

# 光学学报

## 玻色-爱因斯坦凝聚均匀系统中集体激发的朗道阻尼

陈影<sup>1</sup>, 周昱<sup>2\*\*</sup>, 马晓栋<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>新疆师范大学物理与电子工程学院新疆发光矿物与光功能材料研究重点实验室, 新疆 乌鲁木齐 830054;

<sup>2</sup>江苏科技大学理学院, 江苏 镇江 212003

**摘要** 应用哈特里-福克-博戈留波夫(HFB)平均场理论研究玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)均匀系统中集体激发的朗道阻尼。首先,不采用准粒子共振跃迁和集体激发能量两个条件近似进行严格推导,在参量变化较大的范围内给出朗道阻尼与温度的函数关系,重点讨论趋近绝对零度和相变临界温度两种极限情况,并引入误差函数分析不同能量的准粒子跃迁对阻尼的贡献。然后,采用上述两个近似进行推导,并利用误差函数计算结果分析两种近似的适用范围。

**关键词** 量子光学; 玻色-爱因斯坦凝聚; 朗道阻尼; 哈特里-福克-博戈留波夫近似; 误差函数

中图分类号 O469

文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS202242.1627001

### Landau Damping of Collective Excitation in Homogeneous Bose-Einstein Condensate

Chen Ying<sup>1</sup>, Zhou Yu<sup>2\*\*</sup>, Ma Xiaodong<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Xinjiang Key Laboratory for Luminescence Minerals and Optical Functional Materials, School of Physics and Electronic Engineering, Xinjiang Normal University, Urumqi 830054, Xinjiang, China;

<sup>2</sup>School of Science, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, Jiangsu, China

**Abstract** Landau damping of collective excitation in a homogeneous Bose-Einstein condensate (BEC) is studied by the Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) mean-field theory. The rigorous derivation is carried out without using the two approximations of quasi-particle resonance transition and collective excitation energy. The Landau damping as a function of temperature is given in a wide parameter range, and two limits of absolute zero and critical temperature of phase transition are highlighted. The contribution of quasi-particle transitions with different energies to damping is analyzed by the error function. In addition, the above two approximations are used for derivation, and the applicable range of the approximations is analyzed by the results of the error function.

**Key words** quantum optics; Bose-Einstein condensate; Landau damping; Hartree-Fock-Bogoliubov approximation; error function

## 1 引言

集体激发作为统计物理与凝聚态理论的基本概念,对其进行深入研究具有重要意义。在玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)中,对低能集体激发的研究具有基础性意义<sup>[1-13]</sup>,并且随着宏观量子现象的实现及其调控的冷原子实验技术的提高,对低能集体激发的研究逐步进入更加复杂的发展阶段<sup>[14-41]</sup>。阻尼和频移是BEC集体

激发的主要特征<sup>[42-45]</sup>,粒子间相互作用不仅会导致集体激发的产生,还会引起集体激发振幅的衰减(阻尼)和频率的改变(频移),进而阻尼和频移的精确计算对于理解BEC的实验结果和量子多体物理的本质显得至关重要。

阻尼和频移分别有朗道(Landau)<sup>[1]</sup>和巴利耶夫(Beliaev)<sup>[5]</sup>两种机制:一个准粒子吸收一个集体激发变为另一个准粒子是朗道机制;一个集体激发变为两

收稿日期: 2022-01-27; 修回日期: 2022-03-09; 录用日期: 2022-03-30

基金项目: 国家自然科学基金(10864006, 11264039)、新疆维吾尔自治区高校科研计划重点项目(XJED2010141)、新疆师范大学“物理学”特色专业、新疆师范大学“物理学”重点学科资助

通信作者: \*xdma07@aliyun.com; \*\*yzhou@just.edu.cn

个准粒子是巴利耶夫机制。对于能级分立的实际系统,显然巴利耶夫机制对低能集体激发的贡献很小,故很多理论工作重点关注朗道机制,并且先研究阻尼。

BEC 中集体激发朗道阻尼和频移的研究方法主要有两种,一种是高温高密度下的二流体理论<sup>[46-49]</sup>,另一种是低温低密度下的平均场理论<sup>[50-67]</sup>。迄今为止大多数实验是在低温低密度下完成的,而理论工作主要聚焦于集体激发阻尼或频移与温度的依赖关系。

基于平均场理论的方法不尽相同,有微扰理论<sup>[50-53]</sup>、格林函数方法<sup>[54-55]</sup>、二阶量子场理论<sup>[56]</sup>和哈特里-福克-博戈留波夫(HFB)理论<sup>[57-67]</sup>,其中应用最多的是 HFB 理论,而文献<sup>[57]</sup>是构建 HFB 平均场理论框架的原创工作。

基于平均场理论的工作也可分为两类:一类是以无囚禁势的 BEC 均匀系统为例进行计算,将准粒子激发频谱看作是连续的,并通过积分计算各个准粒子跃迁对集体激发阻尼或频移的贡献(半经典近似)<sup>[52-58]</sup>,半经典近似理论工作是研究阻尼和频移最基础的工作;另一类是直接研究实际实验中的 BEC 系统,按实际分立的准粒子频谱进行求和计算<sup>[50-51, 59-67]</sup>。

频谱分立的有囚禁势的轴对称 BEC 系统远比频谱连续的无囚禁势的均匀 BEC 系统复杂,进而研究难度大。在研究分立准粒子频谱 BEC 的工作中,除文献<sup>[50-51]</sup>两个工作外,本团队前期也开展了相关探索<sup>[59-67]</sup>。总体来讲,BEC 中集体激发阻尼和频移的理论研究开展不足。

文献<sup>[59-61]</sup>采用了文献<sup>[50]</sup>中引入洛伦兹宽度的方法。文献<sup>[62-63]</sup>采用了文献<sup>[51]</sup>中的迭代计算方法。文献<sup>[64-67]</sup>在文献<sup>[50-51]</sup>方法的基础上进行了发展和改进,在 HFB 平均场理论的集体激发摄动本征频率关系中考虑元激发的弛豫和弛豫间的正交关系得出阻尼和频移的迭代计算公式。考虑朗道机制中三个元激发的弛豫和弛豫间的正交关系,只有失谐很小的准粒子跃迁才会对阻尼和频移有显著的贡献,而文献<sup>[50-51]</sup>的方法相当于只考虑了一个元激发的弛豫,所以文献<sup>[64-67]</sup>的计算结果远小于文献<sup>[50-51]</sup>的计算结果并且与实验结果更相符。从计算结果上看,文献<sup>[64-67]</sup>的工作是比较深入且具有突破性的。

以上是单分量 BEC 的相关理论工作情况。相对而言,两分量 BEC 集体激发阻尼和频移的理论研究还处于起步阶段<sup>[68-71]</sup>,文献<sup>[68]</sup>研究了两个不同精细结构的同种原子的两分量系统,文献<sup>[69]</sup>研究了两个不同种原子的两分量系统,而文献<sup>[70-71]</sup>研究了玻色-费米混合系统。文献<sup>[68-71]</sup>都构建了各自研究系统关于朗道阻尼的 HFB 平均场理论框架,表明在两分量系统的相关研究中,也只有 HFB 平均场理论发挥了作用,其中文献<sup>[70-71]</sup>进行了以均匀系统为例的半经典近似计算。文献<sup>[68-69]</sup>都缺少文献<sup>[70-71]</sup>所示的半经典近似计算,而半经典近似计算对理解和应用新构建的理论框架是十分必要的,其中文献<sup>[69]</sup>也是本团队的前期工作。

构建理论框架的原创性工作,需要完成一定量的计算来说明其物理意义和应用价值,由于实际轴对称 BEC 系统远比理想均匀 BEC 系统研究难度大,因此多以均匀 BEC 系统为例来进行半经典近似计算。

构建单分量 BEC 中集体激发朗道阻尼 HFB 平均场理论框架的重要原创性工作<sup>[57]</sup>中也有半经典近似计算,在计算中对准粒子共振跃迁条件和集体激发能量条件进行了近似,这两个近似具有一定的适用范围,在很多情况下并不满足,并且本团队发现文献<sup>[57]</sup>的公式推导中存在错误。因此,本文重新研究 BEC 均匀系统中集体激发的朗道阻尼,且仍然采用 HFB 平均场理论。首先,不采用上述两个近似,严格地进行推导,得到更合理、更普适的解析计算结果。然后,采用上述两个近似进行推导,指正文献<sup>[57]</sup>中的错误,并利用严格推导得出的相关计算结果讨论上述两个近似的适用范围。本文的研究结果便于理解 HFB 平均场理论及其重要意义,也便于它的应用和推广,有助于对单分量 BEC 中集体激发朗道阻尼和频移的进一步研究,也对两分量 BEC 中相关问题的研究有一定的参考价值。

本文的具体安排:第 2 章简要介绍关于 BEC 中集体激发朗道阻尼的 HFB 平均场理论<sup>[57]</sup>;第 3 章在 HFB 平均场理论框架下研究 BEC 均匀系统中集体激发的朗道阻尼,先进行严格推导并给出解析计算结果,再采用共振跃迁条件近似和集体激发能量条件近似进行推导,指正文献<sup>[57]</sup>中的错误,并讨论这两个近似的适用范围;第 4 章进行总结。

