

## 基于稳相法产生无衍射地毯光束

弓宁<sup>1</sup>, 杨婧羽<sup>1</sup>, 丁瑶<sup>2</sup>, 施逸乐<sup>1</sup>, 陈日坚<sup>1</sup>, 任志君<sup>1\*</sup><sup>1</sup>浙江师范大学浙江省光信息检测与显示技术研究重点实验室, 浙江 金华 321004;<sup>2</sup>华东师范大学精密光谱科学与技术国家重点实验室, 上海 200062

**摘要** 基于稳相法原理, 构建一种新型无衍射地毯光束。首先, 运用稳相法研究径向光栅经过轴锥镜后的菲涅耳衍射, 在稳相近似条件下, 从理论上获得了一种具有无衍射传输特性的地毯光束。然后, 采用振幅型空间光调制器加载不同参数的径向光栅, 并在空间光调制器后安装相位调制元件(轴锥镜), 经过菲涅耳衍射后, 可以在轴锥镜后的一定传输距离内得到一种新的无衍射地毯光束。最终发现, 实验结果与理论模拟结果吻合得很好。

**关键词** 衍射; 无衍射地毯光束; 稳相法; 径向光栅; 轴锥镜

中图分类号 O436

文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS202242.1605001

## Generation of Diffraction-Free Carpet Beams Based on Stationary Phase Method

Gong Ning<sup>1</sup>, Yang Jingyu<sup>1</sup>, Ding Yao<sup>2</sup>, Shi Yile<sup>1</sup>, Chen Rijian<sup>1</sup>, Ren Zhijun<sup>1\*</sup><sup>1</sup>Key Laboratory of Researching Optical Information Detecting and Display Technology in Zhejiang Province, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, Zhejiang, China;<sup>2</sup>State Key Laboratory of Precision Spectroscopy, East China Normal University, Shanghai 200062, China

**Abstract** On the basis of the stationary phase method, a new diffraction-free carpet beam is generated. Specifically, the Fresnel diffraction of radial gratings after passing through the axicon is investigated by the stationary phase method, and under the approximate conditions of the stationary phase, a kind of carpet beams with the diffraction-free transmission characteristics is theoretically obtained. Then, the amplitude-based spatial light modulator (SLM) is adopted to load the radial gratings with different parameters, and the phase modulation element (axicon) is installed behind SLM. Upon the Fresnel diffraction, a new family of instances of diffraction-free carpet beams can be generated within a certain transmission range behind the axicon. Finally, it is found that the experimental results are in good agreement with the theoretical simulation results.

**Key words** diffraction; diffraction-free carpet beams; stationary phase method; radial grating; axicon

## 1 引言

1836年, Talbot<sup>[1]</sup>用一束光穿过光栅, 在近场距离中观察到了一种奇妙的衍射现象, 即自成像是指平行光垂直通过周期光栅时, 不需要使用任何成像系统, 但在光栅后一定传播距离处的平面上仍能观察到光栅像<sup>[1-3]</sup>。基于 Talbot 效应, Rasouli 等<sup>[4-5]</sup>在研究了二维周期结构的近场和远场的基础上, 利用径向周期光栅的平面波衍射, 构建和产生了几种地毯光束<sup>[6-10]</sup>, 这些地毯光束被认为是麦克斯韦方程在圆柱坐标系中的一类直接解, 这类解由半

整数阶贝塞尔函数的线性组合确定, 其表达式详见文献<sup>[8]</sup>。地毯光束有着特殊的强度分布, 可以由不同光栅辐条值和相位幅值进行调制, 生成可谐调二维光学晶格结构。值得注意的是, 虽然基于径向光栅衍射产生的地毯光束在传输过程中形状不变, 但是它们在传输过程中, 光束分布会缓慢扩张, 也就是说过去产生的地毯光束并非完全无衍射光束, 只能将其视为一类形状不变的光束<sup>[6-10]</sup>。

