

## 韦伯分布布谷鸟搜索算法颗粒粒径分布反演

单良<sup>1</sup>, 查婷婷<sup>1</sup>, 孔明<sup>2\*</sup>, 洪波<sup>1</sup><sup>1</sup>中国计量大学信息工程学院浙江省电磁波信息技术与计量检测重点实验室, 浙江 杭州 310018;<sup>2</sup>中国计量大学计量测试工程学院, 浙江 杭州 310018

**摘要** 韦伯分布在非线性寻优问题中具有较好的寻优精度和全局搜索能力,为此提出一种基于韦伯分布的布谷鸟搜索(WCS)算法来解决颗粒粒径分布反演的问题。使用 WCS 算法对服从 Johnson's  $S_B$  分布、Rosin-Rammler 分布和正态分布的单峰颗粒系和双峰颗粒系进行颗粒粒径分布的反演,并分别与其他传统算法的处理结果进行比较。结果表明,WCS 算法的整体效果优于人工鱼群算法和人工蜂群算法,且改进后的 4 种重尾分布 CS 算法的标准差比原 CS 算法提升 2~3 个数量级。目标函数散射光能加入噪声后,WCS 算法比其他三种重尾分布的相对均方根误差值至少可降低 1/2。使用小角前向散射测量系统对单峰颗粒系和双峰混合颗粒系进行实验研究,发现 WCS 算法的相对均方根误差比原 CS 算法降低约为 40%。

**关键词** 散射;小角前向散射;布谷鸟搜索算法;韦伯分布;颗粒粒径反演

中图分类号 O436

文献标志码 A

doi: 10.3788/AOS202242.0229001

## Particle Size Distribution Inversion of Cuckoo Search Algorithm Using Weber Distribution

Shan Liang<sup>1</sup>, Zha Tingting<sup>1</sup>, Kong Ming<sup>2\*</sup>, Hong Bo<sup>1</sup><sup>1</sup>Key Laboratory of Electromagnetic Wave Information Technology and Metrology of Zhejiang Province, College of Information Engineering, China Jiliang University, Hangzhou, Zhejiang 310018, China;<sup>2</sup>College of Metrology & Measurement Engineering, China Jiliang University, Hangzhou, Zhejiang 310018, China

**Abstract** Weber distribution has better optimization accuracy and global search ability in nonlinear optimization problems. For this reason, a cuckoo search (WCS) algorithm based on Weber distribution is proposed to solve the problem of particle size distribution inversion. The WCS algorithm is used to invert the particle size distribution of unimodal and bimodal particle systems which follow Johnson's  $S_B$  distribution, Rosin-Rammler distribution, and normal distribution, and the results are compared with those of other traditional algorithms. The results show that the overall performance of the WCS algorithm is better than that of the artificial fish swarm algorithm and the artificial bee colony algorithm, and the standard deviation of the improved four heavy-tailed distribution CS algorithm is 2-3 orders of magnitude higher than the original CS algorithm. Compared with the other three heavy-tailed distributions, the relative root mean square error of the WCS algorithm can be reduced by at least 1/2 when the scattering light energy of the objective function is added into the noise. The small angle forward scattering measurement system is used to study the unimodal particle system and bimodal mixed particle system. It is found that the relative root mean square error of the WCS algorithm is about 40% lower than that of the original CS algorithm.

**Key words** scattering; small angle forward scattering; cuckoo search algorithm; Weber distribution; particle size inversion

收稿日期: 2021-07-05; 修回日期: 2021-08-09; 录用日期: 2021-08-13

基金项目: 国家自然科学基金(51874264,52076200)

通信作者: mkong@cjl. edu. cn

## 1 引言

颗粒粒径的准确检测在环境治理和能源利用等方面有着重要的意义<sup>[1]</sup>。近年来,光散射法具有测量方式简单和易操作等特点,使其在一系列颗粒粒径的测量方法中脱颖而出<sup>[2]</sup>,该方法只需测量颗粒的散射光强就可以求解其粒径分布。粒径分布的求解实质上是求解第一类 Fredholm 积分问题<sup>[3]</sup>,这类问题因其不适定性而很难稳定求解。随着问题规模的扩大,传统方法的求解效率和计算精度均很低,而且有很大的局限性,因此在光散射测量中通常采用非独立模式算法来反演。

近 20 年来,常用的非独立模式算法主要有遗传算法<sup>[4]</sup>、人工鱼群算法 (AFSA)<sup>[5]</sup> 和人工蜂群 (ABC) 算法<sup>[6]</sup> 等。采用遗传算法进行颗粒粒径分布的反演存在反演精度低、反演误差大和反演时间较长等问题,大部分遗传算法都需要改进后才能对目标函数进行正确反演计算<sup>[7-9]</sup>。人工鱼群算法在寻优过程中存在精度较低和易陷入局部极值的问题,尤其是在高维复杂问题和工程设计问题中性能较差,不能满足颗粒粒径反演的需要<sup>[10]</sup>。人工蜂群算法在全局搜索以及局部开发的情况下主要依赖于恰当的搜索策略,当分布函数峰值增加和反演难度增大时,不恰当的搜索策略会导致其性能变差<sup>[11]</sup>。因此,高性能的非独立模式算法是当下研究的重点之一。