## 2 关于 BEC 中集体激发朗道阻尼的 HFB 平均场理论

本章简要介绍构建 BEC 中集体激发朗道阻尼的 HFB 平均场理论的原创性工作<sup>[57]</sup>。

在外场  $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$  中的 BEC 系统的巨正则哈密顿量  $K$  可以用产生算符  $\psi^\dagger(\mathbf{r}, t)$  和湮灭算符  $\psi(\mathbf{r}, t)$  来表达,其表达式为

$$K = H - \mu N = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu \right] \psi(\mathbf{r}, t) + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

式中:  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$  为相互作用耦合常数,其中  $a$  和  $m$  分别为粒子的 s 波散射长度和质量,  $\hbar$  为约化普朗克常数;  $\mathbf{r}$  为位矢;  $\mu$  为化学势;  $H$  为系统哈密顿量;  $N$  为系统粒子数;  $\psi(\mathbf{r}, t)$  为粒子场算符,其运动方程为

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = [\psi(\mathbf{r}, t), K] = \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu \right] \psi(\mathbf{r}, t) + g \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

式中:  $[\psi(\mathbf{r}, t), K]$  表示  $\psi(\mathbf{r}, t)$  和  $K$  的对易关系。

粒子场算符可以分解成凝聚部分和非凝聚部分,即

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) + \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

式中:凝聚部分  $\phi(\mathbf{r}, t)$  的定义为  $\phi(\mathbf{r}, t) = \langle \psi(\mathbf{r}, t) \rangle$ ; 非凝聚部分  $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$  满足  $\langle \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$ 。其中,  $\langle \cdot \rangle$  表示非平衡平均, 而与时间无关的平衡平均值用  $\langle \cdot \rangle_0$  表示。

凝聚部分又可分解为静态部分  $\phi_0 = \langle \psi \rangle_0$  和激发部分  $\delta\phi$ , 即

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}) + \delta\phi(\mathbf{r}, t). \quad (4)$$

采用 HFB 平均场理论近似:

1)  $\langle \psi^\dagger \psi \rangle = \tilde{n}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\langle \psi \psi \rangle = \tilde{m}(\mathbf{r}, t)$ , 其中,  $\tilde{n}(\mathbf{r}, t)$  和  $\tilde{m}(\mathbf{r}, t)$  分别为正常和反常热粒子密度;

$$2) \langle \psi^\dagger \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle = \langle \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \rangle = 0;$$

3)  $\langle \psi^\dagger \psi^\dagger \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle = 4\tilde{n}\tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} + \tilde{m}\tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}^\dagger + \tilde{m}^* \tilde{\psi} \tilde{\psi}$ , 其中  $\tilde{m}^*$  表示  $\tilde{m}$  的共轭;

4)  $\tilde{n}(\mathbf{r}, t) = \tilde{n}^{(0)}(\mathbf{r}) + \delta\tilde{n}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\tilde{m}(\mathbf{r}, t) = \tilde{m}^{(0)}(\mathbf{r}) + \delta\tilde{m}(\mathbf{r}, t)$ , 其中  $\tilde{n}^{(0)} = \langle \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}^\dagger \rangle_0$  和  $\tilde{m}^{(0)} = \langle \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle_0$  为静态部分,  $\delta\tilde{n}(\mathbf{r}, t)$  和  $\delta\tilde{m}(\mathbf{r}, t)$  为激发部分;

$$5) \tilde{m}^{(0)} = 0, \tilde{n}^{(0)} = 0.$$

将式(3)代入式(2)所示的 Heisenberg 方程中, 可得到凝聚部分的运动方程, 即

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu \right] \phi(\mathbf{r}, t) + g |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 \phi(\mathbf{r}, t) + 2g\phi(\mathbf{r}, t)\delta\tilde{n}(\mathbf{r}, t) + g\phi^*(\mathbf{r}, t)\delta\tilde{m}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

式中:  $\phi^*(\mathbf{r}, t)$  为  $\phi(\mathbf{r}, t)$  的共轭。

然后, 将式(4)代入式(5)中可得凝聚基态的 Gross-Pitaevskii(GP)方程

$$[H_0(\mathbf{r}) + gn_0(\mathbf{r})]\phi_0(\mathbf{r}) = 0 \quad (6)$$

和激发部分的运动方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\phi(\mathbf{r}, t) = [H_0(\mathbf{r}) + 2gn_0(\mathbf{r})]\delta\phi(\mathbf{r}, t) + gn_0(\mathbf{r})\delta\phi^*(\mathbf{r}, t) + 2g\phi_0(\mathbf{r})\delta\tilde{n}(\mathbf{r}, t) + g\phi_0^*(\mathbf{r})\delta\tilde{m}(\mathbf{r}, t), \quad (7)$$

式中:  $H_0(\mathbf{r}) = -\hbar^2 \nabla^2 / (2m) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu$  为单粒子哈密顿量;  $n_0(\mathbf{r}) = \phi_0^2(\mathbf{r})$  为凝聚体密度。

忽略式(7)中的  $\delta\tilde{n}(\mathbf{r}, t)$  和  $\delta\tilde{m}(\mathbf{r}, t)$ , 凝聚部分的集体激发

$$\begin{cases} \delta\phi(\mathbf{r}, t) = \delta\phi_1(\mathbf{r}) \exp(-i\epsilon_0 t / \hbar) \\ \delta\phi^*(\mathbf{r}, t) = \delta\phi_2(\mathbf{r}) \exp(-i\epsilon_0 t / \hbar) \end{cases} \quad (8)$$

的振幅  $\delta\phi_1$  和  $\delta\phi_2$  及其能量  $\epsilon_0$  满足 Bogoliubov-de

Gennes(BdG)方程, 即

$$\begin{cases} \mathcal{L}\delta\phi_1 + gn_0\delta\phi_2 = \epsilon_0\delta\phi_1 \\ \mathcal{L}\delta\phi_2 + gn_0\delta\phi_1 = -\epsilon_0\delta\phi_2 \end{cases}, \quad (9)$$

式中:  $\mathcal{L} = H_0 + 2gn_0$ 。

采用 Bogoliubov 变换

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_j [u_j(\mathbf{r})\alpha_j^\dagger(t) + v_j^*(\mathbf{r})\alpha_j(t)], \quad (10)$$

式中: 非凝聚准粒子激发的振幅  $u$  和  $v$  满足归一化条件  $\int d\mathbf{r} [u_j^* u_j - v_j v_j^*] = \delta_{jj}$ , 其中  $j$  和  $j'$  表示不同的准粒子;

算子  $\alpha_j^\dagger$  和  $\alpha_j$  满足玻色对易关系  $[\alpha_j^\dagger, \alpha_j] = \delta_{jj}$ 。

通过对角化式(1)所示的巨正则哈密顿量, 可以得到与式(9)相同的准粒子的 BdG 方程

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_j + gn_0 v_j = \epsilon_j u_j \\ \mathcal{L}v_j + gn_0 u_j = -\epsilon_j v_j \end{cases}, \quad (11)$$

式中:  $\epsilon_j$  为准粒子能量。

反映准粒子激发的时间演化的运动方程为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f_{jj}(t) &= \langle [\alpha_j^\dagger(t)\alpha_j(t), K] \rangle = (\epsilon_j - \epsilon_j) f_{jj}(t) + \\ &2g [f_j^{(0)} - f_j^{(0)}] \int d\mathbf{r} \phi_0(\mathbf{r}) \{ [\delta\phi(\mathbf{r}, t) + \delta\phi^*(\mathbf{r}, t)] [u_j(\mathbf{r})u_j^*(\mathbf{r}) + v_j(\mathbf{r})v_j^*(\mathbf{r})] + \\ &\delta\phi(\mathbf{r}, t)v_j(\mathbf{r})u_j^*(\mathbf{r}) + \delta\phi^*(\mathbf{r}, t)u_j(\mathbf{r})v_j^*(\mathbf{r}) \}, \quad (12) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} g_{jj}(t) &= \langle [\alpha_j(t)\alpha_j(t), K] \rangle = (\epsilon_j + \epsilon_j) g_{jj}(t) + \\ &2g [1 + f_j^{(0)} + f_j^{(0)}] \int d\mathbf{r} \phi_0(\mathbf{r}) \{ [\delta\phi(\mathbf{r}, t) + \delta\phi^*(\mathbf{r}, t)] [u_j^*(\mathbf{r})v_j^*(\mathbf{r}) + v_j^*(\mathbf{r})u_j^*(\mathbf{r})] + \\ &\delta\phi(\mathbf{r}, t)u_j^*(\mathbf{r})u_j^*(\mathbf{r}) + \delta\phi^*(\mathbf{r}, t)v_j^*(\mathbf{r})v_j^*(\mathbf{r}) \}, \quad (13) \end{aligned}$$

