

## 二次谐波的变分模态分解和小波阈值函数降噪

张瑞林, 涂兴华\*

南京邮电大学电子与光学工程学院、微电子学院, 江苏 南京 210023

**摘要** 针对利用可调谐半导体激光器吸收光谱学(TDLAS)技术测量气体浓度过程中二次谐波谱线存在的外界噪声干扰问题,提出一种基于变分模态分解和小波阈值函数复合算法的二次谐波降噪方法。首先对二次谐波含噪信号进行分解,得到有用固有模态函数(IMF)并进行重构,再对重构信号进行小波阈值函数降噪处理。讨论了变分模态分解中最佳平衡参数的选取,得出最佳平衡参数与含噪信号中噪声成正比的结论。通过改变小波变换的阈值函数改变高频小波系数,以更好地抑制噪声。对实际测量曲线的降噪结果表明,所提出的降噪方法可以在信噪比较低的情况下有效抑制噪声,提取有用的二次谐波信号。

**关键词** 图像处理; 可调谐半导体激光器吸收光谱学; 变分模态分解; 小波阈值函数; 相关系数; 二次谐波; 信噪比  
**中图分类号** O433.4 **文献标志码** A **doi**: 10.3788/AOS202242.0210001

## Variational Mode Decomposition and Wavelet Threshold Function De-Noising for Second Harmonics

Zhang Ruilin, Tu Xinghua\*

*College of Electronic and Optical Engineering & College of Microelectronics, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing, Jiangsu 210023, China*

**Abstract** A second harmonic de-noising method based on variational mode decomposition and wavelet threshold function is proposed to solve the problem of external noise interference in second harmonic spectra during gas concentration measurement by tunable diode laser absorption spectroscopy (TDLAS). In this paper, we decompose the noisy second harmonic signal to get the useful intrinsic mode functions (IMFs) and reconstruct them. Then, we conduct the de-noising process for the reconstructed signal with the wavelet threshold function. The selection of the optimal balance parameter in the variational mode decomposition is discussed, and the proportional relationship of the optimal balance parameter with the noise in the noisy signal is obtained. Better noise suppression is achieved by changing the threshold function of wavelet transform and thereby altering the high-frequency wavelet coefficients. The de-noising results of actual measurement curves show that the proposed de-noising method can effectively suppress the noise and extract the useful second harmonic signal in the case of a poor signal-to-noise ratio.

**Key words** image processing; tunable diode laser absorption spectroscopy; variational mode decomposition; wavelet threshold function; correlation coefficient; second harmonics; signal-to-noise ratio

## 1 引言

可调谐半导体激光器吸收光谱学(TDLAS)技术是将对经微量气体吸收的调制激光信号进行光电转换后再进行锁相放大,得到其二次谐波信号,通过

检测二次谐波信号的幅度确定微量气体浓度的技术。TDLAS技术以其灵敏度高、响应速度快等优点,被广泛应用于农业、工业等方面。王鑫等<sup>[1]</sup>利用TDLAS检测技术在线检测人体呼气末CO<sub>2</sub>的体积分数(下文称浓度),该系统可以精准、无损地在线检

收稿日期: 2021-05-27; 修回日期: 2021-06-08; 录用日期: 2021-08-09

基金项目: 国家自然科学基金(11547031, GZ216003)、南京邮电大学科研基金(NY217111)

通信作者: \*tuxh@njupt.edu.cn

测人体呼出的 CO<sub>2</sub> 浓度,为研究人体呼出相关疾病标志物的无创检测提供了新思路。陈祥等<sup>[2]</sup>设计了基于频分复用波长调制技术的开放式测量系统,该系统能够同时测量 NO<sub>2</sub> 和 NH<sub>3</sub> 的气体浓度,在气体浓度范围较大的情况下,系统具有优良的线型响应。