21 世纪初期, Yang 等<sup>[12]</sup> 提出了一种新的元启发式优化算法,即布谷鸟搜索 (CS) 算法,该算法具有搜索过程简单、涉及参数少和搜索路径优的优点,已经成功应用于多目标、工程优化以及神经网络训练等问题的求解,而且表现出非常好的性能。此后,不断有学者对 CS 算法加以改进使之可以适应各种问题。Tsipianitis 等<sup>[13]</sup> 针对复杂非线性问题对 CS 算法中的外来鸟蛋被宿主发现的概率和飞行步长进行动态调整,并引入了静态和动态惩罚函数来提高算法的效率和鲁棒性。Inci 等<sup>[14]</sup> 提出动态布谷鸟搜索算法 (DCSA), 该算法可以增强燃料电池的能量提取能力,便于在动态温度响应下控制功率。至此,鲜有学者应用 CS 算法进行颗粒的检测与反演,尚未充分挖掘 CS 算法在多维函数寻优中较其他非独立模式算法的抗噪性能及其优势。

本文在小角前向散射系统中将 CS 算法应用于颗粒粒径分布的反演,通过光电探测器来测量前方某小角度内的散射信号,再采用算法来反演得到粒

径分布。CS 算法通过莱维飞行来实现随机游走,这种游走是一种以长步长与短步长相间的走位,这会导致算法的遍历性较弱。文献<sup>[15-16]</sup> 针对不同的研究问题引入重尾分布,结果表明引入重尾分布后算法的性能有一定的提升。鉴于此,本文在 CS 算法中引入另一种重尾分布,即韦伯分布。韦伯分布具有广泛的适用性,它长而肥的尾部结构有助于产生更大的步长,当一个个体陷入局部最优阶段时,较大的步长可利于个体快速跳出局部极值,使得个体有更高的概率跳到其他更好的位置,同时增强算法的全局搜索和局部搜索能力。因此,本文将韦伯分布布谷鸟搜索 (WCS) 算法与原布谷鸟算法、人工鱼群算法和人工蜂群算法以及柯西、帕累托和米塔-列夫勒三种重尾分布的布谷鸟搜索算法进行对比研究,并在此基础上加入随机噪声进行抗噪性能的分析。选取粒径为 50  $\mu\text{m}$  的单峰颗粒系以及粒径为 50  $\mu\text{m}$  和 100  $\mu\text{m}$  的双峰混合颗粒系,用来进行实验测量以验证算法的有效性。

## 2 韦伯分布布谷鸟搜索算法

采用 CS 算法模拟了布谷鸟在巢中的繁殖过程,同时结合一些鸟类的莱维飞行机制并通过随机变化步长的方式进行全局搜索和局部搜索,搜索后可以得到一个质量最好的鸟窝以孵化自己的雏鸟,即可快速准确地获得问题的最优解。Yang 等<sup>[12]</sup> 提出的 CS 算法有三个前提条件,条件如下。

- 1) 布谷鸟下的蛋会被放在一个随机的鸟巢里,并且每个布谷鸟一次只下一个蛋。
- 2) 最好的鸟窝将会被保留到下一代。
- 3) 鸟窝的个数  $n$  是固定的,而外来鸟蛋被发现的概率  $p_a \in (0, 1)$ 。当外来鸟蛋被发现时,巢主鸟将会抛弃它或者直接放弃这个鸟窝,从而在新的位置处建立一个全新的鸟窝。

CS 算法中鸟巢位置的更新公式为

$$X_i^{(t+1)} = X_i^{(t)} + \alpha \oplus L(\lambda) \otimes (X_i^{(t)} - X_{\text{best}}), \quad (1)$$

式中:  $X_i^{(t)}$  和  $X_i^{(t+1)}$  分别表示第  $t$  代和第  $t+1$  代第  $i$  个鸟巢的位置;  $\alpha$  表示控制的步长量;  $\oplus$  表示点对点加法;  $L(\lambda)$  表示从莱维飞行中随机计算得到的数,其中  $\lambda$  表示随机步长;  $\otimes$  表示点对点乘法;  $X_{\text{best}}$  表示当前集群中一个全局最优的鸟巢位置。

通过(1)式的位置更新后,随机数  $r$  会在  $[0, 1]$  之间随机产生。若  $r > p_a$ , 则对  $t+1$  代的鸟巢位置进行随机改进,反之保持不变,改进过程可表示为

$$X_i^{(t+1)} = X_i^{(t)} + r \oplus H(p_a - \epsilon) \otimes (X_j^{(t)} - X_k^{(t)}), \quad (2)$$

式中:  $X_j^{(t)}$  和  $X_k^{(t)}$  分别表示第  $j$  个和第  $k$  个鸟巢在第  $t$  代的迭代位置;  $\epsilon$  表示随机均匀分布的独立随机数;  $H(\cdot)$  表示 Heaviside 函数。

韦伯分布具有广泛的适用性,它长而肥的尾部结构有助于产生更大的步长,当一个个体陷入局部最优阶段时,较大的步长可帮助个体跳出这个阶段,使得个体有更高的概率跳到其他更好的位置,同时增强了算法的全局搜索和局部搜索能力。采用韦伯分布布谷鸟搜索算法来随机搜寻鸟巢,位置更新的表达式为

$$X_i^{(t+1)} = X_i^{(t)} + \alpha \oplus W(\theta, \alpha, \beta) \otimes (X_i^{(t)} - X_{\text{best}}), \quad (3)$$

式中:  $W(\theta, \alpha, \beta)$  表示从韦伯分布中得到的随机数,其中  $\theta=0, \alpha=0.3, \beta=4$ 。

WCS 算法的基本处理步骤如下。

1) 随机将  $n$  个鸟窝的位置  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  进行初始化,计算它们的最优目标值  $F_0$ ,并保留当前最优的鸟窝位置。