式中:  $f_j^{(0)} = \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle_0 = 1 / [\exp(\beta\epsilon_j) - 1]$  为准粒子的平衡密度, 其中  $\beta = 1/kT$ ,  $k$  和  $T$  分别是玻尔兹曼常数和温度;  $f_{jj}(t) = \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle - f_j^{(0)}$  和  $g_{jj}(t) = \langle \alpha_j \alpha_j \rangle$  分别为正常和反常准粒子的分布函数。

本文关注与外界驱动发生共振的集体激发, 研究撤去外驱时集体激发本征频率的扰动, 其中集体激发

的本征频率为  $\omega_0 = \epsilon_0 / \hbar$ 。将运动方程式(7)、式(12)和式(13)进行傅里叶变换, 可以得到集体激发朗道机制的摄动本征频率关系, 即

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 + 4g^2 \sum_{jj'} [f_j^{(0)} - f_{j'}^{(0)}] \frac{|A_{jj'}|^2}{\hbar\omega_0 + (\epsilon_j - \epsilon_{j'}) + i0}, \quad (14)$$



式中： $\omega$  为撤去外驱时集体激发的本征频率； $A_{ij}$  为三模耦合矩阵元，表达式为

$$A_{ij} = \int d\mathbf{r} \phi_0 \left[ \delta\phi_1 (u_j u_j^* + v_j v_j^* + v_j u_j^* + v_j v_j^* + u_j v_j^*) + \delta\phi_2 (u_j u_j^* + v_j v_j^* + u_j v_j^*) \right], \quad (15)$$

则式(14)可改写为

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 + \delta E - i\gamma, \quad (16)$$

式中： $\delta E$  和  $-i\gamma$  分别为集体激发的频移和阻尼； $\gamma$  为朗道机制的阻尼系数，其表达式为

$$\gamma = 4\pi g^2 \sum_{ij} |A_{ij}|^2 [f_j^{(0)} - f_j^{(0)*}] \delta(\hbar\omega_0 + \epsilon_j - \epsilon_j), \quad (17)$$

式中： $\delta(\cdot)$  为狄拉克函数。

### 3 均匀 BEC 系统中集体激发的朗道阻尼

本章首先严格解析推导集体激发朗道阻尼与温度的依赖关系，包括温度趋近于绝对零度和 BEC 相变临界温度这两种极限情况下的依赖关系，研究不同能量的准粒子跃迁对阻尼产生的贡献。然后，采用准粒子共振跃迁条件近似和集体激发能量条件近似重新推导结论，指出工作[57]中的错误并进行改正。最后，讨论这两个近似的适用范围。

#### 3.1 一般情况下阻尼与温度的函数关系

研究  $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})=0$  的均匀系统，凝聚部分的静态波函数  $\phi_0 = \sqrt{n_0}$  在整个空间中是一个常数，化学势为  $\mu = n_0 g^{[1]}$ ，非凝聚部分的准粒子激发和凝聚部分的集体激发由平面波函数分别表示为

$$\begin{cases} u_p(\mathbf{r}) = \frac{u_p}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar) \\ v_p(\mathbf{r}) = \frac{v_p}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar) \end{cases}, \quad (18)$$

$$\begin{cases} \delta\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{u_q}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar) \\ \delta\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{v_q}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar) \end{cases}, \quad (19)$$

式中： $\mathbf{p}$  为准粒子动量； $\mathbf{q}$  为集体激发动量； $u_p, v_p$  和  $u_q, v_q$  分别为准粒子激发和集体激发的博戈留波夫振幅； $V$  为系统体积。将  $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})=0, \phi_0 = \sqrt{n_0}, \mu = n_0 g$  和式(18)、(19)分别代入式(9)和式(11)，可得

$$\begin{cases} (\xi_p - \epsilon) u_p + g n_0 v_p = 0 \\ (\xi_p + \epsilon) v_p + g n_0 u_p = 0 \end{cases}, \quad (20)$$

$$\begin{cases} (\xi_q - \epsilon_q) u_q + g n_q v_q = 0 \\ (\xi_q + \epsilon_q) v_q + g n_q u_q = 0 \end{cases}, \quad (21)$$

式中： $\xi_p = n_0 g + p^2/(2m)$ ； $\xi_q = n_0 g + q^2/(2m)$ ； $\epsilon$  和  $\epsilon_q$  分别为准粒子激发和集体激发的能量本征值。根据博戈留波夫归一化条件

$$\begin{cases} u_p^2 - v_p^2 = 1 \\ u_q^2 - v_q^2 = 1 \end{cases}, \quad (22)$$

由式(20)和式(21)可以分别得到准粒子激发和集体激发的博戈留波夫振幅，即

$$\begin{cases} u_p = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\xi_p}{\epsilon} + 1 \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{(n_0 g)^2}{\epsilon^2}} + 1 \right]} \\ v_p = -\sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\xi_p}{\epsilon} - 1 \right)} = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{(n_0 g)^2}{\epsilon^2}} - 1 \right]} \end{cases}, \quad (23)$$

$$\begin{cases} u_q = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{(n_0 g)^2}{\epsilon_q^2}} + 1 \right]} \\ v_q = -\sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{(n_0 g)^2}{\epsilon_q^2}} - 1 \right]} \end{cases}, \quad (24)$$

其能量本征值分别为

$$\begin{cases} \epsilon_p = \sqrt{\xi_p^2 - (n_0 g)^2} = \sqrt{\left( n_0 g + \frac{p^2}{2m} \right)^2 - (n_0 g)^2} = \sqrt{\frac{n_0 g p^2}{2m} + \left( \frac{p^2}{2m} \right)^2} \\ \epsilon_q = \sqrt{\xi_q^2 - (n_0 g)^2} = \sqrt{\left( n_0 g + \frac{q^2}{2m} \right)^2 - (n_0 g)^2} = \sqrt{\frac{n_0 g q^2}{2m} + \left( \frac{q^2}{2m} \right)^2} \end{cases}, \quad (25)$$

并有

$$\begin{cases} u_p v_p = -\frac{n_0 g}{2\epsilon} \\ u_p^2 + v_p^2 = \sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon} \right)^2} \end{cases}. \quad (26)$$

对于平面波，采用 Born-Karman 条件  $\exp(i\mathbf{p}_\zeta \zeta/\hbar) = \exp[i\mathbf{p}_\zeta(\zeta + L)/\hbar]$ ，即有  $p_\zeta = n_\zeta h/L$ ，其中  $n_\zeta = 0, 1, 2, \dots, \zeta = x, y, z, L$  为系统在坐标空间中的大小， $L^3 = V$ ，故在动量空间中  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + d\mathbf{p}$  内准粒子状态数为  $4\pi p^2 d\mathbf{p}/(h/L)^3$ ，其中  $h$  为普朗克常数。将

$\sum_{j'}$  代换为  $\iint(\cdot) \frac{V4\pi p^2 dp}{h^3} \cdot \frac{V4\pi (p')^2 dp'}{h^3}$ , 其中用  $p$  和  $p'$  代替  $j$  和  $j'$  标识朗道机制中的两个准粒子, 并根据由式(25)得出的  $p = \sqrt{2m} \sqrt{\sqrt{\epsilon^2 + (n_0 g)^2} - n_0 g}$  和  $v_g =$

$\frac{\partial \epsilon}{\partial p} = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{\epsilon^2 + (n_0 g)^2}}{\epsilon} \sqrt{\sqrt{\epsilon^2 + (n_0 g)^2} - n_0 g}$ , 其中  $v_g$  为准粒子的群速度, 将式(17)改写为

$$\gamma = 4\pi g^2 \frac{(V4\pi)^2 2m^3 \epsilon_q}{h^6} \iint |A_{\epsilon\epsilon'}|^2 [f_{\epsilon}^{(0)} - f_{\epsilon'}^{(0)}] \rho_{\epsilon\epsilon'} \delta(\epsilon' - \epsilon - \epsilon_q) d\epsilon d\epsilon', \quad (27)$$

式中:  $\epsilon$  和  $\epsilon'$  的作用是代替  $p$  和  $p'$  来标识朗道机制中的两个准粒子;  $\rho_{\epsilon\epsilon'} = p^2 (p')^2 / (2m^3 \epsilon_q v_g v_{g'}) = \sqrt{\epsilon\epsilon'/\epsilon_q^2} \left[ \sqrt{\sqrt{1 + (n_0 g/\epsilon)^2} - n_0 g/\epsilon} \right] \left[ \sqrt{\sqrt{1 + (n_0 g/\epsilon')^2} - n_0 g/\epsilon'} \right] / \left( \sqrt{1 + (n_0 g/\epsilon)^2} \sqrt{1 + (n_0 g/\epsilon')^2} \right)$ 。再利用狄拉克函数的性质, 将式(27)改写为

$$\gamma = 4\pi g^2 \frac{(V4\pi)^2 2m^3 \epsilon_q}{h^6} \iint |A_{\epsilon(\epsilon+\epsilon_q)}|^2 [f_{\epsilon}^{(0)} - f_{\epsilon+\epsilon_q}^{(0)}] \rho_{\epsilon} d\epsilon, \quad (28)$$

