

分数系统中势垒对啁啾高斯光束的影响

房立芝, 宋丽军*, 陈胜杰

山西大学物理电子工程学院, 山西 太原 030006

摘要 基于包含势垒的变系数分数薛定谔方程, 采用数值模拟和解析相结合的方法研究了啁啾参量和势垒函数对高斯光束传输动力学的影响。结果表明: 线性啁啾会削弱分裂后其中一束子光束的强度, 而二次啁啾会改变光束的呼吸幅度和宽度, 使得光束不再严格按照正弦规律振荡, 最终形成了一大一小的呼吸轨迹; 引入势垒作用后, 势垒位置处的光束由于反射与透射现象而发生变形; 反射与透射的光束仍然会受到变系数的调制, 并在势垒位置处叠加后再次传输。在势垒深度合适的情况下, 光束遇到势垒后会被全部反射, 光束的全部能量被束缚在两势垒之间, 从而可在分数系统中通过势垒和啁啾参数实现对光束传输的调控与管理。

关键词 非线性光学; 分数薛定谔方程; 啁啾; 势垒; 高斯光束

中图分类号 O437 文献标志码 A

DOI: 10.3788/AOS202242.1319001

Influence of Potential Barriers on Chirped Gaussian Beams in Fractional System

Fang Lizhi, Song Lijun*, Chen Shengjie

College of Physics and Electronic Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, Shanxi, China

Abstract On the basis of the variable-coefficient fractional Schrödinger equation with potential barriers, we study the influence of chirp parameters and potential barrier functions on propagation dynamics of Gaussian beams by the combination of the numerical simulation and analytical method. The results reveal that the linear chirp will weaken the intensity of a sub-beam after splitting, while the quadratic chirp will change the respiratory amplitude and width of beams, and thus the beams no longer oscillate strictly according to the sinusoidal law, which leads to a large and a small respiratory trajectories eventually. After the introduction of the barrier effect, the beams at the barriers deform due to reflection and transmission. The reflected and transmitted beams are still modulated by the diffraction coefficient and are superimposed at the barriers before transmitting again. Under an appropriate barrier depth, the beams are completely reflected when they encounter the barriers, and all the energy of the beams is trapped between the two barriers. Thus, in the fractional system, the regulation and management of beam transmission can be achieved through potential barriers and chirp parameters.

Key words nonlinear optics; fractional Schrödinger equation; chirp; potential barrier; Gaussian beam

1 引言

近年来, 分数效应在物理学领域产生的新奇现象(如分数量子霍尔效应^[1]、分数 Talbot 效应^[2]、约瑟夫森效应^[3]等)以及分数效应的大量应用引起了国内外对此领域的广泛关注^[4-5]。光在不同介质中传输的理论模型可以由标准的线性或非线性的薛定谔方程来描述^[6], 因此, 基于分数效应和标准薛定谔方程, Laskin^[7]提出了分数薛定谔方程(FSE), 该方程是用 Lévy 轨迹代替 Feynman 路径积分中的布朗轨迹得到的。标准的薛定谔方程具有二阶空间导数, 而分数

薛定谔方程将原来的二阶导用 Lévy 指数 α 代替^[8-9]。2015 年, 基于非球面光学腔中的横向光动力学, Longhi^[10]提出了分数薛定谔方程在光学中的实现方案, 为分数阶模型的实验研究开创了先河, 也激发了人们对分数薛定谔方程中光束传输特性的研究兴趣。在线性区域, Zhang 等^[11]研究了分数薛定谔方程中高斯光束的传输动力学, 发现了光束的分裂和无衍射特性, 以及 Talbot 效应。在没有简谐波势的情况下, 啁啾高斯光束分裂成两个无衍射光束; 而在谐波势场中, 高斯光束在实空间的传播轨迹呈锯齿状, 与动量空间中的调制非简谐振荡相对应^[12]。在周期

收稿日期: 2021-11-23; 修回日期: 2021-12-23; 录用日期: 2022-01-04

通信作者: *songlij@sxu.edu.cn

性 PT 对称势下,线性和对称带结构会导致输入光束的无衍射和锥形衍射传输^[13]。在非线性区域中,超高斯光束在传输过程中会形成稳定的呼吸孤子或孤子对^[14]。