2) 在新的迭代过程中,利用(1)式计算非最优鸟窝的位置并进行更新,得到一组新的鸟窝位置。

3) 将鸟窝位置根据(3)式进行扰动可以得到一组新的鸟窝位置,对该组鸟窝位置进行测试,保留当前最优值。

4) 随机生成数。使随机数  $r \in (0, 1)$  服从均匀分布,将产生的随机数与  $p_a$  进行比较。若  $r > p_a$ ,则立即对该鸟窝位置进行改变,反之不变。位置改变后的鸟窝与上一组鸟窝位置进行比较,将差的鸟窝替换掉。

5) 如果满足迭代终止条件就停止算法,否则重新返回到步骤 2)。

WCS 算法的搜索流程如图 1 所示。

### 3 理论仿真与分析

#### 3.1 仿真条件

在小角前向散射理论中,散射光能量  $E$  与颗粒的质量频率分布  $\mathbf{W}$  之间的关系可以表示为

$$E = \mathbf{T}\mathbf{W}, \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{T}$  表示系数矩阵。通过颗粒粒径反演算法可以计算得到颗粒的质量频率分布  $\mathbf{W}^{[17]}$ 。

本文采用颗粒的质量(体积)频率分布来表示颗粒的分布情况,其表示在某个尺寸范围内落入其中

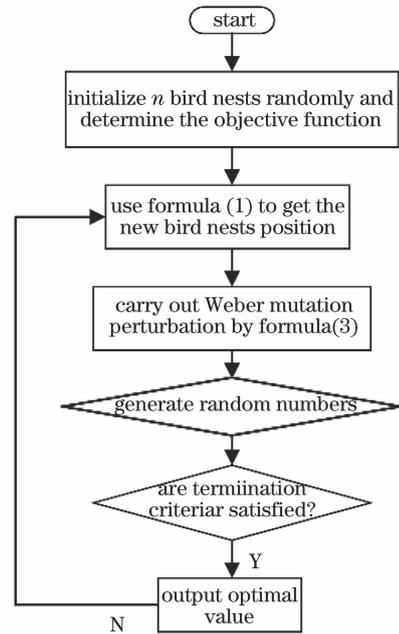


图 1 WCS 算法的搜索流程

Fig. 1 Search process of WCS algorithm

的颗粒质量(体积)占总量的百分比。颗粒的质量频率分布常用的分布函数有 Johnson's  $S_B$  分布、Rosin-Rammler 分布和正态分布等,这几种分布函数的单峰表达式如下。

1) Johnson's  $S_B$  分布函数

$$\frac{dW}{dD} = \frac{d(D_{\max} - D_{\min})}{\sqrt{2\pi}(D - D_{\min})(D_{\max} - D)} \times \exp\left\{-\frac{d^2}{2} \left[ \ln\left(\frac{D - D_{\min}}{D_{\max} - D}\right) - \ln\left(\frac{M - D_{\min}}{D_{\max} - M}\right) \right]^2\right\}, \quad (5)$$

式中:  $W$  表示直径为  $D$  的颗粒的质量;  $M$  和  $d$  均表示分布特征参数,其中  $M$  表示特征粒径,  $d$  表示粒径分布曲线的宽度;  $D_{\max}$  和  $D_{\min}$  分别表示被测颗粒的最大和最小颗粒粒度。

2) Rosin-Rammler 分布函数

$$\frac{dW}{dD} = \frac{d}{M} (D/M)^{d-1} \exp[-(D/M)^d]. \quad (6)$$

3) 正态分布函数

$$\frac{dW}{dD} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}d} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{D-M}{d}\right)^2\right]. \quad (7)$$

小角前向散射系统中相关的参数设置如表 1 所示,其中  $i$  为虚数单位。

算法参数的设置:初始化群体个数  $n$  为 20 个,被宿主发现的概率  $p_a$  为 0.25,迭代次数  $T$  为 500 次,算法一次运行的次数  $N'$  为 20 次。

表 1 小角前向散射系统的参数设置

Table 1 Parameter setting of small angle forward scattering system

Particle size range / $\mu\text{m}$	Incident light wavelength /nm	Lens focal length /mm	Relative refractive index
3.85–101.85	632.80	25.00	(1.596–0.1i)/1.33

### 3.2 单峰分布

假设颗粒粒度的理论特征参数  $d=10$  和  $M=45\ \mu\text{m}$ ,  $M$  的初始生成范围设为  $[3, 100]$ ,  $d$  的初始生成范围设为  $[0, 40]$ 。采用 Johnson's  $S_B$  分布、Rosin-Rammler 分布和正态分布函数对均匀的球形颗粒进行仿真。采用颗粒质量频率分布曲线的整体误差,即相对均方根误差 (RRMSE) 对反演结果进行整体评价,表达式为

$$x_{\text{RRMSE}} = \frac{\sqrt{\sum_{h=1}^H [\mathbf{W}_{\text{set}}(D'_h) - \mathbf{W}_{\text{inv}}(D'_h)]^2}}{\sqrt{\sum_{h=1}^H [\mathbf{W}_{\text{set}}(D'_h)]^2}} \times 100\%, \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{W}_{\text{set}}$  表示理论的质量频率分布;  $\mathbf{W}_{\text{inv}}$  表示反演得到的质量频率分布;  $D'_h$  表示第  $h$  环对应的平均粒

度;  $H$  表示光电探测器的总环数。使用 WCS 算法对颗粒进行反演,并与 AFSA、ABC 算法、CS 算法、柯西分布布谷鸟搜索 (CCS) 算法、帕累托分布布谷鸟搜索 (PCS) 算法、米塔-列夫勒分布布谷鸟搜索 (MCS) 算法进行比较,  $d$  和  $M$  取运行结果 20 次的平均值,结果如表 2 所示。