检测气体浓度的关键是获得信噪比较高的二次谐波曲线,尤其是在检测气体产生的吸收信号非常小的情况下。限制 TDLAS 系统检测灵敏度的最主要因素是系统噪声的干扰。张帅等<sup>[3]</sup>通过修正式加权滑动平均滤波对浓度信号进行了数字滤波处理,提高了浓度信号的信噪比。李素文等<sup>[4]</sup>利用小波变换的软阈值小波降噪对差分吸收光谱的数据进行处理,能够将低信噪比的浓度信号进行更好的浓度反演。近年来产生了许多基于小波分析的降噪方法,工程应用中最常用的是 Donoho<sup>[5]</sup>提出的阈值降噪算法,即硬阈值和软阈值降噪。这两种算法都有固定的缺陷,如硬阈值降噪法在阈值处不连续以及软阈值降噪法存在恒定的偏差问题。变分模态分解(VMD)是由 Dragomiretskiy 等<sup>[6]</sup>提出的一种利用变分思想进行信号分解的时频分析方法,通过变分框架准确求解非平稳信号的各个本征模态函数,该方法不仅具有抗模态混叠能力,还可以有效提高分解效率。郭心骞<sup>[7]</sup>提出用小波降噪法和经验模态分解(EMD)降噪法抑制 TDLAS 光谱信号中的干涉噪声,以有效提高系统的探测灵敏度。另外,集合经验模态分解(EEMD)-小波阈值函数降噪和自适应噪声的完备模态分解(CEEMDAN)-小波阈值函数降噪是在经验模态分解的基础进行的改进算法,分别加入噪声和自适应噪声来减弱经验模态分解算法的模态混叠效应<sup>[8]</sup>。陈鸿雁<sup>[9]</sup>将二次谐波仿真信号进行变分模态分解,对通过小波半软阈值滤波后的固有模态分量进行重构,得到去噪信号。Chen 等<sup>[10]</sup>提出一种新的变分模态分解和马氏距离结合的算法,将该算法应用于传统的可调谐半导体激光器吸收光谱,以处理受噪声影响的光

谱信号,这样可减小反演浓度的偏差。

为了能够在吸收较弱、信噪比低的情况下进一步抑制噪声并提取有用的二次谐波谱线,本文提出一种二次谐波的变分模态分解和小波阈值函数降噪(VMD-WTFD)算法。首先对含噪二次谐波信号进行变分模态分解,得到多个固有模态函数(IMFs),计算各个分量的频率,并依次按照从低到高的频率进行排列,详细讨论了进行变分模态分解时最佳平衡参数的选取,并得出最佳平衡参数与含噪二次谐波信号的噪声水平成正比的结论。接下来,通过计算模态分量的相关系数来筛选有用模态分量,将有用模态分量进行重构,再通过改变小波变换的阈值函数对重构信号进行去噪,小波基函数选择 dmey 小波,分解层数选择 6 层,得出最终的去噪信号。在此基础上,在不同信噪比情况下将本文算法与经验模态分解-小波阈值函数降噪(EMD-WTFD)、集合经验模态分解-小波阈值函数降噪(EEMD-WTFD)、自适应噪声的完备模态分解-小波阈值函数降噪(CEEMDAN-WTFD)的光谱降噪性能进行对比研究,讨论了信号降噪效果。最后,运用本文 VMD-WTFD 算法对实际 CO 气体吸收的二次谐波信号进行降噪,能够保留其信号特征点。通过将降噪算法应用于 TDLAS 技术的实际检测,可以有效提高系统检测精度和灵敏度。

## 2 小波阈值函数降噪和变分模态分解

### 2.1 变分模态分解基本原理

变分模态分解(VMD)是一种完全非递归的模态分解模型<sup>[6]</sup>,其中各个模态是同时被提取的。该模型寻求模态及其各自中心频率的集合,以便基于这些模态再现输入信号。为了评估一个模态的带宽,对每个模态函数进行 Hilbert 变换并计算相应的解析信号,从而得到对应的单边频谱;对于每个模态,通过函数估计中心频率的指数,将该模态的频谱转移到基带,在此基础上得到有约束变分问题:

$$\min_{\{u_k\}, \{\omega_k\}} \left\{ \sum_k \left\| \partial_t \left\{ \left[ \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right] * u_k(t) \right\} \exp(-j\omega_k t) \right\|_2^2 \right\} \text{ s. t. } \sum_k u_k = f, \quad (1)$$

式中: $\delta(t)$ 为狄拉克函数; $\partial_t \{ \cdot \}$ 为对  $u_k(t)$  进行 Hilbert 变换得到的单边频谱; $f$  为原始信号; $*$  表示卷积; $\{u_k\} = \{u_1, \dots, u_k\}$  和  $\{\omega_k\} = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$  分别表示所有模态 IMFs 的集合及各个模态对应的中心频率; $k$  表示分解尺度; $\sum_k u_k$  表示所有模态的总和。