此外,Zhang 等^[15]研究了非线性分数薛定谔方程中的时空调制不稳定性以及 Lévy 指数对调制不稳定性带宽和增益的影响;在数学领域,非线性分数薛定谔方程的孤波解也得到了广泛关注^[16-18]。为了实现光束的传输管理,有人将双边势垒引入分数薛定谔方程,结果发现产生了光束的反射及周期自成像现象^[19]。近几年,研究人员还对具有线性势、PT 对称势、谐振势等外部势下的分数薛定谔方程进行了探索,其解析解的严格推导和数值讨论也相继被报道^[20-24]。随着这一研究领域的不断开发与深入,更多有趣的结果被陆续报道,比如:共振模转换和 Rabi 振荡^[25]、光学 Bloch 振荡和光学 Zener 隧道效应^[26],以及各种势场中的分数维孤子^[27-35]、安德森非局域现象^[36]、艾里光束的相互作用^[37]等。近年来,具有周期调制的变系数分数薛定谔方程开辟了一个新的研究方向,相关研究表明:光束的演化呈现周期性振荡行为,啁啾的存在会抑制光束的分裂行为,并会改变光束的传输特性^[38]。然而,有关势垒作用下分数薛定谔方程中高斯光束的动力学研究还鲜见报道。鉴于此,本文基于包含外部势垒的变系数分数薛定谔方程,采用分步傅里叶法详细讨论啁啾参数和势垒函数对高斯光束传输特性的影响。通过调节一次啁啾、二次啁啾和势垒深度等参数,研究了势垒作用下啁啾高斯光束的传输动力学特性,并从中获得了势垒作用下高斯光束的传输规律,从而为光束的传输管理及控制提供一定的理论参考。

2 理论模型

考虑外部势垒作用时,变系数分数薛定谔方程可以写成

$$i \frac{\partial}{\partial z} \varphi(x, z) = \frac{1}{2} D(z) \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{\alpha/2} \varphi(x, z) + V(x) \varphi(x, z), \quad (1)$$

式中: x 和 z 分别表示横向坐标与传输距离; $\varphi(x, z)$ 为光束的无量纲慢变包络; $\alpha(1 < \alpha \leq 2)$ 为 Lévy 指数; $D(z)$ 为变系数,它是传输距离 z 的函数, $D(z) = \cos(\Omega z)$,其中 Ω 为调制频率; $V(x)$ 为势函数。当 $\alpha = 2$ 并且 $D(z) = 1$ 时,式(1)还原为标准的薛定谔方程。本文中的势函数 $V(x)$ 采用两种分段阶跃函数的形式,即

$$V_1(x) = \begin{cases} V_0, & x > L_D \\ 0, & x < L_D \end{cases}, \quad (2)$$

$$V_2(x) = \begin{cases} V_0, & |x| > L_D \\ 0, & |x| < L_D \end{cases}, \quad (3)$$

式中: $V_1(x)$ 为右侧单边势垒; $V_2(x)$ 为对称双边势垒; V_0 表示势垒深度; L_D 表示势垒所在位置。

当 $V(x) = 0$ 时,式(1)的解析表达式^[38]可以表示为

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\varphi(k, 0) \cdot \exp \left[ikx - \frac{i}{2} |k|^\alpha \int_0^z D(\zeta) d\zeta \right] dk, \quad (4)$$

式中: $\mathcal{F}\varphi(k, 0)$ 是初始输入光束的傅里叶变换; k 是空间频率。因此,只要给定初始输入,就可以根据式(4)得到式(1)的解析表达式。

假设初始入射的啁啾高斯光束可以写成

$$\varphi(x, 0) = \exp(-\sigma x^2 + iCx + i\beta x^2), \quad (5)$$

式中: σ 为光束的宽度参数,与光束宽度成反比; C 表示线性啁啾; β 表示二次啁啾。对初始输入光束进行傅里叶变换,可以得到

$$\mathcal{F}\varphi(k, 0) = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma - i\beta}} \exp \left[\frac{-(k - C)^2}{4(\sigma - i\beta)} \right]. \quad (6)$$

把式(6)代入式(4),可以得到

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma - i\beta}} \exp \left[\frac{-(k - C)^2}{4(\sigma - i\beta)} \right] \exp \left(ikx - \frac{i}{2} |k|^\alpha \int_0^z D(\zeta) d\zeta \right) dk. \quad (7)$$

当不考虑势且 Lévy 指数 $\alpha = 1$ 时,式(7)简化成

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{\sigma - i\beta}} \left\{ \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ \frac{-(k - C)^2}{4(\sigma - i\beta)} + ik \left[x + \frac{1}{2} \int_0^z D(\zeta) d\zeta \right] \right\} dk + \int_0^{+\infty} \exp \left\{ \frac{-(k - C)^2}{4(\sigma - i\beta)} + ik \left[x - \frac{1}{2} \int_0^z D(\zeta) d\zeta \right] \right\} dk \right\}. \quad (8)$$