从表 2 可以看到,CS 算法的标准差精度比 AFSA 和 ABC 算法平均提升了 6~7 个数量级,改进后的 4 种重尾分布布谷鸟算法的标准差精度比 CS 算法提升了 1~3 个数量级,WCS 算法效果最好,其相对均方根误差值能达到  $-10^{14}$  量级。原因在于本文在 CS 算法中对鸟窝位置采用以上 4 种不同重尾分布算法进行扰动,由于在零处函数峰值较小,而且从一个峰值下降到零值的概率密度变化趋势较为平缓,所以变异范围就会更均匀,从而大大提高了 CS 算法的搜索精度。

表 2 不同算法在单峰分布下的反演结果

Table 2 Inversion results of different algorithms under unimodal distribution

Algorithm	Evaluation criteria	Parameter	Johnson's $S_B$	Rosin-Rammler	Normal
AFSA	Mean value	$d$	10.000	10.000	10.000
		$M / \mu\text{m}$	45.000	45.000	45.000
	Standard deviation	$d / 10^{-4}$	4.550	3.720	3.100
		$M / (10^{-4} \mu\text{m})$	0.530	2.480	4.440
	RRMSE / ( $10^{-4} \mu\text{m}$ )		0.420	15.000	9.180
ABC	Mean value	$d$	10.000	10.000	10.000
		$M / \mu\text{m}$	45.000	45.000	45.000
	Standard deviation	$d / 10^{-6}$	2000.000	0.094	6.630
		$M / (10^{-6} \mu\text{m})$	1000.000	0.066	6.280
	RRMSE / ( $10^{-6} \mu\text{m}$ )		20000.000	0.035	2.260
CS	Mean value	$d$	10.000	10.000	10.000
		$M / \mu\text{m}$	45.000	45.000	45.000
	Standard deviation	$d / 10^{-11}$	1.600	1.240	0.520
		$M / (10^{-12} \mu\text{m})$	2.410	8.170	5.880
	RRMSE / ( $10^{-11} \mu\text{m}$ )		3.390	3.390	1.010
CCS	Mean value	$d$	10.000	10.000	10.000
		$M / \mu\text{m}$	45.000	45.000	45.000
	Standard deviation	$d / 10^{-13}$	0.900	9.880	6.520
		$M / (10^{-13} \mu\text{m})$	0.100	3.290	5.860
	RRMSE / ( $10^{-13} \mu\text{m}$ )		3.090	8.370	8.460
PCS	Mean value	$d$	10.000	10.000	10.000
		$M / \mu\text{m}$	45.000	45.000	45.000
	Standard deviation	$d / 10^{-13}$	1.680	4.210	9.020
		$M / (10^{-12} \mu\text{m})$	0.010	0.330	1.620
	RRMSE / ( $10^{-13} \mu\text{m}$ )		3.870	8.950	8.740

续表 2

Algorithm	Evaluation criteria	Parameter	Johnson's $S_B$	Rosin-Rammler	Normal
MCS	Mean value	$d$	10.000	10.000	10.000
		$M/\mu\text{m}$	45.000	45.000	45.000
	Standard deviation	$d/10^{-12}$	0.160	1.110	1.930
		$M/(10^{-12}\mu\text{m})$	0.030	0.540	2.040
	RRMSE $/(10^{-13}\mu\text{m})$		5.170	25.100	19.400
WCS	Mean value	$d$	10.000	10.000	10.000
		$M/\mu\text{m}$	45.000	45.000	45.000
	Standard deviation	$d/10^{-13}$	1.080	0.210	0.310
		$M/(10^{-14}\mu\text{m})$	0.630	0.990	2.360
	RRMSE $/(10^{-14}\mu\text{m})$		6.680	8.520	6.570

### 3.3 双峰分布

假设颗粒粒度的理论特征参数( $d_1, d_2$ )为(6, 6)和( $M_1, M_2$ )为( $30\mu\text{m}, 70\mu\text{m}$ ), 特征参数  $M_1$  和  $M_2$  的初始生成范围都为  $[3, 100]$ ,  $d_1$  和  $d_2$  的初始生成范围都为  $[0, 20]$ 。其他参数与单峰分布情况相同, 结果如表 3 所示。

从表 3 可以看到, 7 种算法的均值均能近似达

到颗粒粒度的理论特征参数; 在三种分布函数下, CS 算法的标准差与 AFSA 相当, 相较于 ABC 算法平均提升了 2 个数量级, 改进后的 4 种不同重尾分布算法的精度较原 CS 算法提升了 2~3 个数量级, WCS 算法的效果最佳, 它的相对均方根误差能达到  $10^{-6}$  量级, 原因在于原 CS 算法具有很强的探索能力, 但开发能力稍显不足, 而韦伯分布算法的步长较