贝塞尔光束是第一种有重要实用价值的无衍射光束<sup>[11-15]</sup>, 可用稳相法来产生经典的无衍射贝塞尔光束<sup>[16-18]</sup>。本文采用余弦径向光栅, 运用稳相法原理, 从

收稿日期: 2022-01-24; 修回日期: 2022-02-24; 录用日期: 2022-03-10

基金项目: 国家自然科学基金(11974314)

通信作者: \*renzhijun@zjnu.cn

理论上构建了一种具有无衍射传输特性的地毯光束。然后,采用振幅型空间光调制器(SLM)加载不同参数的径向光栅,SLM后安装相位调制元件——轴锥镜,经菲涅耳衍射后,在轴锥镜后的一定传输距离内产生了一种新的具有无衍射传输特性的地毯光束。本研究解决了经典地毯光束在传输过程中逐渐扩张的问题,

进而使得地毯光束具有了无衍射传输的特性。无衍射地毯光束的引入拓展了地毯光束的类型,并有望在光学晶格的构造等研究领域发挥新的作用。

## 2 基本原理

极坐标系下的菲涅耳衍射公式可写为

$$U(\rho, \theta, z) = \frac{-i}{\lambda z} \exp(ikz) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} U_0(r, \varphi) \times \exp\left[\frac{ik}{2z}(r^2 + \rho^2)\right] \times \exp\left[-\frac{ik}{z}\rho r \cos(\varphi - \theta)\right] r dr d\varphi, \quad (1)$$

式中: $\lambda$ 是光束的波长; $k=2\pi/\lambda$ 是波数; $U_0(r, \varphi)$ 是由振幅和相位调制的初始光场( $z=0$ )的复振幅分布,其中 $r$ 是场源的径向距离, $\varphi$ 是场源的方位角; $U(\rho, \theta, z)$ 是自由空间光场传输距离 $z$ 处的复振幅分布,其中 $\rho$ 是观察面场的径向距离, $\theta$ 是观察面场的方位角。

为构建无衍射地毯光束,与过去产生的地毯光束类似,本文也采用二维径向周期结构——径向光栅。由于锥镜是产生无衍射贝塞尔光束的一种重要光学元件<sup>[16-18]</sup>,因此也引入了相位调制元件——轴锥镜。当准直平行光入射到这两个光学元件上时,初始光场可写成

$$U_0(r, \varphi) = E_0 A(\varphi) T(r), \quad (2)$$

式中: $E_0$ 为准直平行光的振幅; $A(\varphi)$ 为径向光栅的振幅相位分布; $T(r)$ 为轴锥镜的相位函数,其表达式为

$$T(r) = \begin{cases} \exp[-ik(n-1)\theta_0 r], & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (3)$$

式中: $n$ 为轴面折射率; $\theta_0$ 为轴锥镜的锥角,通常角度较小; $R$ 是轴锥镜入瞳孔径的半径。径向光栅的振幅相位分布 $A(\varphi)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数,可以展开成傅里叶级数的形式,即

$$A(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(im\varphi), \quad (4)$$

式中: $c_m$ 是第 $m$ 个傅里叶级数系数。将式(3)和式(4)代入式(2)中,再将所得表达式代入式(1)中,则有

$$U(\rho, \theta, z) = \frac{-i}{\lambda z} \exp(ikz) \exp\left(\frac{ik}{2z}\rho^2\right) \int_0^\infty r dr \exp\left\{ik\left[\frac{r^2}{2z} - (n-1)\theta_0 r\right]\right\} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(im\varphi) \exp\left[-\frac{ik}{z}\rho r \cos(\varphi - \theta)\right]. \quad (5)$$

根据 Jacobi-Anger 展开<sup>[19]</sup>

$$\exp(iz \cos \theta) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} i^q J_q(z) \exp(iq\theta), \quad (6)$$