接下来,采用分步傅里叶方法,分别研究啁啾高斯光束在单边势垒和双边势垒作用下的分数系统中的传输动力学特性。

3 结果和讨论

3.1 单边势垒对高斯光束动力学的影响

当 $\alpha = 1, \Omega = 0.1, \sigma = 0.25, \beta = 0$ 时, 单边势垒对只包含线性啁啾 C 的高斯光束的影响如图 1 所示, 图中给出了线性啁啾 C 分别为 0、2、-2 时, 位于 $L_D = 4$ 处且势垒深度 V_0 分别为 0、10、40、80 的单边势垒对高斯光束演化的影响。首先分析线性啁啾为 0 的情况。当无势垒作用时, 高斯光束会分裂为两束, 两子光束沿传输方向周期地排斥和吸引, 光束的演化呈正弦振荡轨迹, 振荡轨迹可由轨迹方程 $x = x_0 \pm \sin(\Omega z) / (2\Omega)$ 计算得出^[38]。当势垒深度不为 0 且光束在 $L_D = 4$ 处遇到势垒时, 会同时产生反射和透射现象。经过反射与透射的光束仍然会受到变系数 $D(z)$ 的调制, 光束的传输轨迹不再关于 $x = 0$ 轴对称。随着势垒深度 V_0 增大, 势垒的阻碍作用增强, 光束的反射得到增强, 透射

变弱, 直到势垒深度 $V_0 = 80$ 时, 发生了光束的全反射现象。

接下来分析线性啁啾 $C = 2$ 时的情况。此时, 线性啁啾的存在会抑制分裂后的一侧光束, 同时使另一侧光束的强度增大, 如图 1(a2) 所示。光束在 $L_D = 4$ 处遇到势垒时, 同样发生了反射和透射, 此时光束的轨迹关于势垒轴是对称的, 也称作光束的周期自成像, 如图 1(b2) 和图 1(c2) 所示。这是因为透射光与反射光都受到了变系数 $D(z)$ 的调制, 以方向相反的传输轨迹 $x = x_0 \pm \sin(\Omega z) / (2\Omega)$ 进行演化^[38], 并在势垒位置处重新会聚后形成两个峰。直到势垒深度 $V_0 = 80$ 时, 光束的能量被完全限制在势垒左侧, 发生了光束的全反射现象, 如图 1(d2) 所示。

图 1(a3)~(d3) 给出的是线性啁啾 $C = -2$ 时的光束的演化规律, 可以看出, 除了线性啁啾抑制的子光束不同外, 其他规律基本与 $C = 2$ 时相同。

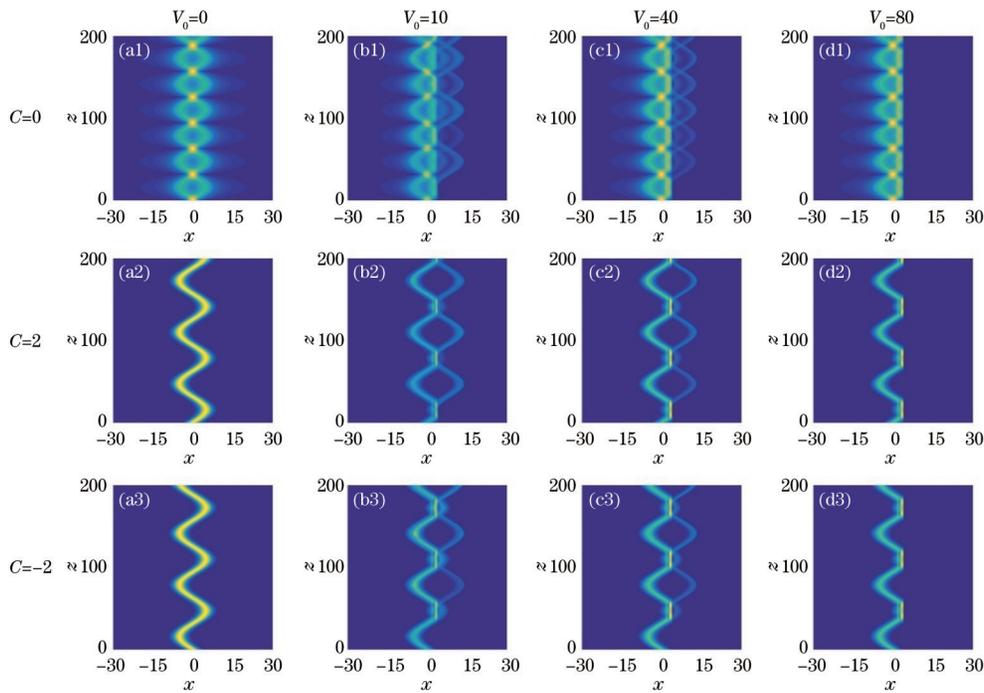


图 1 单边势垒对线性啁啾高斯光束的影响

Fig. 1 Influence of unilateral potential barrier on linear chirped Gaussian beam

图 2 给出了 $C = 2$ 时光束的峰值强度随传输距离的变化。可以看出: 当势垒深度为 0 时, 光束的峰值强度保持不变; 当势垒深度不为 0 时, 由于势垒的阻碍作用, 光束的传输轨迹发生变化, 光束的峰值强度周期性地出现两个峰; 随着势垒深度增大, 透射光强逐渐减小, 反射光强逐渐增强, 形成了以反射光为主的演化轨迹, 直到势垒深度达到临界值, 光束发生全反射, 形成了稳定的周期演化轨迹, 但峰值强度整体会有所减小。