为了使变分问题不受约束,使用受数据保真度

约束的平衡参数(简称平衡参数)和拉格朗日算子获得增广拉格朗日函数,再利用交替方向乘法不断地进行迭代优化,找到(1)式的最优解,即各个模态分量的中心频率。

### 2.2 小波阈值函数降噪原理

常用的小波阈值函数降噪方法中,硬阈值函数

在阈值处存在突变点,会导致信号极易产生振荡;软阈值函数虽然没有间断点,但是经处理后的小波系数  $\hat{w}_{j,k}$  (下标  $j$  是指信号被小波变换分解的层数,  $k$  是指该层分解出的小波系数的索引) 和处理前的小

波系数  $w_{j,k}$  之间会存在恒定偏差,这会影响重构信号和原始信号之间的近似程度。为了克服软硬阈值方法的缺点,本文提出一种新的阈值函数方法,该方法可表示为

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} u w_{j,k} + (1-u) \operatorname{sgn}(w_{j,k}) \left\{ |w_{j,k}| - \frac{\lambda}{\exp[t(|w_{j,k}| - \lambda)]} \right\}, & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases}, \quad (2)$$

式中:  $\lambda$  为阈值;  $u = 1 - \exp[-t(|w_{j,k}| - \lambda)^2]$ ;  $t$  为函数因子,  $t \geq 0$ 。

当函数因子  $t=0$  时,阈值函数等同于软阈值函数;当函数因子  $t \rightarrow \infty$  时,阈值函数等同于硬阈值函数。通过改变函数因子  $t$ ,可以改变阈值函数的性能,使在阈值附近时阈值函数没有发生突变,而是以平滑的方式过渡;在小波系数绝对值趋向于无穷大时,量化后的小波系数是趋向于原始小波系数的,从而较大程度地保留了有用信号。

由于小波变换分解出来的噪声主要集中在高频系数中,并且随着小波变换分解层数的增加,高频系数是不断减小的,因此对每层高频系数进行阈值化时所选择的阈值不能相同<sup>[11]</sup>。阈值应该随着分解层数的增加而减小,所以对于不同的分解层数有不同的阈值确定形式:

$$\lambda_j = \sigma_j \sqrt{2 \ln N} / [\lg(j+1)](1 + \rho_j), \quad (3)$$

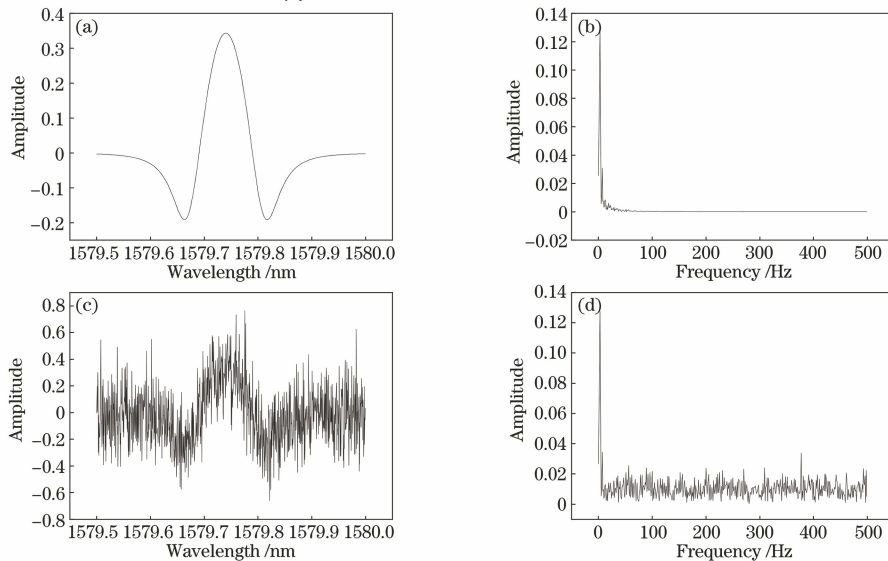


图 1 二次谐波信号。(a) 原始二次谐波谱线图; (b) 原始二次谐波曲线的傅里叶变换频率分布图; (c) 含噪二次谐波谱线图; (d) 含噪二次谐波曲线的傅里叶变换频率分布图

Fig. 1 Second harmonic signals. (a) Original second harmonic spectrum; (b) Fourier transform frequency distribution of original second harmonic curve; (c) second harmonic spectrum with noise; (d) Fourier transform frequency distribution of noisy second harmonic curve



电转换再经过锁相放大处理后的信号,为便于本文算法中的 VMD 处理,本文将其看作是时域信号,则其经过傅里叶变换得到的频率分布分别如图 1(b)和(d)所示,这里的频率是相对于上述时域而言。