式中: $J_q(\cdot)$ 是第一类 $q$ 阶贝塞尔函数。同时,将

$$\exp\left[-\frac{ik}{z}\rho r \cos(\varphi - \theta)\right] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} (-i)^q J_q\left(\frac{k}{z}\rho r\right) \exp[-iq(\varphi - \theta)] \quad (7)$$

代入式(5)中,并利用

$$\int_0^{2\pi} \exp[i(m-q)\varphi] d\varphi = 2\pi \delta_{m,q}, \quad (8)$$

式中: $\delta_{m,q}$ 为克罗内克 $\delta$ 函数。最终,可以得到

$$U(\rho, \theta, z) = \frac{-ik}{z} \exp(ikz) \exp\left(\frac{ik}{2z}\rho^2\right) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (-i)^m \exp(im\theta) \int_0^R r dr J_q\left(\frac{k}{z}\rho r\right) \exp\left\{ik\left[\frac{r^2}{2z} - (n-1)\theta_0 r\right]\right\}. \quad (9)$$

式(9)是一个复杂的积分表达式,很难直接得到其解析式。利用稳相法原理可以方便地近似求解 $k \rightarrow \infty$ 时 $\int g(r) \exp[ikf(r)] dr$ 形式的积分方程,缓变函数 $f(r)$ 在快速震荡相位因子 $k$ 的调制下对于自变量(除稳相点 $r_0$ 邻域外)积分的贡献可以忽略,相应的解的表达式<sup>[16-18, 20]</sup>为

$$\int g(r) \exp[ikf(r)] dr \approx \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{1/2} \frac{\exp(\pm i\pi/4)}{|f''(r_0)|^{1/2}} g(r_0) \exp[ikf(r_0)], \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \infty, \quad (10)$$

式中: $f''(r_0)$ 为 $f(r_0)$ 的二阶导数。

对于式(9),设 $f(r) = r^2/(2z) - (n-1)\theta_0 r$ 且

$g(r) = J_q(k\rho r/z)r$ 。通过求 $f(r)$ 的导数,基于 $f'(r)|_{r=r_0} = r_0/z - (n-1)\theta_0 = 0$ ,可以得到稳相点为

$r_0 = (n-1)\theta_0 z_0$ 。

当  $r = r_0 \in (0, R)$  时, 有最大无衍射距离  $z_{\max} = R/[(n-1)\theta_0]$ , 在  $0 < z < z_{\max}$  处的光场复振幅分布为

$$U(\rho, \theta, z) \approx \frac{-ik}{z} \exp(ikz) \exp\left(\frac{ik}{2z} \rho^2\right) \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} c_q (-i)^q \exp(iq\theta) \times \sqrt{\lambda z} J_q[k\rho(n-1)\theta_0] (n-1)\theta_0 z \times \exp\left[i\left(-\frac{k(n-1)^2 \theta_0^2 z}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (11)$$

式(11)为周期径向光栅在稳相法下的一般衍射表达式。具有相同径向波数的无衍射贝塞尔光束的叠加仍然是无衍射光束, 而对于以往的地毯光束, 决定光束分布的每一阶次的贝塞尔函数的因变量中均出现表示传输距离的参数  $z$ <sup>[6-7]</sup>, 也就是说, 叠加产生地毯光束的

不同阶次的径向波数不再是常数。因此, 经典的地毯光束不是无衍射光束。然而, 利用周期径向光栅和轴锥镜可以构造出一种具有无衍射传输特性的地毯光束。在一些科学实验中, 激光光束的无衍射特性尤为重要。任何新的无衍射光束的诞生都可以发挥新的作用。本团队认为无衍射地毯光束的产生具有重要意义, 有望拓展新的应用领域。

选取一个具有余弦传输函数的振幅径向光栅为例以产生无衍射地毯光束, 此时  $A(\varphi)$  的表达式<sup>[6]</sup>为

$$A(\varphi) = \frac{1}{2} [1 + \cos(m\varphi)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [\exp(im\varphi) + \exp(-im\varphi)] \quad (12)$$