当线性啁啾 $C = 0$ 并且二次啁啾 $\beta \neq 0$ 时, 分别由式(8)和式(1)得到了啁啾高斯光束的解析结果与数值模拟结果, 如图 3 所示。对比图 3(a) 所示的解析结果

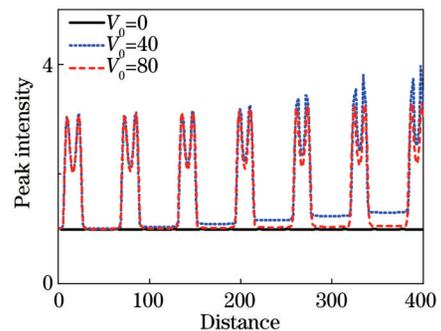


图 2 $C = 2$ 时高斯光束峰值强度的演化

Fig. 2 Peak intensity evolution of Gaussian beam for $C = 2$

与图 3(b)所示的数值模拟结果可以看出,数值模拟结果与解析结果吻合得非常好。在二次啁啾作用下,高斯光束的峰值强度迅速增至最大,然后分裂成两束,两束子光束先排斥后吸引,重新会聚后完成一次呼吸行为,随后又经历了一次呼吸幅度更大、距离更长的呼吸行为,最终一小一大两次呼吸形成一个周期的演化。二次啁啾的引入改变了两子光束以正弦轨迹呼吸振荡的规律,如图 1(a1)所示,且未出现类似线性啁啾抑制子光束强度的现象,二次啁啾改变的是高斯光束演化的呼吸周期和呼吸幅度。图 3(c)给出的是二次啁啾取不同值时,高斯光束演化过程中峰值强度随传输距

离的变化。可以看出,二次啁啾的绝对值越大,光束的峰值强度越大。这与文献[39-40]中的现象是一致的,啁啾会导致光束的强度分布发生变化。当二次啁啾 $\beta > 0$ 时,幅度较大的呼吸在前,幅度较小的呼吸在后;当 $\beta < 0$ 时,呼吸顺序发生调换。因此,二次啁啾的大小并不会影响高斯光束演化的周期特性,但它的正负却会影响演化的呼吸行为。图 3(d)给出的是高斯光束演化过程中最大峰值强度与二次啁啾取值的关系,可以看出,二次啁啾的正负对光束演化节点处的峰值强度几乎没有影响,而二次啁啾绝对值的增大却会使最大峰值强度明显增大。

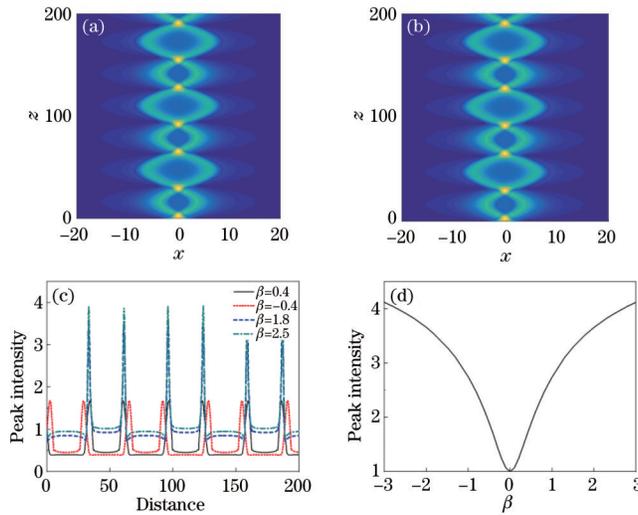


图 3 二次啁啾对高斯光束演化的影响。(a) $\beta = -0.4$ 时高斯光束演化的解析结果; (b) $\beta = -0.4$ 时高斯光束演化的数值模拟结果; (c) 峰值强度随传输距离的演化; (d) 最大峰值强度随二次啁啾的变化