### 3.2 变分模态分解中最佳平衡参数的选取

在实际应用时,变分模态分解仿真参数中的噪声容忍度为 0,初始化中心频率为均匀分布,设置为 1,收敛准则容忍度为  $1 \times 10^{-7}$ 。分解模态数要根据分解出的模态分量与原始信号之间的相关系数而定,本文设置为 4。而平衡参数对变分模态分解有非常大的影响。因此对不同噪声水平的信号进行变分模态分解时,需要进行合适的平衡参数设置,这不同于文献[13]中固定平衡参数的做法。

二次谐波曲线所包含的频率较为单一且频率很低,经过变分模态分解的噪声二次谐波信号除了第

一模式分量以外,其他模式分量大多为噪声成分。仅以第一模式分量的信噪比(SNR)为判断依据,信噪比越大说明第一模式分量与原始信号的近似程度越高。由于平衡参数不能为 0,经过多次仿真验证,将平衡参数的范围设置为  $[1, 149001]$ ,步长为 1000。

图 2 为 8 组添加了不同噪声的二次谐波信号在改变平衡参数情况下的第一模式分量的信噪比。掺杂二次谐波信号的信噪比分别为 -7.6300 dB、-4.7368 dB、-2.7133 dB、-0.3417 dB、2.6703 dB、4.7096 dB、7.1441 dB、10.1235 dB。当各种掺杂信号的第一模式分量的信噪比最大时,平衡参数分别为 108001, 56001, 51001, 43001, 20001, 17001, 17001, 10001。总体上来说,最佳平衡参数随待测含噪信号的噪声水平的下降而变小。

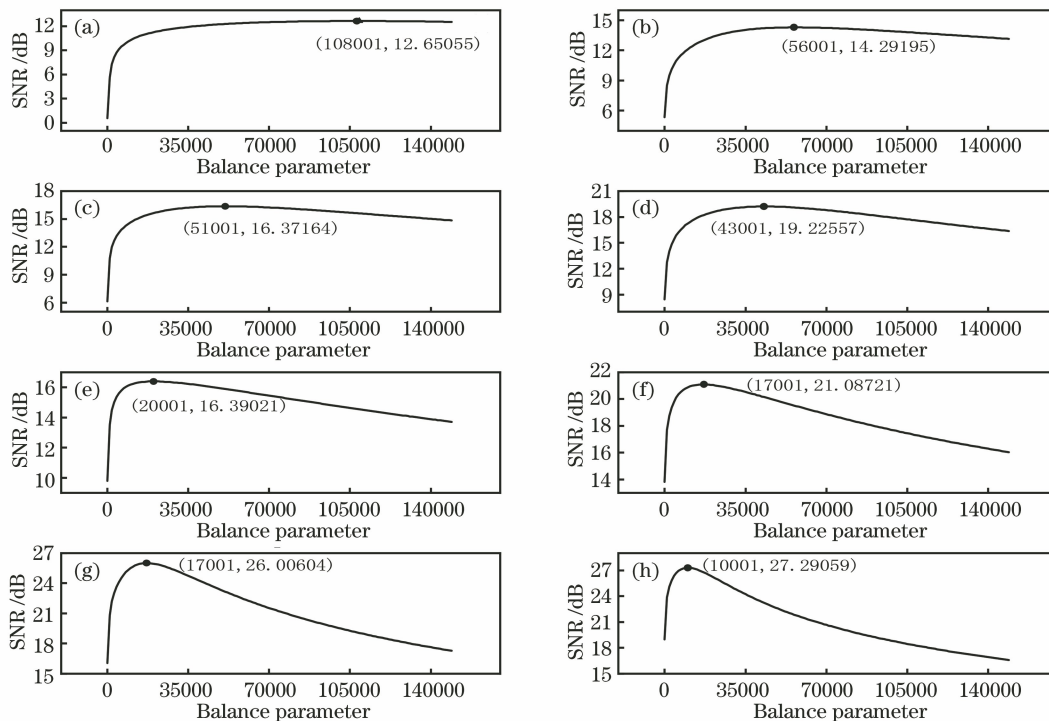


图 2 平衡参数与添加不同噪声强度的二次谐波信号第一模式分量的信噪比的关系图。(a)含噪信号的信噪比为 -7.6300 dB;(b)含噪信号的信噪比为 -4.7368 dB;(c)含噪信号的信噪比为 -2.7133 dB;(d)含噪信号的信噪比为 -0.3417 dB;(e)含噪信号的信噪比为 2.6703 dB;(f)含噪信号的信噪比为 4.7096 dB;(g)含噪信号的信噪比为 7.1441 dB;(h)含噪信号的信噪比为 10.1235 dB