通过比较式(4)和式(12), 可以得到式(4)中  $c_0 = 1/2$ ,  $c_m = c_{-m} = 1/4$ , 其他系数为零。将系数代入式(11)中, 有

$$U(\rho, \theta, z) \approx \frac{-ik_r \sqrt{\lambda z}}{2} \exp(ikz) \exp\left(\frac{ik}{2z} \rho^2\right) \exp\left[i\left(-\frac{k(n-1)^2 \theta_0^2 z}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \times [J_0(k_r \rho) + (-i)^m \cos(m\theta) J_m(k_r \rho)], \quad (13)$$

式中:  $k_r = k(n-1)\theta_0$  为轴向波数。在推导式(13)时, 利用了公式  $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ 。

根据光场的强度分布表达式  $I(\rho, \theta, z) = U(\rho, \theta, z) \cdot U^*(\rho, \theta, z)$ , 其中  $U^*(\rho, \theta, z)$  为  $U(\rho, \theta, z)$

的共轭, 模拟了不同阶次  $m$  的无衍射地毯光束, 如图 1 所示。值得指出的是, 当  $m=0$  时, 地毯光束退化为经典贝塞尔光束。因此, 无衍射零阶贝塞尔光束也可被视为阶次为 0 的无衍射地毯光束。

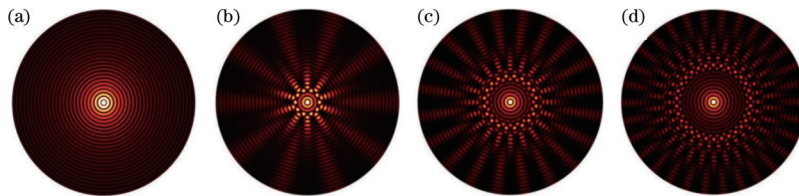


图 1 不同  $m$  下无衍射地毯光束模拟图。(a)  $m=0$ ; (b)  $m=10$ ; (c)  $m=20$ ; (d)  $m=30$

Fig. 1 Simulation diagram of radial diffraction-free carpet beams under different  $m$ . (a)  $m=0$ ; (b)  $m=10$ ; (c)  $m=20$ ; (d)  $m=30$

### 3 实 验

为验证稳相法能够产生具有无衍射特性的地毯光束, 构建了图 2 所示的实验系统。将波长为 632.8 nm 的 He-Ne 激光准直扩束为直径约为 5 cm 的准平行光束, 入射到振幅型 SLM 上 (GC-SLM-T-XGA, 像素尺寸为  $22 \mu\text{m}$ , 像素数为  $1080 \times 768$ )。SLM 位于扩束透镜的后焦面处, 轴锥镜 (底角为  $1^\circ$ , 入瞳直径为 2.5 cm) 作为相位调制元件紧贴在 SLM 后。透射后的光束经菲涅耳衍射后产生的无衍射地毯光束由科学电荷耦合器件 (CCD) 相机 (Microvision 130FC, 像素单元尺寸为  $5.4 \mu\text{m}$ ) 记录。由于 SLM 的每一个像素单元都是独立的液晶盒, 液晶是偏振调制元件。因此, 在 SLM 前后都加载偏振片可消除寄生光, 进而可有效改善地毯光束质量。

振幅型 SLM 可以灵活地加载空间振幅调制模式。将图 3 所示的不同辐条数  $m$  的余弦振幅径向光栅加载到计算机控制的振幅型 SLM 上, 在轴锥镜后的  $z=80 \text{ cm}$  平面上产生的地毯光束如图 4 所示, 图 4 和图 5 中的记录图的边长是 2 mm。

图 3(a) 是一个透明的圆面, 这意味着入射的平行光只被轴锥镜调制, 而没受到径向光栅结构的影响, 这种情况下产生的零阶贝塞尔光束与文献 [16-18] 中相同。因此, 也可以将经典贝塞尔光束看作是阶次为  $m=0$  的地毯光束。无衍射零阶贝塞尔光束只是无衍射径向地毯光束的特例。