式中:

$$\rho_{\epsilon} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_q} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_q} + 1 \right)} \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon} \right)^2} - \frac{n_0 g}{\epsilon}} \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon + \epsilon_q} \right)^2} - \frac{n_0 g}{\epsilon + \epsilon_q}}}{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon} \right)^2} \sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon + \epsilon_q} \right)^2}}; \quad (29)$$

$$f_{\epsilon}^{(0)} - f_{\epsilon+\epsilon_q}^{(0)} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon}{kT}\right) - 1} - \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon + \epsilon_q}{kT}\right) - 1}. \quad (30)$$

将  $\phi_0 = \sqrt{n_0}$ 、式(18)和式(19)代入式(15)中并根据  $\exp[i(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}/\hbar] = 1$  和  $\int d\mathbf{r} = V$  得  $A_{\epsilon(\epsilon+\epsilon_q)} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot \frac{n_0}{V}} M_{\epsilon(\epsilon+\epsilon_q)}$ , 其中

$$M_{\epsilon(\epsilon+\epsilon_q)} = \left[ \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon_q} \right)^2} + 1} - \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon_q} \right)^2} - 1} \right] \times \left[ \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon} \right)^2} + 1} \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon + \epsilon_q} \right)^2} + 1} + \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon} \right)^2} - 1} \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon + \epsilon_q} \right)^2} - 1} \right] + \left[ \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon_q} \right)^2} - 1} \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon} \right)^2} + 1} \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon + \epsilon_q} \right)^2} - 1} - \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon_q} \right)^2} + 1} \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon} \right)^2} - 1} \sqrt{\sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon + \epsilon_q} \right)^2} + 1} \right]. \quad (31)$$

引入  $x = \epsilon/(kT)$ 、 $x_q = \epsilon_q/(kT)$  和  $\tau = kT/(n_0 g)$ , 并将相互作用耦合常数  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$  代入式(28)中, 得到阻尼率为

$$\frac{\gamma}{\epsilon_q} = 4\pi g^2 \frac{(V4\pi)^2 2m^3}{h^6} \cdot \frac{n_0}{8V} n_0 g F(\tau) = 16 V n_0^2 a^3 F(\tau), \quad (32)$$

式中:  $F(\tau)$  为无量纲阻尼函数, 表达式为

$$F(\tau) = \int \tau |M_{x(x+x_q)}|^2 [f_x^{(0)} - f_{x+x_q}^{(0)}] \rho_x dx, \quad (33)$$

式中:

$$M_{x(x+x_q)} = \left( \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 x_q^2}} + 1} - \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 x_q^2}} - 1} \right) \times$$

$$\left[ \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 x^2}} + 1} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 (x+x_q)^2}} + 1} + \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 x^2}} - 1} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 (x+x_q)^2}} - 1} \right] +$$

$$\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 x_q^2}} - 1} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 x^2}} + 1} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 (x+x_q)^2}} - 1} -$$

$$\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 x_q^2}} + 1} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 x^2}} - 1} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 (x+x_q)^2}} + 1}; \quad (34)$$

$$\rho_x = \frac{\sqrt{\frac{x}{x_q} \left( \frac{x}{x_q} + 1 \right)} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 x^2}} - \frac{1}{\tau x}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 (x+x_q)^2}} - \frac{1}{\tau (x+x_q)}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 x^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2 (x+x_q)^2}}}; \quad (35)$$

$$f_x^{(0)} - f_{x+x_q}^{(0)} = \frac{1}{\exp(x) - 1} - \frac{1}{\exp(x+x_q) - 1}. \quad (36)$$

以铷原子 ( $m = 87 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $a = 5.82 \times 10^{-9} \text{ m}$ ,  $g = 4\pi\hbar^2 a/m = 1.39651 \times 10^{-50} \text{ J}\cdot\text{m}^3$ ) 为例讨论集体激发阻尼的温度依赖关系。在计算中,以实际实验参量为中间值,大范围选取参量。实际实验中的系统粒子数  $n$  的取值范围为  $10^{19} \sim 10^{21} \text{ m}^{-3}$ [1],集体激发能量  $\epsilon_q = \hbar\omega$  的取值范围为  $10^{-31} \sim 10^{-30} \text{ J}$ ,其中  $\omega$  的取值范围为  $126 \sim 1444 \text{ Hz}$ [42-45]。值得一提的是,实际实验中集体激发能量  $\epsilon_q$  与粒子相互作用能量  $n_0 g$  差别不大。

图 1 给出集体激发能量  $\epsilon_q$  分别为  $10^{-26}$ ,  $10^{-31}$ ,  $10^{-36} \text{ J}$ ,而系统粒子数密度  $n$  分别为  $10^{14}$ ,  $10^{19}$ ,  $10^{24} \text{ m}^{-3}$  9 种情况下,无量纲阻尼函数  $F(\tau)$  随无量纲温度  $\tau$  的变化规律。从图 1 中可以看出,阻尼随温度的增大而增大。比较图 1(a)~(c) 可以看出,阻尼随系统粒子数和集体激发能量的变化行为比较复杂,即在集体激发能量(系统粒子数)不变的情况下,随着系统粒子数(集体激发能量)的增大,阻尼有增加的情况,有减小的情况,也有先增加后减小的情况。

需要说明一点,由于均匀系统元激发能谱是准连续的,其能谱密度远远大于实际实验中的能谱密度,其满足共振跃迁条件的准粒子跃迁数目远远大于实际实验中的数目,故其集体激发的阻尼会远远大于实际实验中的集体激发阻尼。因此,在均匀系统集体激发的阻尼研究中,阻尼的绝对大小并不重要,而阻尼与温度的依赖关系需要重点讨论。

### 3.2 极限情况下阻尼和温度的函数关系

无量纲温度  $\tau$  与实际温度  $T$  间的关系比较复杂,  $\tau = kT/(n_0 g)$  除了直接与  $T$  有关,还与凝聚粒子数密度  $n_0 = n \left[ 1 - (T/T_c)^{3/2} \right]$ [1] 有关,其中 BEC 临界温度

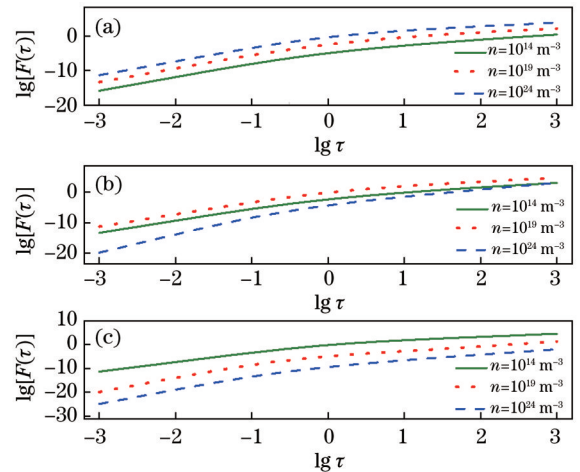


图 1 不同  $\epsilon_q$  下无量纲阻尼函数  $F(\tau)$  随无量纲温度  $\tau$  的变化。(a)  $\epsilon_q = 10^{-26} \text{ J}$ ; (b)  $\epsilon_q = 10^{-31} \text{ J}$ ; (c)  $\epsilon_q = 10^{-36} \text{ J}$

Fig. 1 Dimensionless damping function  $F(\tau)$  varying with dimensionless temperature  $\tau$  under different  $\epsilon_q$ . (a)  $\epsilon_q = 10^{-26} \text{ J}$ ; (b)  $\epsilon_q = 10^{-31} \text{ J}$ ; (c)  $\epsilon_q = 10^{-36} \text{ J}$

$T_c = \frac{2\pi}{(2.612)^{2/3}} \cdot \frac{\hbar^2}{mk} n^{2/3}$ [1] 与系统粒子数有关。当

$\tau \rightarrow 0$  时,  $n_0 \rightarrow n$ , 实际温度趋近于绝对零度,  $T \rightarrow 0$ 。当  $\tau \rightarrow \infty$  时,  $n_0 \rightarrow 0$ , 实际温度趋近于 BEC 相变临界温度,  $T \rightarrow T_c$ 。

当  $\tau \rightarrow 0$  时, 式(33)所示的无量纲阻尼函数变为

$$F_1(\tau) = \tau^4 f_1(\tau), \quad (37)$$

式中 :

$$f_1(\tau) = \int \frac{x^2(x+x_q)^2}{2x_q} \left[ \frac{1}{\exp(x) - 1} - \frac{1}{\exp(x+x_q) - 1} \right] dx。$$

当  $\tau \rightarrow \infty$  时,式(33)所示的无量纲阻尼函数变为

$$F_2(\tau) = \tau f_2(\tau), \quad (38)$$

式中：
$$f_2(\tau) = 8 \sqrt{\frac{x}{x_q}} \left( \frac{x}{x_q} + 1 \right) \left[ \frac{1}{\exp(x) - 1} - \frac{1}{\exp(x + x_q) - 1} \right] dx.$$

上述  $f_1(\tau)$  和  $f_2(\tau)$  中的  $x_q = \epsilon_q / (kT)$  均与  $\tau$  有关。

为了更加直观地展示  $F_1(\tau)$ 、 $f_1(\tau)$  和  $\tau^4$  随  $\tau$  的变化情况,以及  $F_2(\tau)$  与  $f_2(\tau)$  随  $\tau$  的变化情况,依据式(37)和式(38),得到了图2和图3。

