D. Model for a quantum Hall effect without Landau levels: condensed-matter realization of the "parity anomaly"[J]. *Physical Review Letters*, 1988, 61(18): 2015-2018.
- [4] Zhang W X, Yuan H, Sun N, et al. Observation of novel topological states in hyperbolic lattices[J]. *Nature Communications*, 2022, 13: 2937.
- [5] Yu J L, Xu Z F, Lü R, et al. Dynamical generation of topological magnetic lattices for ultracold atoms[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(14): 143003.
- [6] Li Y H, Liang C, Wang C Y, et al. Gain-loss-induced hybrid skin-topological effect[J]. *Physical Review Letters*, 2022, 128(22): 223903.

- [7] Khanikaev A B, Hossein Mousavi S, Tse W K, et al. Photonic topological insulators[J]. *Nature Materials*, 2013, 12(3): 233-239.
- [8] Lu L, Joannopoulos J D, Soljačić M. Topological photonics[J]. *Nature Photonics*, 2014, 8(11): 821-829.
- [9] Ozawa T, Price H M, Amo A, et al. Topological photonics[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2019, 91(1): 015006.
- [10] 陈剑锋, 梁文耀, 李志远. 磁光光子晶体中拓扑光子态研究进展[J]. *光学学报*, 2021, 41(8): 0823015.  
Chen J F, Liang W Y, Li Z Y. Progress of topological photonic state in magneto-optical photonic crystal[J]. *Acta Optica Sinica*, 2021, 41(8): 0823015.
- [11] 刘超, 郭小伟, 李绍荣, 等. 拓扑光子晶体边缘态理论与应用[J]. *激光与光电子学进展*, 2022, 59(1): 0100001.  
Liu C, Guo X W, Li S R, et al. Theory and application of edge states in topological photonic crystals[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2022, 59(1): 0100001.
- [12] Yang Z J, Gao F, Shi X H, et al. Topological acoustics[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(11): 114301.
- [13] He C, Ni X, Ge H, et al. Acoustic topological insulator and robust one-way sound transport[J]. *Nature Physics*, 2016, 12(12): 1124-1129.
- [14] Zhang X J, Xiao M, Cheng Y, et al. Topological sound[J]. *Communications Physics*, 2018, 1: 97.
- [15] Johnson S G, Mekis A, Fan S, et al. Molding the flow of light[J]. *Computing in Science & Engineering*, 2001, 3(6): 38-47.
- [16] Haldane F D M, Raghu S. Possible realization of directional optical waveguides in photonic crystals with broken time-reversal symmetry[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(1): 013904.
- [17] Raghu S, Haldane F D M. Analogs of quantum-Hall-effect edge states in photonic crystals[J]. *Physical Review A*, 2008, 78(3): 033834.
- [18] Yang Y T, Xu Y F, Xu T, et al. Visualization of a unidirectional electromagnetic waveguide using topological photonic crystals made of dielectric materials[J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(21): 217401.
- [19] Liu F, Deng H Y, Wakabayashi K. Topological photonic crystals with zero Berry curvature[J]. *Physical Review B*, 2018, 97(3): 035442.
- [20] He L, Addison Z, Mele E J, et al. Quadrupole topological photonic crystals[J]. *Nature Communications*, 2020, 11: 3119.
- [21] Herrera M A J, Kempkes S N, de Paz M B, et al. Corner modes of the breathing kagome lattice: origin and robustness[J]. *Physical Review B*, 2022, 105(8): 085411.
- [22] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, et al. Acoustic band structure of periodic elastic composites[J]. *Physical Review Letters*, 1993, 71(13): 2022-2025.
- [23] Sigalas M, Economou E N. Band structure of elastic waves in two dimensional systems[J]. *Solid State Communications*, 1993, 86(3): 141-143.
- [24] Khanikaev A B, Fleury R, Mousavi S H, et al. Topologically robust sound propagation in an angular-momentum-biased graphene-like resonator lattice[J]. *Nature Communications*, 2015, 6: 8260.
- [25] Ni X, He C, Sun X C, et al. Topologically protected one-way edge mode in networks of acoustic resonators with circulating air flow[J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(5): 053016.
- [26] Li F, Huang X Q, Lu J Y, et al. Weyl points and Fermi arcs in a chiral phononic crystal[J]. *Nature Physics*, 2018, 14(1): 30-34.
- [27] Liu S, Zhang S, Cui T J. Topological circuit: a playground for exotic topological physics[J]. *Chinese Journal of Optics*, 2021, 14(4): 736-753.
- [28] Jia N Y, Owens C, Sommer A, et al. Time- and site-resolved dynamics in a topological circuit[J]. *Physical Review X*, 2015, 5(2): 021031.
- [29] Imhof S, Berger C, Bayer F, et al. Topoelectrical-circuit realization of topological corner modes[J]. *Nature Physics*, 2018, 14(9): 925-929.
- [30] Wu J E, Huang X Q, Lu J Y, et al. Observation of corner states in second-order topological electric circuits[J]. *Physical Review B*, 2020, 102(10): 104109.
- [31] Helbig T, Hofmann T, Imhof S, et al. Generalized bulk-boundary correspondence in non-Hermitian topoelectrical circuits[J]. *Nature Physics*, 2020, 16(7): 747-750.
- [32] Liu S, Ma S J, Yang C, et al. Gain- and loss-induced topological insulating phase in a non-Hermitian electrical circuit[J]. *Physical Review Applied*, 2020, 13(1): 014047.
- [33] Xu K, Zhang X T, Luo K F, et al. Coexistence of topological edge states and skin effects in the non-Hermitian Su-Schrieffer-Heeger model with long-range nonreciprocal hopping in topoelectric realizations[J]. *Physical Review B*, 2021, 103(12): 125411.
- [34] Wang Y, Price H M, Zhang B L, et al. Circuit implementation of a four-dimensional topological insulator[J]. *Nature Communications*, 2020, 11: 2356.
- [35] Yu R, Zhao Y X, Schnyder A P. 4D spinless topological insulator in a periodic electric circuit[J]. *National Science Review*, 2020, 7(8): 1288-1295.
- [36] 罗开发, 余睿. 电路中的拓扑态[J]. *物理学报*, 2019, 68(22): 220305.  
Luo K F, Yu R. Topological states in electric circuit[J]. *Acta Physica Sinica*, 2019, 68(22): 220305.
- [37] Dong J K, Juričić V, Roy B. Topoelectric circuits: theory and construction[J]. *Physical Review Research*, 2021, 3(2): 023056.
- [38] Yang Y T, Zhu D J, Hang Z H, et al. Observation of antichiral edge states in a circuit lattice[J]. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2021, 64(5): 257011.
- [39] Yao W, Yang S A, Niu Q. Edge states in graphene: from gapped flat-band to gapless chiral modes[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(9): 096801.
- [40] Zhou P H, Liu G G, Yang Y H, et al. Observation of photonic antichiral edge states[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(26): 263603.