表 3 不同算法在双峰分布下的反演结果

Table 3 Inversion results of different algorithms under bimodal distribution

Algorithm	Evaluation criteria	Parameter	Johnson's $S_B$	Rosin-Rammler	Normal	
AFSA	Mean value	$d_1$	6.0000	5.9900	5.9900	
		$d_2$	5.9900	6.0000	6.0000	
		$M_1/\mu\text{m}$	30.0000	30.0000	30.0000	
		$M_2/\mu\text{m}$	70.0000	70.0000	69.9900	
	Standard deviation	$d_1/10^{-4}$	32.0000	9.9400	23.0000	
		$d_2/10^{-4}$	5.2000	2.4100	2.0800	
		$M_1/(10^{-4}\mu\text{m})$	6.7100	36.0000	18.0000	
		$M_2/(10^{-4}\mu\text{m})$	1.1400	3.3900	2.4500	
		RRMSE $/\mu\text{m}$		0.0072	0.0022	0.0035
	ABC	Mean value	$d_1$	5.9900	5.9900	6.0000
$d_2$			6.1600	6.0200	6.0400	
$M_1/\mu\text{m}$			30.0100	30.0100	30.0000	
$M_2/\mu\text{m}$			70.0300	70.1000	70.0300	
Standard deviation		$d_1$	0.0380	0.0340	0.0020	
		$d_2$	0.3120	0.0190	0.0010	
		$M_1/\mu\text{m}$	0.0240	0.0250	0.0010	
		$M_2/\mu\text{m}$	0.0760	0.1970	0.0020	
		RRMSE $/\mu\text{m}$		1.5800	0.3300	0.4800
CS		Mean value	$d_1$	6.0000	6.0000	6.0000
	$d_2$		6.0000	6.0000	6.0000	
	$M_1/\mu\text{m}$		30.0000	30.0000	30.0000	
	$M_2/\mu\text{m}$		70.0000	70.0000	70.0000	
	Standard deviation	$d_1/10^{-4}$	5.7400	2.7000	3.1800	
		$d_2/10^{-4}$	6.6100	1.3200	2.8100	
		$M_1/(10^{-5}\mu\text{m})$	4.2400	8.5900	7.5500	
		$M_2/(10^{-4}\mu\text{m})$	2.3000	6.8200	3.4800	
		RRMSE $/\mu\text{m}$		0.0021	0.0016	0.0011

续表 3

Algorithm	Evaluation criteria	Parameter	Johnson's $S_B$	Rosin-Rammler	Normal
CCS	Mean value	$d_1$	6.0000	6.0000	6.0000
		$d_2$	6.0000	6.0000	6.0000
		$M_1/\mu\text{m}$	30.0000	30.0000	30.0000
		$M_2/\mu\text{m}$	70.0000	70.0000	70.0000
	Standard deviation	$d_1/10^{-6}$	4.4800	0.5000	4.6100
		$d_2/10^{-6}$	1.4700	0.9700	3.2100
		$M_1/(10^{-6} \mu\text{m})$	0.098	0.5100	3.3600
		$M_2/(10^{-6} \mu\text{m})$	0.6100	2.6800	8.1700
	RRMSE $/(10^{-5} \mu\text{m})$		0.4000	0.3100	2.0400
	PCS	Mean value	$d_1$	6.0000	6.0000
$d_2$			6.0000	6.0000	6.0000
$M_1/\mu\text{m}$			30.0000	30.0000	30.0000
$M_2/\mu\text{m}$			70.0000	70.0000	70.0000
Standard deviation		$d_1/10^{-6}$	0.2800	3.3800	1.0600
		$d_2/10^{-6}$	0.7000	2.0000	4.3200
		$M_1/(10^{-6} \mu\text{m})$	0.2100	6.2900	0.5700
		$M_2/(10^{-6} \mu\text{m})$	1.3000	31.3000	2.8300
RRMSE $/(10^{-5} \mu\text{m})$			0.4700	2.8800	0.7800
MCS		Mean value	$d_1$	6.0000	6.0000
	$d_2$		6.0000	6.0000	6.0000
	$M_1/\mu\text{m}$		30.0000	30.0000	30.0000
	$M_2/\mu\text{m}$		70.0000	70.0000	70.0000
	Standard deviation	$d_1/10^{-6}$	5.5900	5.4700	1.8800
		$d_2/10^{-6}$	15.6000	7.3900	1.7600
		$M_1/(10^{-6} \mu\text{m})$	0.4500	4.4300	0.3900
		$M_2/(10^{-6} \mu\text{m})$	4.3800	44.4000	1.3900
	RRMSE $/(10^{-5} \mu\text{m})$		0.8400	3.8300	0.6400
	WCS	Mean value	$d_1$	6.0000	6.0000
$d_2$			6.0000	6.0000	6.0000
$M_1/\mu\text{m}$			30.0000	30.0000	30.0000
$M_2/\mu\text{m}$			70.0000	70.0000	70.0000
Standard deviation		$d_1/10^{-7}$	3.6400	1.4900	5.1300
		$d_2/10^{-6}$	0.4800	0.1200	1.2400
		$M_1/(10^{-8} \mu\text{m})$	6.7600	6.2700	7.8700
		$M_2/(10^{-7} \mu\text{m})$	1.3500	5.1100	8.3100
RRMSE $/(10^{-6} \mu\text{m})$			1.0500	0.8200	3.4900

长,能够使算法在初期保持较大的步长以增强算法的开发能力,后期保持较小的步长以提高算法的精度;CS 算法的相对均方根误差精度最高,最低能达到 0.0011,AFSA 与之相当,ABC 算法最高仅能达到 1.5800。

### 3.4 抗噪性能

在粒径反演的过程中,随机噪声的引入对反演结果有很大影响,严重情况下会导致颗粒粒径测量失败。为了减少噪声在粒径反演中的干扰,本文提出 WCS 算法并将其用于颗粒粒径的反演。在目标函数的散射光能中随机加入 1%~10%大

小的噪声,选取服从 Rosin-Rammler 分布函数的单峰和双峰颗粒系,使用 CS 算法、CCS 算法、PCS 算法、MCS 算法和 WCS 算法对其进行反演,结果取 20 次的平均值,参数设置如表 1 所示,不同算法在单峰和双峰上的相对均方根误差结果如图 2 和图 3 所示。

从图 2 可以看到,当加入 1%的噪声时,4 种不同重尾分布算法的性能相当;逐渐加大噪声,CCS 算法、PCS 算法和 MCS 算法的相对均方根误差与 CS 算法相距较大,WCS 算法的相对均方根误差相较于其他三个算法平均提升了 89%;当噪声加到