Fig. 3 Influences of quadratic chirp on Gaussian beam evolution. (a) Analytical Gaussian beam evolution for $\beta = -0.4$; (b) numerical simulation of Gaussian beam evolution for $\beta = -0.4$; (c) evolution of peak intensity with transmission distance; (d) variation of maximum peak intensity with quadratic chirp

单边势垒对二次啁啾高斯光束传输的影响如图 4 所示。当 $V_0 = 0$ 并且 $\beta = 0.4$ 时,通过比较图 4(a1) 和

图 3(a) 后发现,二者除了一个周期内的一大一小呼吸结构调换顺序外,其他特性完全相同。当势垒深度不

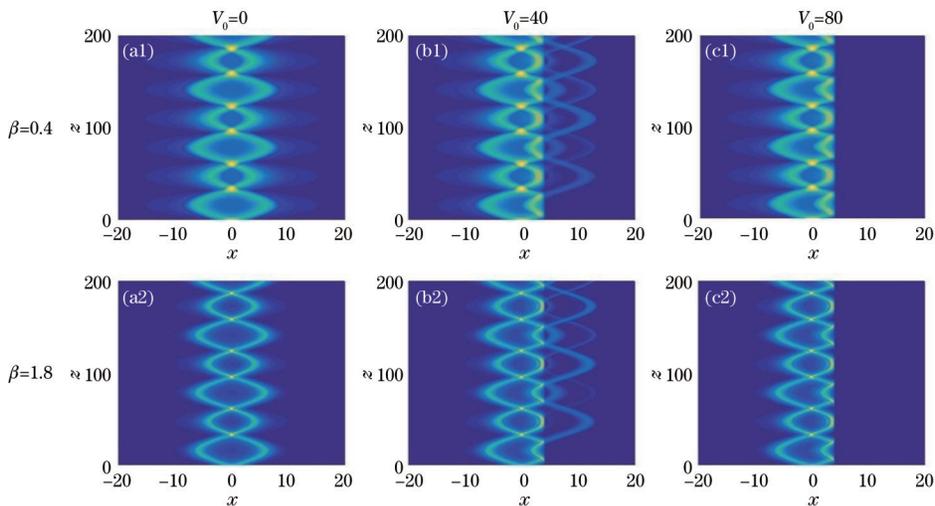


图 4 单边势垒对二次啁啾高斯光束的影响

Fig. 4 Influence of unilateral potential barrier on quadratic chirped Gaussian beam

为 0 时, 光束遇到势垒同样会产生反射和透射, 而且反射和透射的能量比与 V_0 的取值有关, 直到势垒深度 $V_0 = 80$ 时, 光束能量全部被反射, 势垒的右侧不再有光束透过, 如图 4(b1) 和图 4(c1) 所示。图 4(a2) ~ (c2) 给出的是二次啁啾 $\beta = 1.8$ 时单边势垒作用下的高斯光束演化情况, 可以看出, 二次啁啾的增加使得传输过程中的光束宽度减小, 峰值强度增大, 其他特性与 $\beta = 0.4$ 时的基本相同。

3.2 双边势垒对高斯光束动力学的影响

在势函数 $V(x)$ 为双边势垒的情况下, 保持其他参数不变, 逐渐增大势垒深度 V_0 , 高斯光束的演化情

况如图 5 所示。当线性啁啾 $C = 0$ 时, 双边势垒的作用与单边势垒类似, 周期振荡光束遇到势垒时, 在两侧势垒处均产生了反射和透射现象, 所以光束演化呈现出左右对称的特征。随着势垒深度不断增加, 透射的能量逐渐减少, 直到 $V_0 = 80$ 时, 光束的能量被束缚在双边势垒之间, 如图 5(a1) ~ (c1) 所示。当线性啁啾 $C \neq 0$ 时, 虽然一侧的子光束被抑制, 但势垒对光束演化的影响基本与图 1 中类似, 只是反射和透射发生在两侧势垒位置。同样地, 当势垒深度增加到 $V_0 = 80$ 时, 光束能量被束缚在双边势垒中间, 如图 5(a2) ~ (c2) 所示。