为研究基于稳相法原理, 利用本文的实验方案产生的地毯光束确实具有无衍射传输特性, 以阶次  $m=20$  的地毯光束为例, 利用 CCD 记录了在  $z < z_{\max} = 1050 \text{ mm}$  范围内不同传播距离下的强度分布, 如图 5

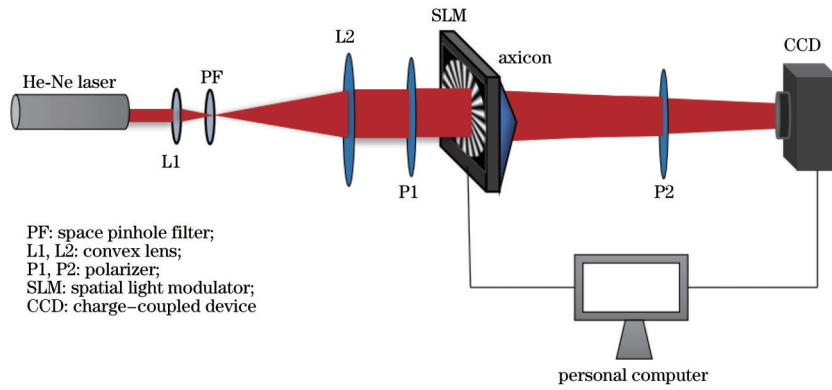


图 2 基于稳相法产生无衍射地毯光束实验系统图

Fig. 2 Experimental system diagram of radial diffraction-free carpet beam generation based on stationary phase principle

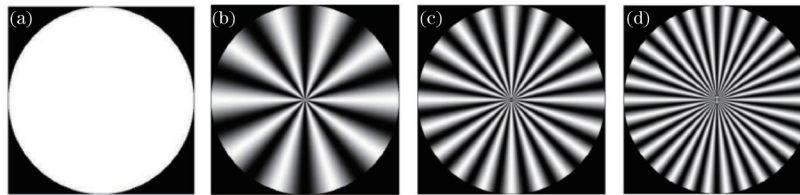


图 3 不同  $m$  下的径向振幅光栅。(a)  $m = 0$ ; (b)  $m = 10$ ; (c)  $m = 20$ ; (d)  $m = 30$

Fig. 3 Radial amplitude grating with different  $m$ . (a)  $m = 0$ ; (b)  $m = 10$ ; (c)  $m = 20$ ; (d)  $m = 30$

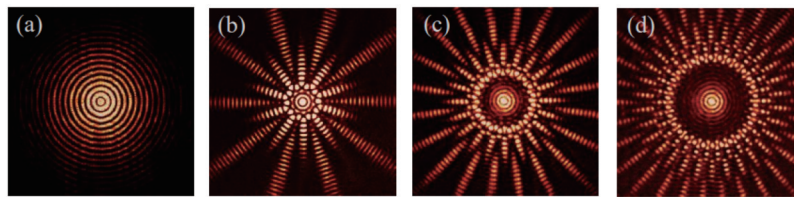


图 4 不同  $m$  下无衍射地毯光束实验记录图。(a)  $m = 0$ ; (b)  $m = 10$ ; (c)  $m = 20$ ; (d)  $m = 30$

Fig. 4 Experimental recorded graph of radial diffraction-free carpet beams under different  $m$ . (a)  $m = 0$ ; (b)  $m = 10$ ; (c)  $m = 20$ ; (d)  $m = 30$

所示。根据实际的实验参数,也模拟了阶次为  $m = 20$  的地毯光束对应于实验采集距离处的光场分布,如图 6 所示。从模拟结果不难看出,在地毯光束传输过程中,除了光强改变,光束形状不发生变化,这是典型的无衍射光束具有的传输特征。对比图 5 和图 6 发现,实验结果与理论模拟基本一致,说明利用稳相法构建的地毯光束具有无衍射的传输特性。此外,测量实验结