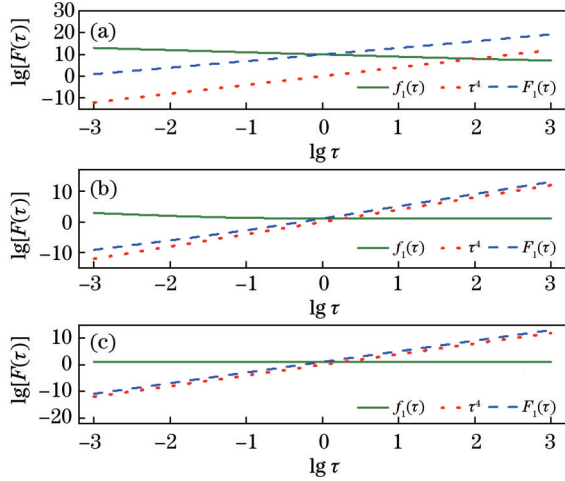


图2 不同情况下  $F_1(\tau)$ 、 $f_1(\tau)$  和  $\tau^4$  随  $\tau$  的变化。(a)  $\epsilon_q = 10^{-26}$  J,  $n = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ ; (b)  $\epsilon_q = 10^{-31}$  J,  $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ; (c)  $\epsilon_q = 10^{-36}$  J,  $n = 10^{24} \text{ m}^{-3}$ 。  
Fig. 2  $F_1(\tau)$ ,  $f_1(\tau)$  and  $\tau^4$  varying with  $\tau$  under different situations. (a)  $\epsilon_q = 10^{-26}$  J,  $n = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ ; (b)  $\epsilon_q = 10^{-31}$  J,  $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ; (c)  $\epsilon_q = 10^{-36}$  J,  $n = 10^{24} \text{ m}^{-3}$

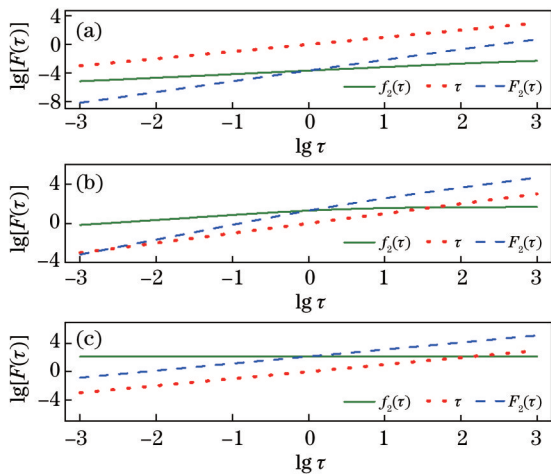


图3 不同情况下  $F_2(\tau)$  和  $f_2(\tau)$  随  $\tau$  的变化。(a)  $\epsilon_q = 10^{-26}$  J,  $n = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ ; (b)  $\epsilon_q = 10^{-31}$  J,  $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ; (c)  $\epsilon_q = 10^{-36}$  J,  $n = 10^{24} \text{ m}^{-3}$ 。  
Fig. 3  $F_2(\tau)$  and  $f_2(\tau)$  varying with  $\tau$  under different situations. (a)  $\epsilon_q = 10^{-26}$  J,  $n = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ ; (b)  $\epsilon_q = 10^{-31}$  J,  $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ; (c)  $\epsilon_q = 10^{-36}$  J,  $n = 10^{24} \text{ m}^{-3}$

图2和图3的参量都是选取了图1所示的9种参量选取情况中的3种,分别是  $ng \ll \epsilon_q$ 、 $ng \approx \epsilon_q$  和  $ng \gg \epsilon_q$  3种特殊的参量选取情况。

图2给出了  $F_1(\tau)$ 、 $f_1(\tau)$  和  $\tau^4$  随  $\tau$  的变化规律。可以看出,  $f_1(\tau)$  随  $\tau$  的变化比较平缓,所以  $F_1(\tau) = \tau^4 f_1(\tau)$  和  $\tau^4$  随  $\tau$  的变化规律比较接近。比较图2(a)~(c)可以看出,  $ng$  相对  $\epsilon_q$  越大,  $f_1(\tau)$  随  $\tau$  的变化越平缓,当  $ng \gg \epsilon_q$  时,  $\lg[f_1(\tau)]$  趋近于一条水平线,  $\lg[F_1(\tau)]$  和  $\lg \tau^4$  趋于平行,即  $F_1(\tau)$  与  $\tau^4$  成正比。

图3给出了  $F_2(\tau)$  和  $f_2(\tau)$  随  $\tau$  的变化规律。可以看出,  $f_2(\tau)$  随  $\tau$  的变化比较平缓,所以  $F_2(\tau) = \tau f_2(\tau)$  和  $\tau$  的变化规律比较接近。比较图3(a)~(c)可以看出,  $ng$  相对  $\epsilon_q$  越大,  $f_2(\tau)$  随  $\tau$  的变化越平缓,当  $ng \gg \epsilon_q$  时,  $\lg[f_2(\tau)]$  趋近于一条水平线,  $\lg[F_2(\tau)]$  和  $\lg \tau$  趋于平行,即  $F_2(\tau)$  与  $\tau$  成正比。

当  $ng \gg \epsilon_q$  时,即集体激发能量远远小于粒子相互作用能量时,此时的集体激发被称为声子,文献[52, 72-74]在声子阻尼的研究中都得到了在  $\tau \rightarrow 0$  的极限情况下阻尼与温度的四次方成正比的结论,这是凝聚态物理中众所周知的重要结论,本文不但得出了在  $ng \gg \epsilon_q$  的极端情况下与之相同的结论,而且得出了在一般情况下与之接近的结论。

### 3.3 误差函数分析

将式(33)改写为  $F(\tau) = \int_0^\infty f(x) dx$ , 其中  $f(x) = \tau \left| M_{x(x+x_q)} \right|^2 (f_x - f_{x+x_q}) \rho_x$ , 定义误差函数  $\text{erf}(x, \tau) = \int_0^x f(x) dx$ 。

图4给出了在无量纲温度  $\tau$  为  $10^{-3}$ ,  $1$ ,  $10^3$  的情况下,  $\text{erf}(x, \tau)$  随  $x$  的变化规律。  $x = \epsilon / (kT)$  为准粒子的

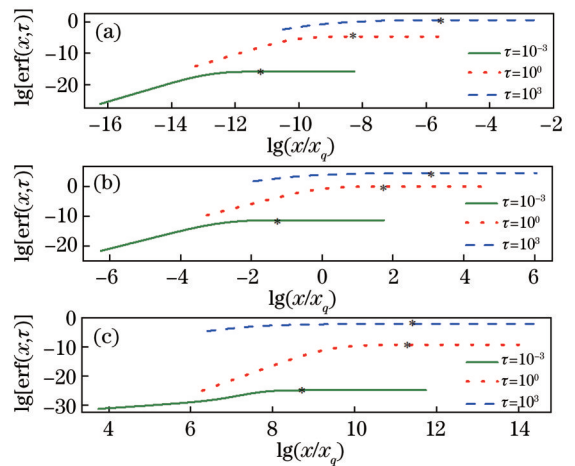


图4 不同情况下  $\text{erf}(x, \tau)$  随  $x$  的变化。(a)  $\epsilon_q = 10^{-26}$  J,  $n = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ ; (b)  $\epsilon_q = 10^{-31}$  J,  $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ; (c)  $\epsilon_q = 10^{-36}$  J,  $n = 10^{24} \text{ m}^{-3}$ 。  
Fig. 4  $\text{erf}(x, \tau)$  varying with  $x$  under different situations. (a)  $\epsilon_q = 10^{-26}$  J,  $n = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ ; (b)  $\epsilon_q = 10^{-31}$  J,  $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ; (c)  $\epsilon_q = 10^{-36}$  J,  $n = 10^{24} \text{ m}^{-3}$

无量纲能量,  $x_q = \epsilon_q / (kT)$  为集体激发的无量纲能量,  $x/x_q$  为准粒子能量相对集体激发能量的大小,  $F(\tau) = \int_0^\infty f(x) dx$  为所有准粒子跃迁对阻尼的贡献,  $\text{erf}(x, \tau) = \int_0^x f(x) dx$  为无量纲能量小于  $x$  时准粒子跃迁对阻尼的贡献。从图 4 中可以看出, 当  $\lg(x/x_q)$  增大到星号所示的值时,  $\lg[\text{erf}(x, \tau)]$  达到最大值, 即此时  $\text{erf}(x, \tau) = F(\tau)$ , 也就是说, 对阻尼的贡献来自于  $x/x_q$  小于星号所示值的准粒子跃迁。

比较图 4(a)~(c) 可以看出,  $ng$  相对于  $\epsilon_q$  越大, 跃迁对阻尼有贡献的准粒子  $x/x_q$  越大。从图 4 中还可以看出, 跃迁对阻尼有贡献的准粒子  $x/x_q$  不仅取决于  $ng$  相对于  $\epsilon_q$  的大小, 还取决于温度的大小, 温度越大, 跃迁对阻尼有贡献的准粒子  $x/x_q$  越大。