Fig. 2 Relationship between balance parameter and SNR of the first mode component of the second harmonic signal with different noise intensity. (a) SNR of noise signal is -7.6300 dB; (b) SNR of noise signal is -4.7368 dB; (c) SNR of noise signal is -2.7133 dB; (d) SNR of noise signal is -0.3417 dB; (e) SNR of noise signal is 2.6703 dB; (f) SNR of noise signal is 4.7096 dB; (g) SNR of noise signal is 7.1441 dB; (h) SNR of noise signal is 10.1235 dB

### 3.3 变分模态分解与小波阈值函数降噪性能分析

首先对图 1(c)中含噪二次谐波信号进行 VMD,得到的 IMF<sub>s</sub> 分量如图 3 所示。如前所述,

将图 3(a)~(d)中曲线视为时域变化图,对其分别进行频域分析,得到图 3(e)~(h)。从图 3(a)中可以看出大幅值低频模式分量被精确分解,从固有模

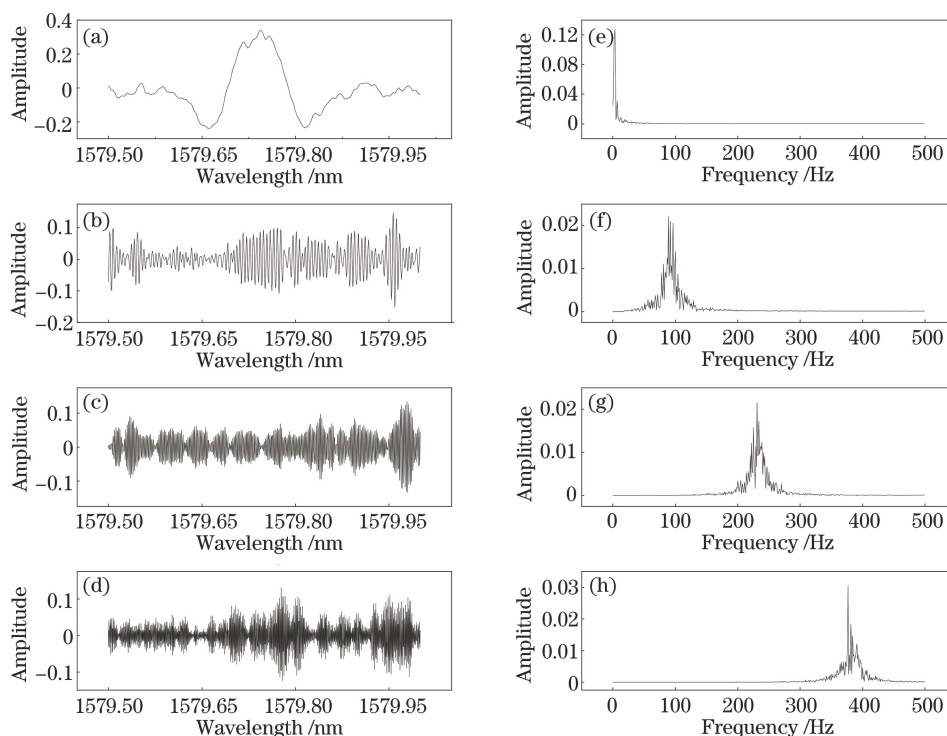


图 3 含噪信号的固有模态分量及其相应的频谱。(a) IMF1;(b) IMF2;(c) IMF3;(d) IMF4;(e) IMF1 的频率分布;  
(f) IMF2 的频率分布;(g) IMF3 的频率分布;(h) IMF4 的频率分布

Fig. 3 Intrinsic mode components of noisy signals and their corresponding spectra. (a) IMF1; (b) IMF2; (c) IMF3;  
(d) IMF4; (e) frequency distribution of IMF1; (f) frequency distribution of IMF2; (g) frequency distribution of  
IMF3; (h) frequency distribution of IMF4

态分量的频谱图可以看出各个模态之间没有产生模态混叠。

本文通过各个模态分量的相关系数<sup>[14]</sup> (CC)来反映各个模态分量与原始信号之间的关联。从表 1 中可以看出:IMF1 与原始信号的相关系数明显大于其他模态分量与原始信号的相关系数。由此将相关系数阈值设置为 0.0001,小于或等于相关系数阈值的分量作为噪声分量,将 IMF3 和 IMF4 作为噪声分量进行去除,大于相关系数阈值的分量作为有用模态分量。将 IMF1 和 IMF2 进行重构,得到重构信号。