果图 5 和模拟结果图 6 不同传输距离处地毯光束环形带的半径发现,环形带在传输过程中半径不变。然而,经典地毯光束的环形带半径正比于  $\sqrt{z}$ ,即环形带半径随传输距离的增加而增大<sup>[6-8,10]</sup>。这一可量化的检测结果也说明本文产生的地毯光束的分布在传输过程中是免于空间扩散的,因而这是一种具有无衍射传输特性的地毯光束。

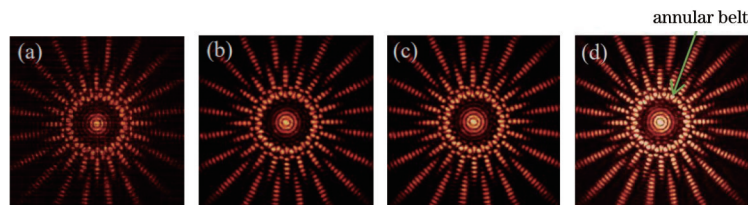


图 5  $m = 20$  的无衍射地毯光束在轴锥镜后不同距离处的实验记录图。(a)  $z = 50$  cm; (b)  $z = 60$  cm; (c)  $z = 70$  cm; (d)  $z = 80$  cm

(a)  $z = 50$  cm; (b)  $z = 60$  cm; (c)  $z = 70$  cm; (d)  $z = 80$  cm

## 4 结 论

基于稳相原理,构造并生成了一类无衍射地毯光

束。首先,通过稳相原理从理论上给出了构建无衍射地毯光束的产生机理。然后,利用振幅型空间光调制器加载具有余弦传输函数的光栅,并在空间光调制器

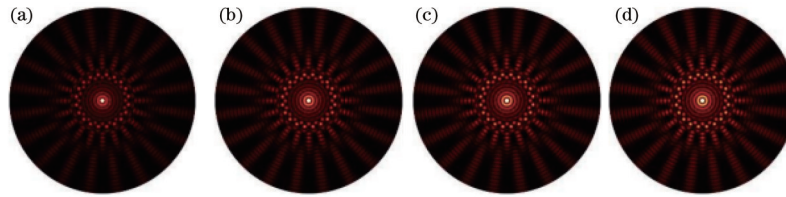


图 6 锥镜后不同距离处无衍射地毯光束的模拟图。(a)  $z = 50$  cm; (b)  $z = 60$  cm; (c)  $z = 70$  cm; (d)  $z = 80$  cm

Fig. 6 Simulation diagram of radial diffraction-free carpet beams at different propagation distances after axicon. (a)  $z = 50$  cm; (b)  $z = 60$  cm; (c)  $z = 70$  cm; (d)  $z = 80$  cm