需要说明一点, 根据阻尼的朗道机制, 即一个准粒子吸收一个集体激发变为另一个准粒子, 上述  $x$  实际上是朗道机制中两个准粒子能量较小的准粒子无量纲能量, 为了方便, 上述结论都是参照其中能量较小的准粒子叙述的。

### 3.4 讨论

与本文所示的严格推导的方法不同, 文献[57]采用了准粒子共振跃迁条件近似和集体激发能量条件近似对均匀 BEC 系统中集体激发的朗道阻尼进行了研究, 这篇文献是研究 BEC 系统集体激发阻尼的先驱性理论工作, 对后继的研究起到了重要的启发作用。为后继相关研究更好地理解和应用该理论, 本小节先基于上述两个近似重新推导并得到正确的相关结论, 指出文献[57]中的错误。然后, 在 3.3 节中误差函数计算结果的基础上, 对这两个近似的适用范围进行较为深入的讨论。

#### 3.4.1 基于两个条件近似的三模耦合矩阵元推导

所谓集体激发能量条件近似, 即满足  $\epsilon_q \ll n_0 g$  时的情况。此时, 将  $\epsilon_q \ll n_0 g$  代入式 (25) 可得  $q^2 / (2m) \ll n_0 g$  和  $\epsilon_q = cq$ , 其中  $c = \sqrt{n_0 g / m}$  为声速, 并有  $n_0 g = mc^2$ 。

将  $\epsilon_q \ll n_0 g$  代入式 (24) 可得

$$\begin{cases} u_q \approx \left( \frac{n_0 g}{2\epsilon_q} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_q}{2n_0 g} \right)^{1/2} \\ v_q \approx - \left( \frac{n_0 g}{2\epsilon_q} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_q}{2n_0 g} \right)^{1/2} \end{cases} \quad (39)$$

在  $p$  和  $p'$  都远大于  $q$  的情况下, 以动量表示的准粒子共振跃迁条件  $\delta(p' - p - q)$  可以近似写为  $\delta(p' - p - q \cos \theta)$ , 其中  $\theta$  为  $q$  与  $p$  的夹角, 此即准粒子共振跃迁条件近似。

根据  $\epsilon' - \epsilon = \frac{\partial \epsilon}{\partial p} (p' - p) = v_g (p' - p)$ , 准粒子共

振跃迁条件可以以能量的形式写为  $\delta[(\epsilon' - \epsilon) / v_g - q \cos \theta]$ , 从而有  $\delta(\epsilon' - \epsilon - v_g q \cos \theta) = \frac{1}{v_g} \delta(p' - p - q \cos \theta)$ 。根据  $f_p^{(0)} - f_{p'}^{(0)} = \frac{\partial f_p^{(0)}}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial p} (p - p') = - \frac{\partial f_p^{(0)}}{\partial \epsilon} v_g q \cos \theta$ , 式 (17) 所示的阻尼系数可近似写为 
$$\gamma = -4\pi g^2 q \sum_{pp'} |A_{pp'}|^2 \frac{\partial f_p^{(0)}}{\partial \epsilon} \cos \theta \delta(p' - p - q \cos \theta). \quad (40)$$

将  $\sum_{jj'}$  代换为  $\iint (\cdot) \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3} \cdot \frac{V 4\pi (p')^2 dp'}{h^3}$ , 并利用狄拉克函数的性质, 式 (40) 可改写为

$$\gamma = -4\pi g^2 q \frac{(4\pi V)^2}{h^6} \int |A_{p, p+q \cos \theta}|^2 \frac{\partial f_p^{(0)}}{\partial \epsilon} \cos \theta p^2 (p + q \cos \theta)^2 dp, \quad (41)$$

其中, 三模耦合矩阵元为

$$A_{p, p+q \cos \theta} = \sqrt{\frac{n_0}{V}} \left[ u_q (u_p u_{p+q \cos \theta} + v_p v_{p+q \cos \theta} + v_p u_{p+q \cos \theta}) + v_q (u_p u_{p+q \cos \theta} + v_p v_{p+q \cos \theta} + u_p v_{p+q \cos \theta}) \right]. \quad (42)$$

根据

$$\begin{cases} u_{p'} = u_p + \frac{\partial u_p}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial p} (p' - p) = u_p + \frac{\partial u_p}{\partial \epsilon} v_g q \cos \theta \\ v_{p'} = v_p + \frac{\partial v_p}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial p} (p' - p) = v_p + \frac{\partial v_p}{\partial \epsilon} v_g q \cos \theta \end{cases}, \quad (43)$$

可将式 (42) 改写为

$$A_{p, p+q \cos \theta} = \sqrt{\frac{n_0}{V}} \left[ \left( \frac{\epsilon_q}{2n_0 g} \right)^{1/2} (u_p^2 + u_p v_p + v_p^2) + \left( \frac{\epsilon_q}{2n_0 g} \right)^{1/2} \frac{q v_g \cos \theta}{\epsilon} \frac{1}{2} \cdot \frac{u_p v_p}{u_p^2 + v_p^2} - \left( \frac{n_0 g}{2\epsilon_q} \right)^{1/2} \frac{q v_g \cos \theta u_p v_p}{\epsilon} \right]. \quad (44)$$

比较式 (44) 中方括号中的第 2 项和第 3 项, 由于  $u_p^2 + v_p^2 = \sqrt{1 + \left( \frac{n_0 g}{\epsilon} \right)^2} > 1$  而  $\epsilon_q \ll n_0 g$ , 正确的处理应该是忽略第 2 项而保留第 3 项, 此时式 (44) 变为

$$A_{p, p+q \cos \theta} = \sqrt{\frac{n_0}{V}} \left[ \left( \frac{\epsilon_q}{2n_0 g} \right)^{1/2} (u_p^2 + u_p v_p + v_p^2) - \left( \frac{n_0 g}{2\epsilon_q} \right)^{1/2} \frac{q v_g \cos \theta u_p v_p}{\epsilon} \right]. \quad (45)$$

然而, 文献[57]中给出的三模耦合矩阵元为



$$A_{p, p+q \cos \theta} = \sqrt{\frac{n_0}{V}} \left[ \left( \frac{\epsilon_q}{2mc^2} \right)^{1/2} (u_p^2 + u_p v_p + v_p^2) - \left( \frac{\epsilon_q}{2mc^2} \right)^{1/2} \frac{v_g}{c} \cos \theta \frac{2u_p^2 v_p^2}{u_p^2 + v_p^2} \right], \quad (46)$$

其中如前所述  $n_0 g = mc^2$ 。

文献[57]中的错误发生在式(46)所示的三模耦合矩阵元中。式(45)和式(46)的主要区别在于:式(45)第2项中的  $qv_g/\epsilon$  与式(46)第2项中的  $v_g/c$  不同,除非满足  $\epsilon = cq$ ,而实际上只有集体激发的能量满足  $\epsilon q =$

$cq$ , 准粒子的能量为  $\epsilon \neq cq$ ; 式(46)中不含  $\left( \frac{n_0 g}{2\epsilon_q} \right)^{1/2}$  的项

而只有  $\left( \frac{\epsilon_q}{2mc^2} \right)^{1/2}$  的项,这与集体激发能量条件近似  $\epsilon_q \ll n_0 g$  相矛盾。

本节的主要目的是指正错误,故省略之后的阻尼系数和无量纲阻尼函数的推导。

#### 3.4.2 两个近似的适用范围

在3.3节的误差函数计算中发现,跃迁对阻尼有贡献的准粒子  $x/x_q$  截止于某一最大值,  $ng$  越大,  $x/x_q$  的截止值越大,跃迁对阻尼有贡献的准粒子  $x/x_q$  越大,跃迁对阻尼有贡献的准粒子动量也越大,准粒子共振跃迁条件近似  $p' - p - q \cos \theta = 0$  就越能得到满足,这样似乎在  $\epsilon_q \ll ng$  极端条件下的声子阻尼问题中,准粒子共振跃迁条件近似就能严格满足。然而,实际上并非如此,这是因为在3.3节的误差函数计算中还发现,  $x/x_q$  的截止值不仅取决于  $ng$  和  $\epsilon_q$  的相对大小,还与温度有关。温度越小,  $x/x_q$  的截止值越小,跃迁对阻尼有贡献的准粒子  $x/x_q$  越小,跃迁对阻尼有贡献的准粒子动量也越小,此时不能满足准粒子共振跃迁条件近似。

另外,无论  $ng$  大小如何,当  $T \rightarrow T_c$  时,  $n_0 \rightarrow 0$ , 此时不能满足集体激发能量条件近似  $\epsilon_q \ll n_0 g$ 。

因此,应用基于共振跃迁条件近似和集体激发能量条件近似推导出的结论,不能用于分析温度趋近于绝对零度和 BEC 相变临界温度这两种极限情况,而前述基于严格推导得到的结论则不存在这些问题。