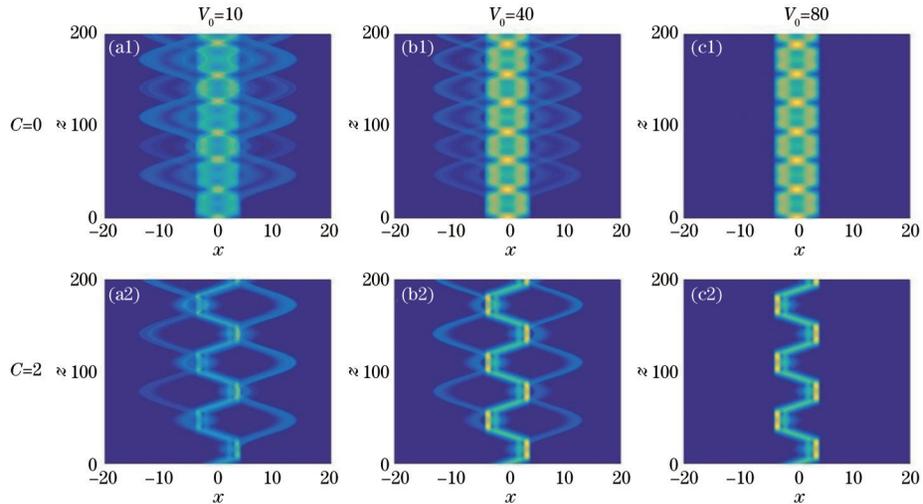


图 5 双边势垒对线性啁啾高斯光束的影响

Fig. 5 Influence of bilateral potential barrier on linear chirped Gaussian beam

当线性啁啾 $C = 0$ 且二次啁啾 $\beta \neq 0$ 时, 双边势垒作用下二次啁啾高斯光束的演化如图 6 所示。从图 6 中可以看出二次啁啾和双边势垒对高斯光束的影响规律基本与图 4 相同, 只是光束的反射和透射同时产生

于双边势垒存在位置, 从而导致光束轨迹关于 $x = 0$ 轴对称, 最终形成了对称的周期结构。随着二次啁啾的增大, 光束衍射减弱, 宽度减小, 但势垒的影响规律基本不变, 如图 6(c1) 和图 6(c2) 所示。

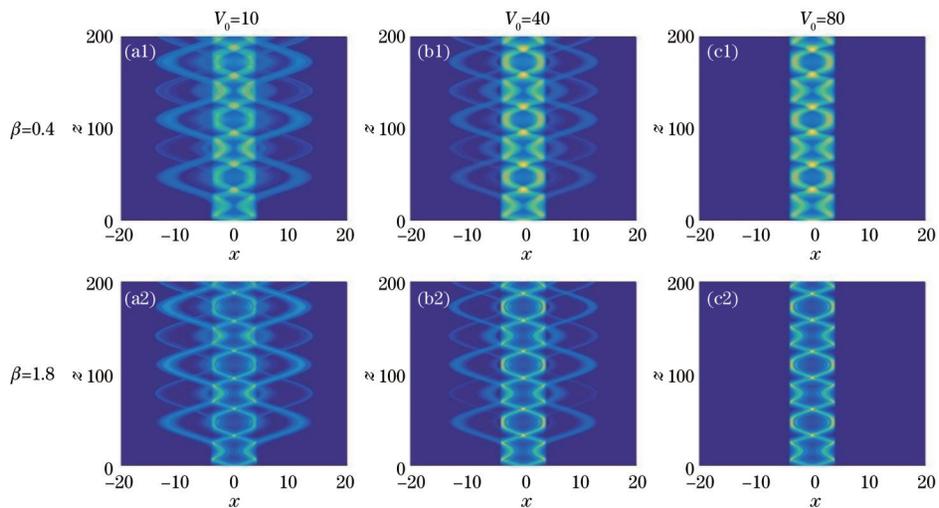


图 6 双边势垒对二次啁啾高斯光束的影响

Fig. 6 Influence of bilateral potential barrier on quadratic chirped Gaussian beam

上述研究的是单独线性啁啾或二次啁啾对高斯光束演化的影响,虽然没有发现二次啁啾对高斯光束分裂后子光束强度有抑制作用,但二次啁啾对高斯光束的呼吸行为与光束强度分布存在显著影响,所以当二者同时存在时,二次啁啾对线性啁啾抑制分裂后子光束强度的作用也会产生影响。经过计算后发现,高斯光束的演化规律与图 5 类似,但由于二次啁啾的存在,完全抑制其中一束子光束所需的线性啁啾将会增大,如图 7 所示,二者几乎呈线性关系。

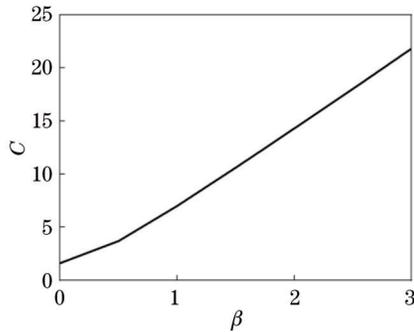


图 7 完全抑制一束光所需线性啁啾与二次啁啾的关系

Fig. 7 Relationship between linear chirp and quadratic chirp for making one beam disappear completely