后安装轴锥镜,轴锥镜后产生了一种无衍射地毯光束。实验结果与理论预期基本一致,证实了稳相原理是一种产生无衍射地毯光束的有效手段。

#### 参 考 文 献

- [1] Talbot H F. LXXVI. facts relating to optical science. No. IV[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1836, 9(56): 401-407.
- [2] Wen J M, Zhang Y, Xiao M. The Talbot effect: recent advances in classical optics, nonlinear optics, and quantum optics[J]. Advances in Optics and Photonics, 2013, 5(1): 83-130.
- [3] Zhan K Y, Zhang W Q, Jiao R Y, et al. Period-reversal accelerating self-imaging and multi-beams interference based on accelerating beams in parabolic optical potentials [J]. Optics Express, 2020, 28(14): 20007-20015.
- [4] Rasouli S, Hebri D, Khazaei A M. Investigation of various behaviors of near- and far-field diffractions from multiplicatively separable structures in the  $x$  and  $y$  directions, and a detailed study of the near-field diffraction patterns of 2D multiplicatively separable periodic structures using the contrast variation method[J]. Journal of Optics, 2017, 19(9): 095601.
- [5] Rasouli S, Hebri D. Contrast enhanced quarter-Talbot images[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2017, 34(12): 2145-2156.
- [6] Rasouli S, Khazaei A M, Hebri D. Talbot carpet at the transverse plane produced in the diffraction of plane wave from amplitude radial gratings[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2018, 35(1): 55-64.
- [7] Rasouli S, Khazaei A M, Hebri D. Radial carpet beams: a class of nondiffracting, accelerating, and self-healing beams[J]. Physical Review A, 2018, 97(3): 033844.
- [8] Hebri D, Rasouli S. Combined half-integer Bessel-like beams: a set of solutions of the wave equation[J]. Physical Review A, 2018, 98(4): 043826.
- [9] Hebri D, Rasouli S, Yeganeh M. Intensity-based measuring of the topological charge alteration by the diffraction of vortex beams from amplitude sinusoidal radial gratings[J]. Journal of the Optical Society of America B, 2018, 35(4): 724-730.
- [10] Rasouli S, Hamzeloui S, Hebri D. Colorful radial Talbot carpet at the transverse plane[J]. Optics Express, 2019, 27(13): 17435-17448.
- [11] 谢家俊, 唐诗瑶, 陈永强, 等. 贝塞尔光束在生物组织中的自重建特性研究 [J]. 中国激光, 2022, 49(5): 0507009.
- Xie J J, Tang S Y, Chen Y Q, et al. Self-reconstruction characteristics of Bessel beam in biological tissue[J]. Chinese Journal of Lasers, 2022, 49(5): 0507009.
- [12] 李平, 张澍霖, 汪莎, 等. 通过优化损耗点镜产生高效率的涡旋光束[J]. 中国激光, 2020, 47(5): 0501005.
- Li P, Zhang S L, Wang S, et al. High efficiency vortex beam generation by optimization of defect-spot mirror[J]. Chinese Journal of Lasers, 2020, 47(5): 0501005.
- [13] 秦燕亮, 黄轶, 涂谱, 等. 激光直写制备完美涡旋光束微波带片[J]. 中国激光, 2020, 47(7): 0702003.
- Qin Y L, Huang Y, Tu P, et al. Fabrication of perfect vortex beam microplate using direct laser writing[J]. Chinese Journal of Lasers, 2020, 47(7): 0702003.
- [14] 韦宏艳, 闫玟霖, 贾鹏, 等. 聚焦贝塞尔光束在大气湍流中的螺旋相位谱 [J]. 光学学报, 2020, 40(24): 2401001.
- Wei H Y, Yan J L, Jia P, et al. Spiral phase spectrum of focused Bessel beams in atmospheric turbulence channel [J]. Acta Optica Sinica, 2020, 40(24): 2401001.
- [15] 郭姣艳, 李文宇, 孙然, 等. 基于双箭头超表面宽带太赫兹涡旋光束的产生 [J]. 中国激光, 2021, 48(20): 2014003.
- Guo J Y, Li W Y, Sun R, et al. Generation of broadband terahertz vortex beam based on double-arrow metasurface[J]. Chinese Journal of Lasers, 2021, 48(20): 2014003.
- [16] Friberg A T. Stationary-phase analysis of generalized axicons[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1996, 13(4): 743-750.
- [17] Dudutis J, GeČys P, RaČiukaitis G. Non-ideal axicon-generated Bessel beam application for intra-volume glass modification[J]. Optics Express, 2016, 24(25): 28433-28443.
- [18] Paterson C, Smith R. Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms [J]. Optics Communications, 1996, 124(1/2): 121-130.
- [19] Arfken G B. Mathematical methods for physicists [M]. 3rd ed. San Diego: Academic Press, 1985.
- [20] Stamnes J J. Waves in focal regions: propagation, diffraction and focusing of light, sound and water waves [M]. New York: Taylor & Francis Group, 1986.