## 4 结 论

BEC 中集体激发阻尼和频移是一个复杂且重要的研究课题,而均匀系统中的朗道阻尼是最基础的问题。研究 BEC 中集体激发阻尼的一个重要方法是 HFB 平均场理论,基于此理论,通过严格的解析计算,给出了朗道阻尼和温度的函数关系,在比较大的参量范围内给出了一般性的结论。同时,特别研究了温度趋近于绝对零度和相变临界温度这两种极限情况,分别得出了朗道阻尼接近与温度的四次方和一次方成正比的结论,并得到在粒子相互作用能远远大于集体激发能量的极端条件下,当温度趋近于绝对零度时,朗道阻尼严格地与温度的四次方成正比这一众所周知的

结论。给出了不同能量的准粒子跃迁对阻尼的贡献,并利用误差函数反映了粒子相互作用的细节。文献[57]是利用 HFB 平均场理论研究 BEC 中集体激发阻尼的先驱工作,在其对均匀系统的朗道阻尼研究中,采用了准粒子共振跃迁条件近似和集体激发能量条件近似,通过误差函数讨论了这两个近似的适用范围。此外,发现了文献[57]中存在的错误,为了指正该错误以便后继相关研究更好地理解和应用该文献构建的理论,基于这两个近似重新对相关公式进行了推导。本研究再次表明 HFB 平均场理论在冷原子系统中的应用价值和重要意义,有助于对单分量 BEC 集体激发朗道阻尼和频移的进一步研究,也对两分量 BEC 中相关问题的研究提供了参考,对深入理解多体相互作用冷原子体系的量子特性和多体性质具有重要意义。

## 参 考 文 献

- [1] Pethick C J, Smith H. Bose-Einstein condensation in dilute gases[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [2] Dalfovo F, Minniti C, Pitaevskii L P. Frequency shift and mode coupling in the nonlinear dynamics of a Bose condensed gas[J]. Physical Review A, 1997, 56(6): 4855-4863.
- [3] Morgan S A, Choi S, Burnett K, et al. Nonlinear mixing of quasiparticles in an inhomogeneous Bose condensate [J]. Physical Review A, 1998, 57(5): 3818-3829.
- [4] Hechenblaikner G, Maragò O M, Hodby E, et al. Observation of harmonic generation and nonlinear coupling in the collective dynamics of a Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(4): 692-695.
- [5] Hodby E, Maragò O M, Hechenblaikner G, et al. Experimental observation of Beliaev coupling in a Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review Letters, 2001, 86(11): 2196-2199.
- [6] Edwards M, Dodd R J, Clark C W, et al. Properties of a Bose-Einstein condensate in an anisotropic harmonic potential[J]. Physical Review A, 1996, 53(4): R1950-R1953.
- [7] Maragò O M, Hopkins S A, Arlt J, et al. Observation of the scissors mode and evidence for superfluidity of a trapped Bose-Einstein condensed gas[J]. Physical Review Letters, 2000, 84(10): 2056-2059.
- [8] Al Khawaja U, Stoof H T C. Nonlinear coupling between scissors modes of a Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review A, 2001, 65(1): 013605.
- [9] Hechenblaikner G, Morgan S A, Hodby E, et al. Calculation of mode coupling for quadrupole excitations in a Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review A, 2002, 65(3): 033612.
- [10] Bijlsma M J, Stoof H T C. Collisionless modes of a trapped Bose gas[J]. Physical Review A, 1999, 60(5): 3973-3981.
- [11] Öhberg P, Stenholm S. Hartree-Fock treatment of the two-component Bose-Einstein condensate[J]. Physical

- Review A, 1998, 57(2): 1272-1279.
- [12] Stringari S. Collective excitations of a trapped Bose-condensed gas[J]. Physical Review Letters, 1996, 77(12): 2360-2363.
- [13] Fetter A L. Ground state and excited states of a confined condensed Bose gas[J]. Physical Review A, 1996, 53(6): 4245-4249.
- [14] Shchedrin G, Jaschke D, Carr L D. Absence of Landau damping in driven three-component Bose-Einstein condensate in optical lattices[J]. Scientific Reports, 2018, 8: 11523.
- [15] Ota M, Larcher F, Dalfovo F, et al. Collisionless sound in a uniform two-dimensional Bose gas[J]. Physical Review Letters, 2018, 121(14): 145302.
- [16] Mendonça J T, Terças H, Gammal A. Quantum Landau damping in dipolar Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review A, 2018, 97(6): 063610.
- [17] Cappellaro A, Toigo F, Salasnich L. Collisionless dynamics in two-dimensional bosonic gases[J]. Physical Review A, 2018, 98(4): 043605.
- [18] Zhou W Y, Wu Y J, Kou S P. Bogoliubov excitations in a Bose - Hubbard model on a hyperhoneycomb lattice[J]. Chinese Physics B, 2018, 27(5): 050302.
- [19] Wang Z H, Hou J X. Low-lying collective modes of a one-dimensional Bose gas with quantum fluctuation effect [J]. Journal of Low Temperature Physics, 2020, 199(5/6): 1324-1331.
- [20] Kurkjian H, Ristivojevic Z. Damping of elementary excitations in one-dimensional dipolar Bose gases[J]. Physical Review Research, 2020, 2(3): 033337.
- [21] Ristivojevic Z, Matveev K A. Decay of Bogoliubov excitations in one-dimensional Bose gases[J]. Physical Review B, 2016, 94(2): 024506.
- [22] Sukhachov P O, Banerjee S, Balatsky A V. Bose-Einstein condensate of Dirac magnons: pumping and collective modes[J]. Physical Review Research, 2021, 3(1): 013002.
- [23] Malakar M, Ray S, Sinha S, et al. Phases and collective modes of bosons in a triangular lattice at finite temperature: a cluster mean field study[J]. Physical Review B, 2020, 102(18): 184515.
- [24] Klimin S N, Tempere J, Kurkjian H. Collective excitations of superfluid Fermi gases near the transition temperature[J]. Physical Review A, 2021, 103(4): 043336.
- [25] Karpov I, Argyropoulos T, Shaposhnikova E. Thresholds for loss of Landau damping in longitudinal plane[J]. Physical Review Accelerators and Beams, 2021, 24(1): 011002.
- [26] Li C X, Ma X D, Ma Y L, et al. Resonant interactions of collective modes in a quasi-one-dimensional attractive Bose - Einstein condensate[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 2013, 82(4): 044002.
- [27] Natu S S, Wilson R M. Landau damping in a collisionless dipolar Bose gas[J]. Physical Review A, 2013, 88(6): 063638.
- [28] Ma Y L, Chui S T. Analytical expressions for the hydrodynamic excitation spectrum of Bose-Einstein condensates in axially anisotropic traps[J]. Physical Review A, 2002, 65(5): 053610.
- [29] Hu B, Huang G X, Ma Y L. Analytical solutions of the Bogoliubov - de Gennes equations for excitations of a trapped Bose-Einstein-condensed gas[J]. Physical Review A, 2004, 69(6): 063608.
- [30] Zhu K Q, Yu Z F, Gao J M, et al. Periodically modulated interaction effect on transport of Bose-Einstein condensates in lattice with local defects[J]. Chinese Physics B, 2019, 28(1): 010307.
- [31] 席忠红, 杨雪滢, 唐娜, 等. 偶极玻色-爱因斯坦凝聚体在类方势阱中的 Bénard-von Kármán 涡街[J]. 物理学报, 2018, 67(23): 230501.
- Xi Z H, Yang X Y, Tang N, et al. Bénard-von Kármán vortex street in dipolar Bose-Einstein condensate trapped by square-like potential[J]. Acta Physica Sinica, 2018, 67(23): 230501.
- [32] 李吉, 刘伍明. 梯度磁场中自旋-轨道耦合旋转两分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态研究[J]. 物理学报, 2018, 67(11): 110302.
- Li J, Liu W M. Ground state of spin-orbit coupled rotating two-component Bose-Einstein condensate in gradient magnetic field[J]. Acta Physica Sinica, 2018, 67(11): 110302.
- [33] 贾瑞煜, 方乒乓, 高超, 等. 玻色-爱因斯坦凝聚体中的淬灭孤子与冲击波[J]. 物理学报, 2021, 70(18): 180303.
- Jia R Y, Fang P P, Gao C, et al. Quenched solitons and shock waves in Bose-Einstein condensates[J]. Acta Physica Sinica, 2021, 70(18): 180303.
- [34] 李吉, 刘斌, 白晶, 等. 环形势阱中自旋-轨道耦合旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态[J]. 物理学报, 2020, 69(14): 140301.
- Li J, Liu B, Bai J, et al. Ground state of spin-orbit coupled rotating ferromagnetic Bose-Einstein condensate in toroidal trap[J]. Acta Physica Sinica, 2020, 69(14): 140301.
- [35] Liang Z X, Zhang Z D, Liu W M. Dynamics of a bright soliton in Bose-Einstein condensates with time-dependent atomic scattering length in an expulsive parabolic potential [J]. Physical Review Letters, 2005, 94(5): 050402.
- [36] Ji A C, Liu W M, Liang S J, et al. Dynamical creation of fractionalized vortices and vortex lattices[J]. Physical Review Letters, 2008, 101(1): 010402.
- [37] Wang D S, Hu X H, Hu J P, et al. Quantized quasi-two-dimensional Bose-Einstein condensates with spatially modulated nonlinearity[J]. Physical Review A, 2010, 81(2): 025604.
- [38] 周昱, 张远, 王颖, 等. 具有  $2n+1$  次非线性的薛定谔方程暗孤子特性[J]. 光学学报, 2020, 40(9): 0927001.
- Zhou Y, Zhang Y, Wang Y, et al. Dark soliton properties of nonlinear Schrödinger equation with  $(2n+1)$ -th order nonlinearity[J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(9): 0927001.
- [39] 欧阳鑫川, 胡青青, 叶美凤, 等. 一种用于冷原子重力仪的低相噪微波频综研制[J]. 中国激光, 2021, 48(23): 2311001.