表 1 噪声信号的 4 个模态分量与原始信号的相关系数

Table 1 Correlation coefficients between four modal components of noise signal and original signal

Intrinsic mode component	IMF1	IMF2	IMF3	IMF4
Correlation coefficient	0.9769	0.0003	0.0001	0

最后,对 VMD 重构信号进行小波阈值函数降噪处理,其中小波基函数和分解层数分别选择 dmey 小波和 6 层。最终得到的信号如图 4 所示,其信噪比为 16.2239 dB。去噪后信号与原始二次谐波信

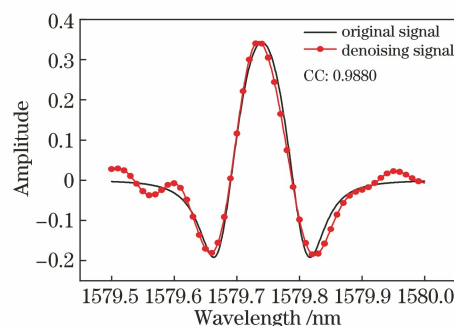


图 4 VMD-WTFD 效果图

Fig. 4 Effect graph of VMD-WTFD

号的相关系数为 0.9880。

### 3.4 VMD-WTFD 与其他降噪方法的比较

将本文提出的 VMD-WTFD 算法与文献报道过的 EMD-WTFD、EEMD-WTFD、CEEMDAN-WTFD 和小波阈值函数降噪(WTFD)等常用方法进行降噪对比,结果如图 5 所示。

对比图 4 和图 5 可知,经过 VMD-WTFD 处理得到的二次谐波曲线和原始二次谐波曲线的相关系数最大,更逼近于原始曲线。相比于小波降噪和其他模态分解等方法来说,VMD-WTFD 有明显的降

噪优势,能够很好地还原二次谐波信号的峰值高度以及峰值位置,并且还减小二次谐波的基线波

动幅度。这对于 TDLAS 系统的气体浓度反演精度和检测下限都是至关重要的。

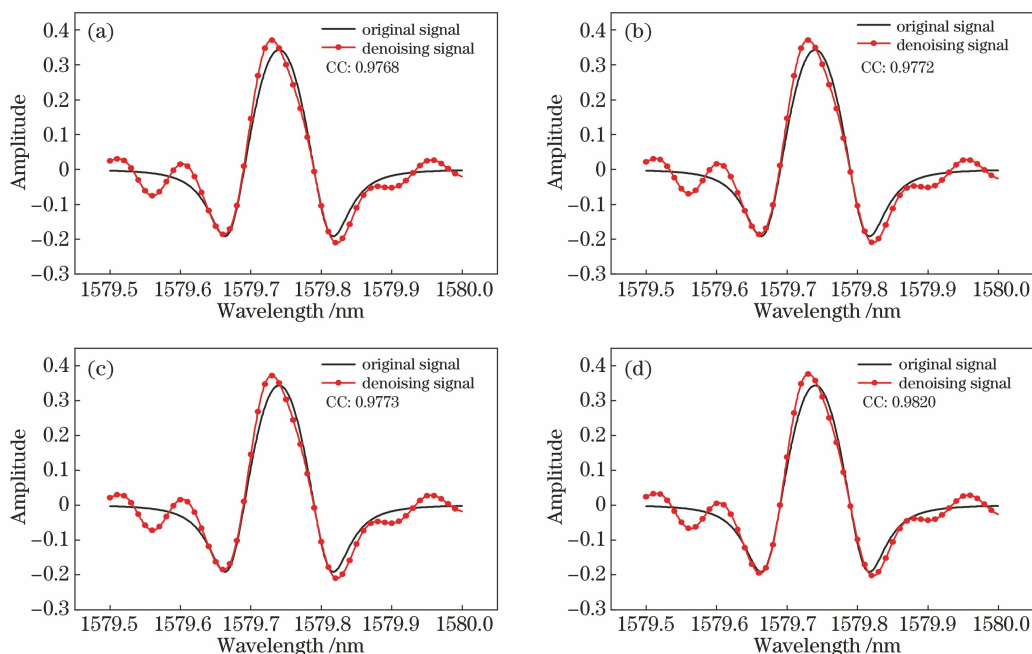


图 5 不同算法的降噪效果图。(a) EMD-WTFD;(b) EEMD-WTFD;(c) CEEMDAN-WTFD;(d) WTFD

Fig. 5 Denoising effects of different algorithms. (a) EMD-WTFD; (b) EEMD-WTFD; (c) CEEMDAN-WTFD; (d) WTFD