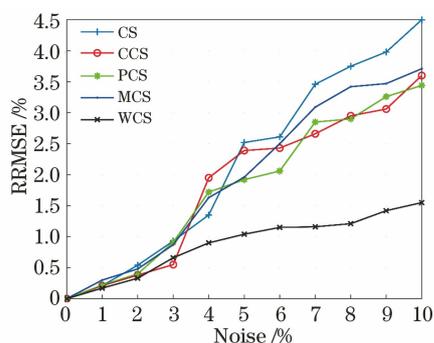


图 2 不同算法反演单峰颗粒系粒径分布的相对均方根误差曲线

Fig. 2 Relative root mean square error curves of unimodal particle size distribution inversion by different algorithms

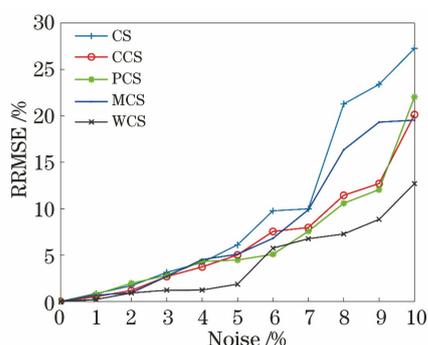


图 3 不同算法反演双峰颗粒系粒径分布的相对均方根误差曲线

Fig. 3 Relative root mean square error curves of bimodal particle size distribution inversion by different algorithms  
10%时, CCS 算法、PCS 算法和 MCS 算法的性能曲线均呈现不同程度的突增, WCS 算法的相对均方根误差相较于 CS 算法平均提升了 65%, 这也反映出在噪声较大的情况下 WCS 算法仍能保持良好的抗

噪性。

从图 3 可以看到, 随着峰数的增加和参数的增多, 反演的复杂度逐渐提高, 导致单峰的反演误差较大, 但 WCS 算法在单峰和双峰颗粒的质量频率分布曲线上的相对均方根误差仍然可以控制在 10% 以内; 当噪声在 5% 以下时, WCS 算法的相对均方根误差均在 2% 以下; 当加大噪声, 即加入 6%~10% 大小的噪声时, 相较于 CS 算法, CCS 算法、PCS 算法和 MCS 算法中最好的平均相对均方根误差仅能提升 40%, WCS 算法的平均相对均方根误差却提升了 60%。这是因为随着自变量的增多, 韦伯分布函数曲线逐渐趋于零, 此时能够降低噪声所带来的影响。采用韦伯分布来调整 CS 算法的迭代步长, 可以避免噪声的剧烈改变对迭代步长带来干扰而导致算法不能很好地反演颗粒粒径, 从而提高算法的抗噪性能。

## 4 分析与讨论

### 4.1 小角前向散射实验平台

本文选取  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  颗粒作为被测样本, 分散剂为蒸馏水, 在样品池中采用超声波振荡的方式来处理试样溶液以减少  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  颗粒的相对折射率  $m = (2.42 - 0.1i) / 1.33$ 。选取 He-Ne 激光器作为光源, 波长为 632.8 nm。激光器打出一束光后, 经过衰减片、扩束准直镜、光阑以及偏振片后可以获得平行且强度均匀的光束, 将光束照射在颗粒样本上能够产生散射光。使用 CCD 相机来代替光电探测器以采集信号, 焦距设置为 25 mm, 相机像素为  $964 \text{ pixel} \times 1292 \text{ pixel}$ 。实验装置如图 4 所示。

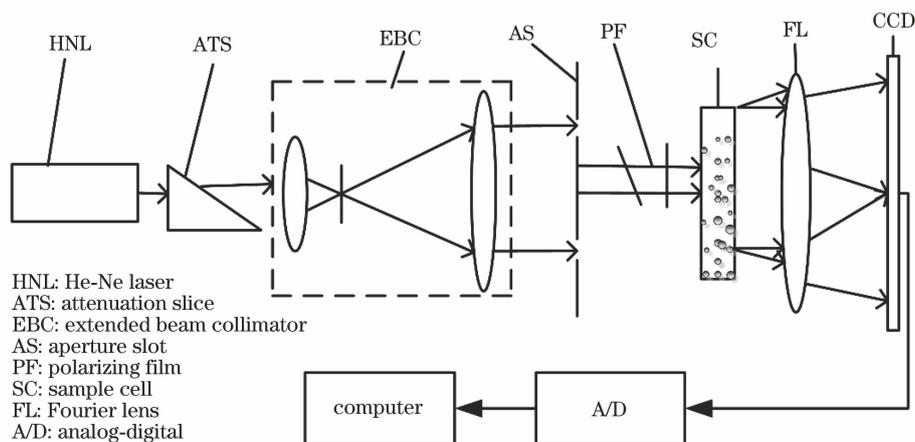


图 4 小角前向散射的实验装置

Fig. 4 Experimental setup for small angle forward scattering

设粒度范围为  $10.85 \sim 150.85 \mu\text{m}$ , 采用等差划分粒度范围的方法将 CCD 划分为 50 环, 通过散射测量系统来采集颗粒散射图像可以获得散射光能分布矩阵, 利用 CS 算法和 WCS 算法分别对其进行反演, 算法的初始参数设置与仿真过程一致。

在获取散射图像的过程中, 需要先采集背景图



图 5 颗粒的散射图像。(a)颗粒背景;(b)单峰颗粒;(c)双峰颗粒

Fig. 5 Scattering image of particle. (a) Particle background; (b) unimodal particle; (c) bimodal particle