- Ouyang X C, Hu Q Q, Ye M F, et al. Development of integrated low-phase noise microwave frequency synthesizer for cold atomic gravimeter[J]. Chinese Journal of Lasers, 2021, 48(23): 2311001.
- [40] 豆福全, 张嘉辉, 杨静, 等. 超冷异核玻色四原子分子的多路径转化和干涉效应[J]. 激光与光电子学进展, 2021, 58(11): 1102001.
- Dou F Q, Zhang J H, Yang J, et al. Multipath conversion and interference effect of ultracold bosonic heteronuclear tetra-atomic molecule[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2021, 58(11): 1102001.
- [41] Ghasemian E, Tavassoly M K. Population dynamics of ultra-cold atoms interacting with radiation fields in the presence of inter-atomic collisions[J]. Chinese Optics Letters, 2021, 19(12): 122701.
- [42] Maragò O, Hechenblaikner G, Hodby E, et al. Temperature dependence of damping and frequency shifts of the scissors mode of a trapped Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review Letters, 2001, 86(18): 3938-3941.
- [43] Stamper-Kurn D M, Miesner H J, Inouye S, et al. Collisionless and hydrodynamic excitations of a Bose-Einstein condensate[J]. Physical Review Letters, 1998, 81(3): 500-503.
- [44] Chevy F, Bretin V, Rosenbusch P, et al. Transverse breathing mode of an elongated Bose-Einstein condensate [J]. Physical Review Letters, 2002, 88(25): 250402.
- [45] Jin D S, Matthews M R, Ensher J R, et al. Temperature-dependent damping and frequency shifts in collective excitations of a dilute Bose-Einstein condensate [J]. Physical Review Letters, 1997, 78(5): 764-767.
- [46] Zaremba E, Griffin A, Nikuni T. Two-fluid hydrodynamics for a trapped weakly interacting Bose gas [J]. Physical Review A, 1998, 57(6): 4695-4698.
- [47] Zaremba E, Nikuni T, Griffin A. Dynamics of trapped Bose gases at finite temperatures[J]. Journal of Low Temperature Physics, 1999, 116(3): 277-345.
- [48] Jackson B, Zaremba E. Quadrupole collective modes in trapped finite-temperature Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review Letters, 2002, 88(18): 180402.
- [49] Jackson B, Zaremba E. Accidental suppression of Landau damping of the transverse breathing mode in elongated Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review Letters, 2002, 89(15): 150402.
- [50] Guilleumas M, Pitaevskii L P. Temperature-induced resonances and Landau damping of collective modes in Bose-Einstein condensed gases in spherical traps[J]. Physical Review A, 1999, 61(1): 013602.
- [51] Das K, Bergeman T. Trends in resonance energy shifts and decay rates for Bose condensates in a harmonic trap [J]. Physical Review A, 2001, 64(1): 013613.
- [52] Pitaevskii L P, Stringari S. Landau damping in dilute Bose gases[J]. Physics Letters A, 1997, 235(4): 398-402.
- [53] Fedichev P O, Shlyapnikov G V, Walraven J T M. Damping of low-energy excitations of a trapped Bose-Einstein condensate at finite temperatures[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(11): 2269-2272.
- [54] Reidl J, Csordás A, Graham R, et al. Shifts and widths of collective excitations in trapped Bose gases determined by the dielectric formalism[J]. Physical Review A, 2000, 61(4): 043606.
- [55] Mizushima T, Ichioka M, Machida K. Beliaev damping and Kelvin mode spectroscopy of a Bose-Einstein condensate in the presence of a vortex line[J]. Physical Review Letters, 2003, 90(18): 180401.
- [56] Morgan S A, Rusch M, Hutchinson D A W, et al. Quantitative test of thermal field theory for Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review Letters, 2003, 91(25): 250403.
- [57] Giorgini S. Damping in dilute Bose gases: a mean-field approach[J]. Physical Review A, 1998, 57(4): 2949-2957.
- [58] Giorgini S. Collisionless dynamics of dilute Bose gases: role of quantum and thermal fluctuations[J]. Physical Review A, 2000, 61(6): 063615.
- [59] Ma X D, Ma Y L, Huang G X. Analytical calculations on Landau damping of collective modes in anisotropic Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review A, 2007, 75(1): 013628.
- [60] Ma X D, Zhou Y, Ma Y L, et al. Landau damping of collective modes in a harmonically trapped Bose-Einstein condensate[J]. Chinese Physics, 2006, 15(8): 1871-1878.
- [61] Ma X D, Ma Y L, Huang G X. Landau damping of collective modes in a disc-shaped Bose-Einstein condensate[J]. Chinese Physics Letters, 2007, 24(3): 616-619.
- [62] Ma X D, Yang Z J, Lu J Z, et al. Landau damping of collective mode in a quasi-two-dimensional repulsive Bose-Einstein condensate[J]. Chinese Physics B, 2011, 20(7): 070307.
- [63] Yang Z J, Chai Z L, Li C X, et al. Landau damping of collective mode in a quasi-one-dimensional repulsive Bose-Einstein condensate[J]. Communications in Theoretical Physics, 2012, 57(5): 789-794.
- [64] 柴兆亮, 周昱, 马晓栋. 雪茄形铷原子玻色-爱因斯坦凝聚中单极子模的朗道阻尼和频移[J]. 物理学报, 2013, 62(13): 130307.
- Chai Z L, Zhou Y, Ma X D. Landau damping and frequency-shift of monopole mode in an elongated-rubidium Bose-Einstein condensate[J]. Acta Physica Sinica, 2013, 62(13): 130307.
- [65] Rahmut A, Peng S Q, Ma X D. Landau damping and frequency-shift of a quadrupole mode in a disc-shaped rubidium Bose-Einstein condensate[J]. Chinese Physics B, 2014, 23(9): 090311.
- [66] 彭胜强, 阿孜古丽·热合木提, 马晓栋. 球对称铷原子玻色-爱因斯坦凝聚中单极子模的朗道阻尼和频移[J]. 原子与分子物理学报, 2015, 32(6): 1018-1026.
- Peng S Q, Rahmut A, Ma X D. Landau damping and frequency-shift of a monopole mode in a spherical rubidium Bose-Einstein condensate[J]. Journal of Atomic and Molecular Physics, 2015, 32(6): 1018-1026.
- [67] 赵军亚, 李晨旭, 马晓栋. 碟形玻色-爱因斯坦凝聚体中(0, 0, 2)剪刀模的朗道阻尼和频移[J]. 物理学报, 2019,

- 68(23): 230304.  
Zhao J Y, Li C X, Ma X D. Landau damping and frequency-shift of (0, 0, 2) scissors mode in a disc-shaped Bose-Einstein condensate[J]. *Acta Physica Sinica*, 2019, 68(23): 230304.
- [68] Bhattacharjee A B. Damping in two-component Bose gas [J]. *Modern Physics Letters B*, 2014, 28(4): 1450029.
- [69] 杨丁, 马晓栋. 两分量 BEC 中集体激发阻尼的 HFB 平均场理论公式[J]. *新疆师范大学学报(自然科学版)*, 2020, 39(2): 17-28.  
Yang D, Ma X D. Theoretical formula of HFB mean field for collective excitation damping in two-component BEC[J]. *Journal of Xinjiang Normal University (Natural Sciences Edition)*, 2020, 39(2): 17-28.
- [70] Moniri S M, Yavari H, Darsheshdar E. Effect of long-range  $1/r$  interactions on the Landau damping in a Bose-Fermi mixture[J]. *The European Physical Journal Plus*, 2016, 131(4): 122-135.
- [71] Moniri S M, Yavari H, Darsheshdar E. Landau damping in a dipolar Bose-Fermi mixture in the Bose-Einstein condensation (BEC) limit[J]. *Chinese Physics B*, 2016, 25(12): 126701.
- [72] Hohenberg P C, Martin P C. Microscopic theory of superfluid helium[J]. *Annals of Physics*, 1965, 34(2): 291-359.
- [73] Andreev A F, Khalatnikov I M. Sound in liquid helium II near absolute zero[J]. *Soviet Physics JETP*, 1963, 17(6): 1384-1386.
- [74] Lifshitz E M, Pitaevskii L P. *Physical kinetics*[M]. Oxford: Pergamon Press, 1998.