表 2 为对信噪比为 -7.4250 dB、-2.4867 dB、-0.0239 dB、2.2782 dB、7.4566 dB、9.9647 dB 的含噪信号进行相应降噪处理后信号的信噪比统计。VMD-WTFD 相对于其他方法,信噪比的提升幅度是

最大的,说明 VMD-WTFD 去噪能力最强。且在二次谐波信号处于低信噪比的情况下,本文方法相对于其他 4 种降噪方法所实现的信噪比改善最明显,说明 VMD-WTFD 方法更有利于对微弱信号的检测。

表 2 各种方法的降噪性能对比

Table 2 Comparison of denoising performance of various methods

Index	Before denoising	EMD-WTFD	EEMD-WTFD	CEEMDAN-WTFD	WTFD	VMD-WTFD
SNR /dB	-7.4250	11.0453	11.0883	10.9678	10.6556	12.7601
	-2.4867	15.0792	15.6581	14.8579	15.7112	16.0574
	-0.0239	16.7035	16.7094	16.1546	18.2476	18.9942
	2.2782	18.2272	17.9743	18.4066	19.4693	21.2155
	7.4566	22.7098	23.5169	23.6043	23.9212	24.7941
	9.9647	26.0866	26.0904	26.1249	25.9836	26.9643

### 3.5 二次谐波实际测量曲线的 VMD-WTFD 降噪处理

利用 CO 在中心波长  $\nu_0 = 1579.74 \text{ nm}$  的振-转吸收谱线进行了二次谐波信号的采集实验。在样品池中分别通入不同浓度的 CO 气体,实验样品的气体吸收路径长度为 10 cm,调制频率为 4 kHz。吸收信号经锁相放大器后的二次谐波信号如图 6 所示,可以看出 CO 浓度越高,对应的二次谐波信号的

幅度越大。二次谐波信号经过 VMD-WTFD 处理后的结果如图 7 所示,去噪后的曲线整体十分平滑,保留了有用的信号特征并且特征的位置不变,其噪声得到很好的抑制。根据 CO 的二次谐波信号幅度与浓度的关系,画出线性拟合曲线如图 7 中子图所示,线性度  $R^2 = 0.999$ ,可以看出二者线性度较高,适合进行浓度反演。

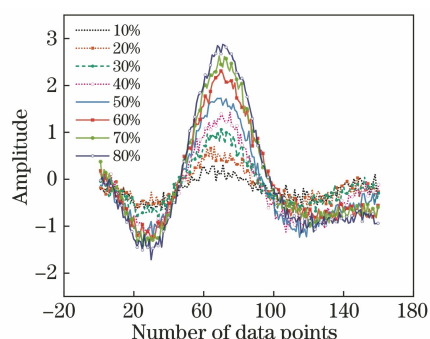


图 6 去噪前二次谐波幅度与 CO 浓度的关系

Fig. 6 Relationship between second harmonic amplitude and CO concentration before denoising

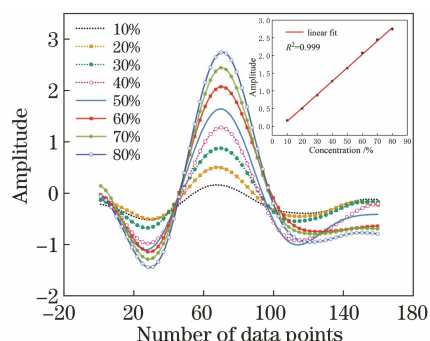


图 7 去噪后二次谐波幅度与 CO 浓度的关系

Fig. 7 Relationship between second harmonic amplitude and CO concentration after denoising

## 4 结 论

针对 TDLAS 气体浓度吸收二次谐波谱线中噪声去除的问题,提出一种对二次谐波进行变分模态分解和小波阈值函数降噪的算法,通过在阈值函数中添加调节因子调整阈值函数的线型,进而得到降噪效果更好的阈值函数模型。针对变分模态分解中平衡参数取值较为单一的问题,在分析平衡参数与噪声信号第一模态分量信噪比之间关系的基础上,提出基于噪声水平的变分模态分解的平衡参数选取办法。将本文方法与其他 5 种降噪方法进行比较,发现本文方法能够很好地恢复原始信号的峰值和峰位并且减小基线的振动,信噪比也得到了显著改善,该研究为 TDLAS 气体吸收谱线的提取提供了新思路,具有一定的实用价值。

## 参 考 文 献

[1] Wang X, Jing C R, Hou K X, et al. Online detection of human-exhaled end-tidal carbon dioxide using tunable semiconductor absorption spectroscopy [J]. Chinese Journal of Lasers, 2020, 47(3): 0311002.