与仿真过程中评价反演质量的方法不同, 实验过程中被测颗粒的粒径是确定的值, 但未给出分布情况, 因此无法将 RRMSE 作为评价标准, 为此采用峰值粒径  $M$  作为评价反演质量的标准, 其指颗粒的质量频率分布中占比最大部分所对应的颗粒粒度。相对误差的表达式为

$$R = \frac{|M - M_A|}{M_A} \times 100\%, \quad (9)$$

式中:  $M_A$  表示颗粒的理论峰值粒度。

#### 4.2 单峰粒子群的反演实验

本实验对粒径为  $50 \mu\text{m}$  的  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  颗粒进行反演测量, 将获取到的散射光能矩阵在三种不同分布函数下采用 CS 算法和 WCS 算法进行反演实验, 结果如表 4 所示。

表 4 CS 算法和 WCS 算法反演单峰粒子群的结果

Table 4 Results of unimodal particle swarm inversion by CS algorithm and WCS algorithm

Algorithm	Distribution function	$M / \mu\text{m}$	Relative error / %
CS	Johnson's $S_B$	50.08	0.16
	Rosin-Rammler	48.16	3.67
	Normal	50.10	0.21
WCS	Johnson's $S_B$	50.05	0.10
	Rosin-Rammler	48.26	3.48
	Normal	50.04	0.08

从表 4 可以看到, CS 算法在 Johnson's  $S_B$  分布函数上的效果最好且误差最小, 其相对误差达到  $0.16\%$ , 与仿真结果一致; WCS 算法在正态分布函数上的提升效果最为明显, 相对误差提升  $62\%$ 。单峰颗粒在 Rosin-Rammler 分布函数上反演的实验

结果如图 6 所示。在图像处理的过程中, 使用散射图像来扣除背景图像可以得到颗粒的实际散射图像, 通过图像处理技术可以得到散射光能矩阵。由 CCD 相机采集到的散射图像如图 5 所示, 其中图 5(a)~5(c)分别为采集到的背景图像、粒径为  $50 \mu\text{m}$  的单峰颗粒散射图像以及粒径为  $50 \mu\text{m}$  和  $100 \mu\text{m}$  的双峰颗粒散射图像。

结果如图 6 所示。

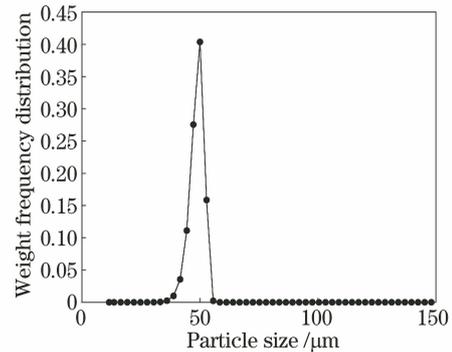


图 6 单峰颗粒在 Rosin-Rammler 分布函数上采用 WCS 算法反演的实验结果

Fig. 6 Experimental results of unimodal particle on Rosin-Rammler distribution function inversion by WCS algorithm

#### 4.3 双峰粒子群的反演实验

本实验选用粒径为  $50 \mu\text{m}$  和  $100 \mu\text{m}$  的  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  颗粒作为被测颗粒, 将颗粒按照一定的比例混合后进行反演实验。对获取到的散射光能矩阵采用 CS 算法进行反演实验, 采用峰值粒径  $M$  来求解相对误差。CS 和 WCS 算法反演双峰粒子群的结果如表 5 所示。

从表 5 可以看到, 在双峰粒子群的反演中, WCS 算法的  $M_1$  值在  $50.01 \sim 50.13$  之间, 相对误差相较于 CS 算法可提升  $1/2$ ,  $M_2$  值在  $100.01 \sim 101.55$  之间, 与仿真结果一致; Rosin-Rammler 分布函数的效果最好且提升最大, 相对均方根误差提升近  $85\%$ 。双峰颗粒在 Rosin-Rammler 分布函数上反演的实验结果如图 7 所示。

表 5 CS 和 WCS 算法反演双峰粒子群的结果

Table 5 Results of bimodal particle swarm inversion by CS algorithm and WCS algorithm

Algorithm	Distribution function	$M_1/\mu\text{m}$	$M_2/\mu\text{m}$	Relative error of $M_1/\%$	Relative error of $M_2/\%$
CS	Johnson's SB	50.24	101.72	0.48	1.72
	Rosin-Rammler	50.03	100.07	0.06	0.07
	Normal	50.11	101.65	0.22	1.65
WCS	Johnson's SB	50.13	101.55	0.26	1.55
	Rosin-Rammler	50.01	100.01	0.02	0.01
	Normal	50.05	101.49	0.10	1.49

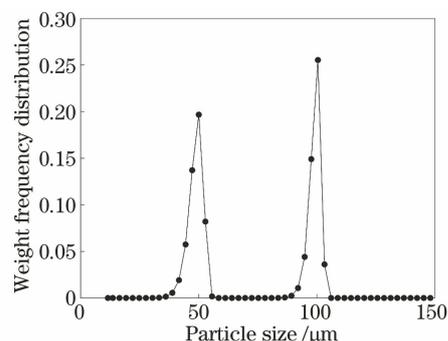


图 7 双峰颗粒在 Rosin-Rammler 分布函数上采用 WCS 算法反演的实验结果

Fig. 7 Experimental results of bimodal particle on Rosin-Rammler distribution function inversion by WCS algorithm