4 结 论

本文基于具有外部势垒的变系数分数薛定谔方程,采用数值模拟和解析相结合的方法研究了单边势垒和双边势垒对线性啁啾高斯光束和二次啁啾高斯光束传输特性的影响。结果表明:当初始输入高斯光束不包含啁啾,系统没有势垒时,高斯光束会分裂为两束,且两光束先排斥后吸引,呈现出周期性振荡行为。当初始输入高斯光束只包含线性啁啾时,线性啁啾会对光束的传输起到抑制作用,这与文献[38]报道的结果是一致的。系统势垒的存在会使光束在势垒位置处同时产生反射和透射现象,导致光束发生变形。经过反射与透射的光束仍然会受到变系数的调制,并在势垒位置处叠加后再次传输。当势垒深度达到一定阈值后,光束被势垒全部反射,光束能量被完全限制在单边势垒的一侧或双边势垒之间,从而实现对光束能量的控制。当初始输入高斯光束只包含二次啁啾时,不论二次啁啾为正还是为负,高斯光束均呈现出一种新的周期演化规律,包含一大一小两个呼吸结构,且二次啁啾的绝对值越大,光束的衍射强度越小,光束的束宽也越小。系统势垒对二次啁啾高斯光束和线性啁啾高斯光束的影响类似,光束在遇到势垒时同时产生反射和透射现象,且势垒深度达到临界值后,光束能量全部被反射,从而被束缚在双边势垒之间。本研究所得结果不仅丰富了分数薛定谔方程的研究成果,还可以为光束控制、全光器件的研究提供一定的理论参考。

参 考 文 献

[1] Laughlin R B. Anomalous quantum Hall effect: an

incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations[J]. *Physical Review Letters*, 1983, 50(18): 1395-1398.

- [2] Wen J M, Zhang Y, Xiao M. The Talbot effect: recent advances in classical optics, nonlinear optics, and quantum optics[J]. *Advances in Optics and Photonics*, 2013, 5(1): 83-130.
- [3] Rokhinson L P, Liu X Y, Furdyna J K. The fractional a. c. Josephson effect in a semiconductor-superconductor nanowire as a signature of Majorana particles[J]. *Nature Physics*, 2012, 8(11): 795-799.
- [4] Kröger H. Fractal geometry in quantum mechanics, field theory and spin systems[J]. *Physics Reports*, 2000, 323(2): 81-181.
- [5] Metzler R, Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach[J]. *Physics Reports*, 2000, 339(1): 1-77.
- [6] 王蕾, 杨光晔, 任晋萍, 等. 双余弦相位调制对超高斯脉冲的频谱压缩[J]. *光学学报*, 2018, 38(3): 0319001. Wang L, Yang G Y, Ren J P, et al. Spectral compression of super-Gaussian pulse by dual cosinoidal phase modulation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(3): 0319001.
- [7] Laskin N. Fractional quantum mechanics[J]. *Physical Review E*, 2000, 62(3): 3135-3145.
- [8] Laskin N. Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals[J]. *Physics Letters A*, 2000, 268(4/5/6): 298-305.
- [9] Laskin N. Fractional Schrödinger equation[J]. *Physical Review E*, 2002, 66(5): 056108.
- [10] Longhi S. Fractional Schrödinger equation in optics[J]. *Optics Letters*, 2015, 40(6): 1117-1120.
- [11] Zhang Y Q, Zhong H, Belić M R, et al. Diffraction-free beams in fractional Schrödinger equation[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 23645.
- [12] Zhang Y Q, Liu X, Belić M R, et al. Propagation dynamics of a light beam in a fractional Schrödinger equation[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(18): 180403.
- [13] Zhang Y Q, Zhong H, Belić M R, et al. PT symmetry in a fractional Schrödinger equation[J]. *Laser & Photonics Reviews*, 2016, 10(3): 526-531.
- [14] Zhang L F, Li C X, Zhong H Z, et al. Propagation dynamics of super-Gaussian beams in fractional Schrödinger equation: from linear to nonlinear regimes[J]. *Optics Express*, 2016, 24(13): 14406-14418.
- [15] Zhang L F, He Z H, Conti C, et al. Modulational instability in fractional nonlinear Schrödinger equation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, 48: 531-540.
- [16] Guo B L, Huang D W. Existence and stability of standing waves for nonlinear fractional Schrödinger equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2012, 53(8): 083702.
- [17] Wang D L, Xiao A G, Yang W. Crank-Nicolson difference scheme for the coupled nonlinear Schrödinger equations with the Riesz space fractional derivative[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 242: 670-681.