王鑫, 荆聪蕊, 侯凯旋, 等. 基于 TDLAS 技术的人体呼气末 CO<sub>2</sub> 在线检测 [J]. 中国激光, 2020, 47(3): 0311002.

- [2] Chen X, Kan R F, Yang C G, et al. Concentration measurements of NO<sub>2</sub> and NH<sub>3</sub> based on wavelength-modulation frequency-division-multiplexing spectroscopic technique [J]. Acta Optica Sinica, 2018, 38(5): 0512004.  
陈祥, 阚瑞峰, 杨晨光, 等. 基于频分复用波长调制光谱的 NO<sub>2</sub> 及 NH<sub>3</sub> 浓度测量 [J]. 光学学报, 2018, 38(5): 0512004.
- [3] Zhang S, Liu W Q, Zhang Y J, et al. Application of digital filtering to the gas monitoring with TDLAS [J]. Acta Optica Sinica, 2010, 30(5): 1362-1367.  
张帅, 刘文清, 张玉钧, 等. 数字滤波方法在 TDLAS 气体检测中的应用 [J]. 光学学报, 2010, 30(5): 1362-1367.
- [4] Li S W, Xie P H, Li Y J, et al. Wavelet transform based differential optical absorption spectroscopy data processing [J]. Acta Optica Sinica, 2006, 26(11): 1601-1604.  
李素文, 谢品华, 李玉金, 等. 基于小波变换的差分吸收光谱数据处理方法 [J]. 光学学报, 2006, 26(11): 1601-1604.
- [5] Donoho D L. De-noising by soft-thresholding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(3): 613-627.
- [6] Dragomiretskiy K, Zosso D. Variational mode decomposition [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(3): 531-544.
- [7] Guo X Q. Investigations of digital filtering algorithm used in tunable diode laser absorption spectroscopy [D]. Taiyuan: Taiyuan University of Science and Technology, 2019: 7-17.  
郭心骞. 可调谐半导体激光吸收光谱信号的数字滤波算法研究 [D]. 太原: 太原科技大学, 2019: 7-17.
- [8] Humeau-Heurtier A, Abraham P, Mahé G. Analysis of laser speckle contrast images variability using a novel empirical mode decomposition: comparison of results with laser Doppler flowmetry signals variability [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2015, 34(2): 618-627.
- [9] Chen H Y. Study on signal denoising method in gas concentration measurement by laser [D]. Beijing: North China Electric Power University, 2020: 26-46.  
陈鸿雁. 激光法气体浓度测量中信号降噪方法的研究 [D]. 北京: 华北电力大学, 2020: 26-46.
- [10] Chen P, Kan L L, Song X M, et al. Application of VMD and Mahalanobis distance combination algorithm in TDLAS methane gas detection [J]. Optik, 2021, 228: 166114.

- [11] Gao Y D, Wang H L, You S H, et al. X-ray pulsar signal denoising based on two-parameter threshold function and multi-layer threshold [J]. *Acta Optica Sinica*, 2019, 39(12): 1204001.  
高迎东, 王宏力, 由四海, 等. 基于双参数阈值函数和多层阈值的 X 射线脉冲星信号消噪 [J]. *光学学报*, 2019, 39(12): 1204001.
- [12] Arndt R. Analytical line shapes for Lorentzian signals broadened by modulation [J]. *Journal of Applied Physics*, 1965, 36(8): 2522-2524.
- [13] Shi J, Zhu M, Shen H, et al. Denoising method of hydrophone signal based on VMD and wavelet threshold [J]. *Chinese Journal of Sensors and Actuators*, 2020, 33(7): 1003-1012.  
施晶, 朱明, 沈华, 等. 基于 VMD 和小波阈值的水听器信号去噪方法 [J]. *传感技术学报*, 2020, 33(7): 1003-1012.
- [14] Xie M W. The relation of covariance, correlation coefficient and correlation [J]. *Application of Statistics and Management*, 2004, 23(3): 33-36.  
谢明文. 关于协方差、相关系数与相关性的关系 [J]. *数理统计与管理*, 2004, 23(3): 33-36.