结合图 6 和图 7 可以看到, WCS 算法在粒径分布反演方面具有较高的稳定性和准确性。

## 5 结 论

本文提出一种 WCS 算法并将其用于颗粒粒径分布的反演, 仿真和实验结果均表明该算法可以显著提高反演精度和抗噪性能。在仿真和实验中, 对服从 Johnson's  $S_B$  分布、Rosin-Rammler 分布以及正态分布函数的均匀球形颗粒系进行反演, 采用 7 种不同算法对单峰和双峰颗粒系反演的标准差和相对均方根误差进行定量分析。结果表明, WCS 算法的相对均方根误差值分别达到  $10^{-14}$  和  $10^{-6}$  数量级。在目标函数的散射光能中随机加入 1%~10% 大小的噪声, 选取服从 Rosin-Rammler 分布函数的单峰和双峰颗粒系, 采用 CS 算法、CCS 算法、PCS 算法、MCS 算法和 WCS 算法对其进行反演。结果表明, WCS 算法在单峰和双峰颗粒的质量频率分布曲线上的相对均方根误差均可以控制在 10% 以内。此外, 使用小角前向散射测量系统对  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  颗粒单峰颗粒系和双峰颗粒系的散射图像进行研究, 处理完图像后提取光能值并分别采用 CS 算法和 WCS 算法对其进行反演。实验结果表明, WCS 算法的相

对均方根误差至少可提升 60%, 验证 WCS 算法在粒径反演中具有较好的实用性。

## 参 考 文 献

- [1] Zhao R, Pan K W, Yang B, et al. Synchronous measurement method of trans-micron scale mixed particle size [J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(7): 0712001.  
赵蓉, 潘科玮, 杨斌, 等. 跨微米尺度混合颗粒粒径的同步测量方法 [J]. 光学学报, 2020, 40(7): 0712001.
- [2] Zhang J, Cai X S, Zhou W. Nanoparticle size distribution inversion algorithm in image dynamic light scattering [J]. Acta Optica Sinica, 2016, 36(9): 0929001.  
张杰, 蔡小舒, 周骛. 图像动态光散射法纳米颗粒粒度分布反演算法研究 [J]. 光学学报, 2016, 36(9): 0929001.
- [3] Cai S Y, Mao J D, Zhao H, et al. Inversion algorithm for non-spherical dust particle size distributions [J]. Optical Review, 2019, 26(3): 319-331.
- [4] Fu S L, Xie C B, Li L, et al.  $\text{PM}_{2.5}$  concentration identification based on lidar detection [J]. Acta Optica Sinica, 2021, 41(9): 0928001.  
付松琳, 谢晨波, 李路, 等. 基于激光雷达探测技术的  $\text{PM}_{2.5}$  浓度辨识研究 [J]. 光学学报, 2021, 41(9): 0928001.
- [5] Li X L. A new intelligent optimization method: artificial fish swarm algorithm [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2003.  
李晓磊. 一种新型的智能优化方法—人工鱼群算法 [D]. 杭州: 浙江大学, 2003.
- [6] Karaboga D, Basturk B. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm [J]. Journal of Global Optimization, 2007, 39(3): 459-471.
- [7] Dai J, Shen J Q. Application of genetic algorithm in particle size measurement technology based on forward light scattering [J]. Acta Photonica Sinica,

- 2021, 50(5): 0512002.
- 戴璐, 沈建琪. 前向光散射颗粒测量技术中遗传算法的应用[J]. 光子学报, 2021, 50(5): 0512002.
- [8] Yang Y. Research on detection technology of  $PM_{2.5}$  particle size distribution using total scattering method [D]. Hangzhou: China Jiliang University, 2016.
- 杨瑶. 全散射法  $PM_{2.5}$  粒径分布检测技术研究[D]. 杭州: 中国计量大学, 2016.
- [9] Zhang Y M. Research on the optimization method of inversion algorithm in polydisperse nanoparticle size based on regularization[D]. Jinan: Qilu University of Technology, 2015.
- 张衍敏. 基于正则化的多分散系纳米颗粒粒度反演优化方法研究[D]. 济南: 齐鲁工业大学, 2015.
- [10] Xu L. Research on particle size measurement technology based on light scattering [D]. Hangzhou: China Jiliang University, 2019.
- 徐良. 基于光散射的颗粒粒度检测技术研究[D]. 杭州: 中国计量大学, 2019.
- [11] Shan L, Li H R, Hong B, et al. Inversion of multimodal particle size distribution based on the artificial bee colony algorithm [J]. Acta Photonica Sinica, 2020, 49(12): 1229002.
- 单良, 李浩然, 洪波, 等. 基于人工蜂群算法的多峰颗粒粒度分布反演[J]. 光子学报, 2020, 49(12): 1229002.
- [12] Yang X S, Deb S. Cuckoo search via Lévy flights[C]// 2009 World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing (NaBIC), December 9-11, 2009, Coimbatore, India. New York: IEEE Press, 2009: 210-214.
- [13] Tsipianitis A, Tsompanakis Y. Improved cuckoo search algorithmic variants for constrained nonlinear optimization[J]. Advances in Engineering Software, 2020, 149: 102865.
- [14] Inci M, Caliskan A. Performance enhancement of energy extraction capability for fuel cell implementations with improved cuckoo search algorithm [J]. International Journal of Hydrogen Energy, 2020, 45(19): 11309-11320.
- [15] Markkanen M, Roininen L, Huttunen J M, et al. Cauchy difference priors for edge-preserving Bayesian inversion [J]. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2019, 27(2): 225-240.
- [16] Kalantan Z I, Einbeck J. Quantile-based estimation of the finite Cauchy mixture model [J]. Symmetry, 2019, 11(9): 1186.
- [17] Shan L, Xu L, Hong B, et al. Inversion of particle size distribution of small angle forward scattering based on polarization ratio method [J]. Infrared and Laser Engineering, 2019, 48(1): 0117001.
- 单良, 徐良, 洪波, 等. 小角前向散射偏振比法颗粒粒度分布反演[J]. 红外与激光工程, 2019, 48(1): 0117001.