- [18] Klein C, Sparber C, Markowich P. Numerical study of fractional nonlinear Schrödinger equations[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2014, 470(2172): 20140364.
- [19] Huang X W, Shi X H, Deng Z X, et al. Potential barrier-induced dynamics of finite energy Airy beams in fractional Schrödinger equation[J]. Optics Express, 2017, 25(26): 32560-32569.
- [20] Liemert A, Kienle A. Fractional Schrödinger equation in the presence of the linear potential[J]. Mathematics, 2016, 4(2): 31.
- [21] Huang X W, Deng Z X, Fu X Q. Dynamics of finite energy Airy beams modeled by the fractional Schrödinger equation with a linear potential[J]. Journal of the Optical Society of America B, 2017, 34(5): 976-982.
- [22] Dong L W, Huang C M. Double-hump solitons in fractional dimensions with a PT-symmetric potential[J]. Optics Express, 2018, 26(8): 10509-10518.
- [23] 肖燕, 张静, 王鹏翔. 线性势作用下艾里-高斯光束的周期演化[J]. 中国激光, 2021, 48(1): 0105002.
Xiao Y, Zhang J, Wang P X. Periodic evolution of Airy-Gaussian beams under linear potential[J]. Chinese Journal of Lasers, 2021, 48(1): 0105002.
- [24] 王栋栋, 臧峰, 李禄. 基于分数薛定谔方程对高斯光束的操控[J]. 光子学报, 2019, 48(10): 1048005.
Wang D D, Zang F, Li L. Manipulation of Gaussian beam based on fractional Schrödinger equation[J]. Acta Photonica Sinica, 2019, 48(10): 1048005.
- [25] Zhang Y Q, Wang R, Zhong H, et al. Resonant mode conversions and Rabi oscillations in a fractional Schrödinger equation[J]. Optics Express, 2017, 25(26): 32401-32410.
- [26] Zhang Y Q, Wang R, Zhong H, et al. Optical Bloch oscillation and Zener tunneling in the fractional Schrödinger equation[J]. Scientific Reports, 2017, 7: 17872.
- [27] Huang C M, Dong L W. Gap solitons in the nonlinear fractional Schrödinger equation with an optical lattice[J]. Optics Letters, 2016, 41(24): 5636-5639.
- [28] Zhong W P, Belić M R, Zhang Y Q. Accessible solitons of fractional dimension[J]. Annals of Physics, 2016, 368: 110-116.
- [29] Xiao J, Tian Z X, Huang C M, et al. Surface gap solitons in a nonlinear fractional Schrödinger equation[J]. Optics Express, 2018, 26(3): 2650-2658.
- [30] Chen M N, Zeng S H, Lu D Q, et al. Optical solitons, self-focusing, and wave collapse in a space-fractional Schrödinger equation with a Kerr-type nonlinearity[J]. Physical Review E, 2018, 98: 022211.
- [31] Zeng L W, Zeng J H. One-dimensional solitons in fractional Schrödinger equation with a spatially periodical modulated nonlinearity: nonlinear lattice[J]. Optics Letters, 2019, 44(11): 2661-2664.
- [32] Huang C M, Dong L W. Dissipative surface solitons in a nonlinear fractional Schrödinger equation[J]. Optics Letters, 2019, 44(22): 5438-5441.
- [33] Zhu X, Yang F W, Cao S L, et al. Multipole gap solitons in fractional Schrödinger equation with parity-time-symmetric optical lattices[J]. Optics Express, 2020, 28(2): 1631-1639.
- [34] Li P F, Li J D, Han B C, et al. PT-symmetric optical modes and spontaneous symmetry breaking in the space-fractional Schrödinger equation[J]. Romain Reports in Physics, 2019, 71(2): 106.
- [35] Li P F, Malomed B A, Mihalache D. Symmetry breaking of spatial Kerr solitons in fractional dimension [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2020, 132: 109602.
- [36] Huang C M, Shang C, Li J, et al. Localization and Anderson delocalization of light in fractional dimensions with a quasi-periodic lattice[J]. Optics Express, 2019, 27(5): 6259-6267.
- [37] Zhang L F, Zhang X, Wu H Z, et al. Anomalous interaction of Airy beams in the fractional nonlinear Schrödinger equation[J]. Optics Express, 2019, 27(20): 27936-27945.
- [38] Zang F, Wang Y, Li L. Dynamics of Gaussian beam modeled by fractional Schrödinger equation with a variable coefficient[J]. Optics Express, 2018, 26(18): 23740-23750.
- [39] Chen Y Z, Zhao G W, Ye F, et al. Nonparaxial propagation properties of the chirped Airy Gaussian vortex beams in uniaxial crystals orthogonal to the optical axis[J]. Chinese Physics B, 2018, 27(10): 104201.
- [40] Zhang J B, Pang Z H, Feng L Y, et al. Propagation properties of the chirped Airy vortex beams through left-handed and right-handed material slabs[J]. Chinese Optics Letters, 2017, 15(6): 60501-60506.